Torenopdracht

Inleiding

In New York is er altijd wat te beleven, zo ook voor Spiderman. Als echte held zorgt Spiderman ervoor dat de veiligheid van de mensen in de stad gewaarborgd blijft. Dit gaat echter niet zonder slag of stoot. Na een zware werkdag lukt het Spiderman niet om van het ene gebouw naar het andere gebouw te slingeren, omdat zijn 'web-functie' defect is. Een zeer ongelukkig moment, vooral gezien het nieuwe gevaar dat zich zojuist heeft aangekondigd!

Terwijl Spiderman thuis in zijn appartement is, laat zijn "Spider-sense" hem weten dat er in drie verschillende hoge torens verspreid over de stad mensen in gevaar zijn. Hij is vastberaden om de mensen te helpen, maar doordat hij niet met zijn 'web-functie' kan slingeren moet Spiderman de torens op een andere manier bereiken. Hij besluit om via de daken van de gebouwen in de stad te springen naar de drie torens.

Echter kost het springen Spiderman veel energie. Om deze reden zoekt Spiderman de beste route om vanuit zijn huis naar de drie torens in de stad te gaan en vervolgens weer veilig thuis te komen. Een belangrijke voorwaarde voor de route is dat de totale springafstand zo klein mogelijk is. Zo hoopt Spiderman de mensen in gevaar zo snel mogelijk te kunnen redden, zonder dat hijzelf in gevaar komt.

Let op! Deze opdracht gaat verder op de volgende pagina

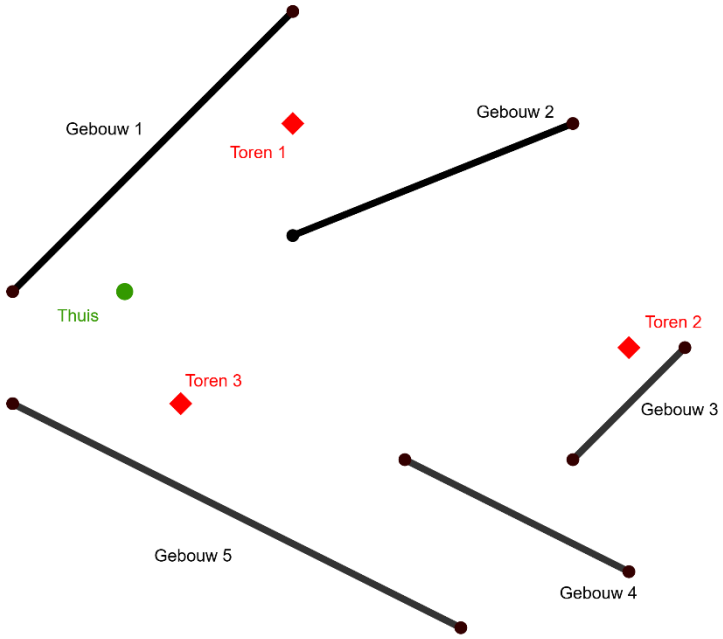
Het probleem – deel 1

Spiderman gaat in New York op drie verschillende torens in de stad mensen redden. Hij zoekt de beste route naar deze plekken, waarbij zijn sprongen van gebouw naar gebouw zo klein mogelijk zijn. Welke route levert de kleinste sprongafstand op? Bereken deze sprongafstand.

Onderstaand figuur geeft op schematische wijze het bovenaanzicht van de stad met daarin de volgende locaties: het huis van Spiderman, de drie torens en de daken waar Spiderman naartoe springt en vanaf springt.

Spiderman start bij zijn huis, springt (eventueel via de gebouwen 1 t/m 5) naar de drie torens en gaat daarna terug naar huis.

1. Teken in de figuur een mogelijke route die Spiderman door de stad kan volgen om zijn sprongafstand zo klein mogelijk te houden. Negeer hierbij de verticale afstanden.
2. Hoeveel meter moet Spiderman volgens jullie route springen?





10 meter

Let op! Deze opdracht gaat verder op de volgende pagina

Het probleem – deel 2

Onderstaand figuur geeft een route aan met een kleine totale sprongafstand. Hierbij zijn de locaties op schematische wijze weergegeven in een assenstelsel. Eén hokje in het assenstelsel is 10 meter bij 10 meter. De gebouwen (G1 tot en met G5) zijn in de figuur getekend als lijnstukken welke worden beschreven door onderstaande vergelijkingen:

$$G1: y = x + 25 \text{ voor } -35 \leq x \leq -10$$

$$G2: y = 0{,}4x - 1 \text{ voor } -10 \leq x \leq 15$$

$$G3: y = x - 40 \text{ voor } 15 \leq x \leq 25$$

$$G4: y = -0{,}5x - 25 \text{ voor } 0 \leq x \leq 10$$

$$G5: y = -0{,}5x - 37{,}5 \text{ voor } -35 \leq x \leq 5$$

Daarnaast hebben we de volgende coördinaten:

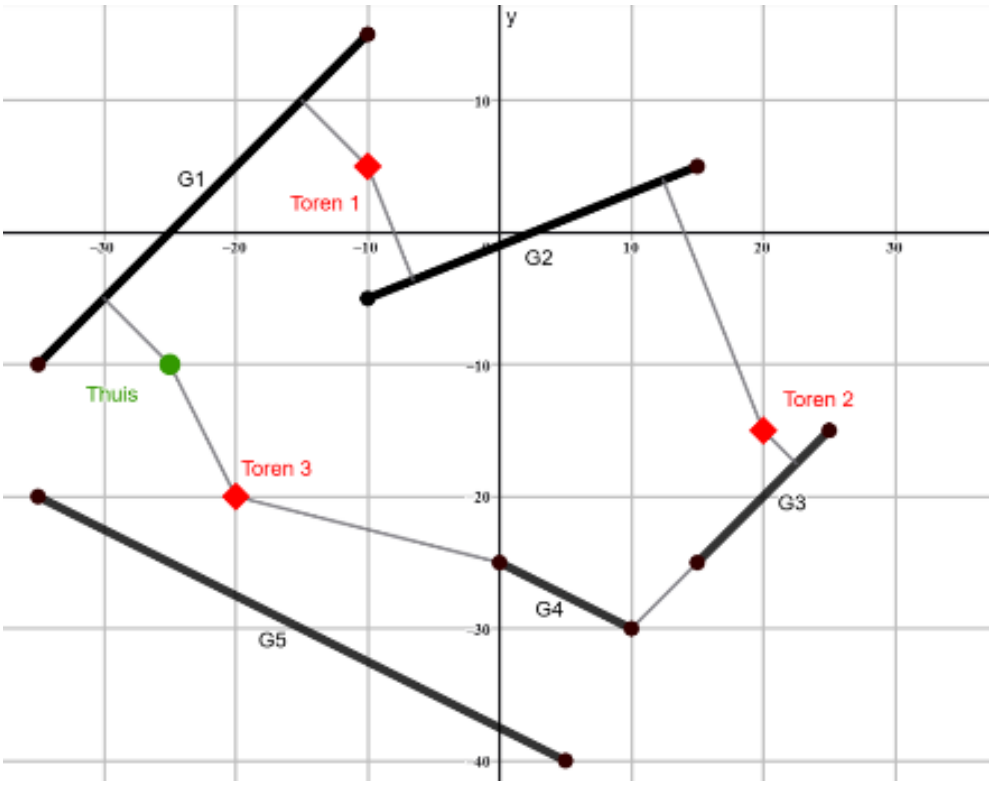
$$Thuis\ (-25,\ -10)$$

$$Toren\ 1\ (-10,\ 5)$$

$$Toren\ 2\ (20,\ -15)$$

$$Toren\ 3\ (-20,\ -20)$$

3. Bereken exact in meters de totale sprongafstand van de weergegeven route. Maak hierbij gebruik van de vergelijkingen van de lijnstukken en de coördinaten van de torens en het huis.



Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren

Doelgroep en onderwerp

Jaarlaag: 4 havo – wiskunde B
Onderwerp: Afstand tussen een punt en een lijn bepalen
Lesduur: 60-75 minuten
Benodigdheden: Pen & papier of whiteboard & markers
Werkwijze: Groepsopdracht
Leerdoelen:

- De afstand tussen een punt en een lijn bepalen met behulp van een loodlijn
- Met behulp van de richtingscoëfficiënt van de gegeven lijn en de coördinaten van het gegeven punt de formule van de loodlijn opstellen
- De afstand tussen een punt en een lijn algebraïsch berekenen met behulp van het snijpunt van de gegeven lijn met de loodlijn door het gegeven punt

Voorkennis:

- Rechthoekige driehoeken, stelling van Pythagoras
- Lineaire formule opstellen
- Het snijpunt van een lijn berekenen
- Afstand tussen twee punten bepalen met behulp van de stelling van Pythagoras

Werkwijze

Beschrijving van de werkvorm

Na introductie door de docent met behulp van de inleiding worden er groepen gevormd, bij voorkeur van 3 leerlingen. Iedere groep krijgt de inleiding en deel 1 van het probleem, en gaat 10 minuten aan de slag. Hierna bespreekt de docent de aanpak en de gevonden routes van de eerste twee opdrachten klassikaal na.

Vervolgens deelt de docent deel 2 van het probleem uit en maken de leerlingen (in dezelfde groepjes) deze opdracht gedurende 30 minuten. Elke groep gebruikt een groot blad aan de muur om de uitwerkingen op te noteren (BTC). Sluit de les af met een klassengesprek.

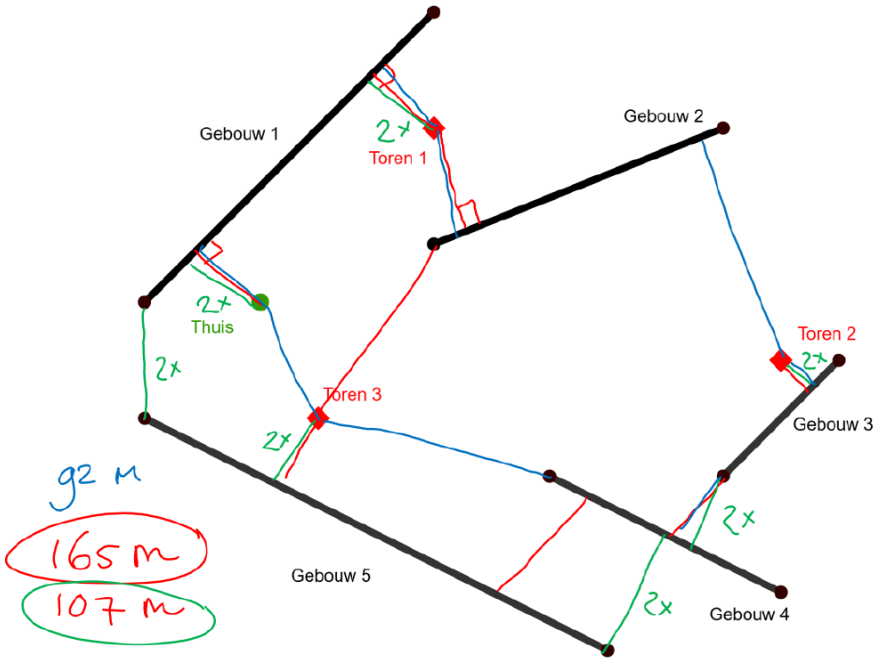
Hulpvraag tijdens opdracht 3

Vraag de leerlingen: wat valt op aan de relatie tussen de richtingscoëfficiënten van de getekende lijnen en de gegeven lijnen? Welke algemene regel kan je hieraan verbinden?

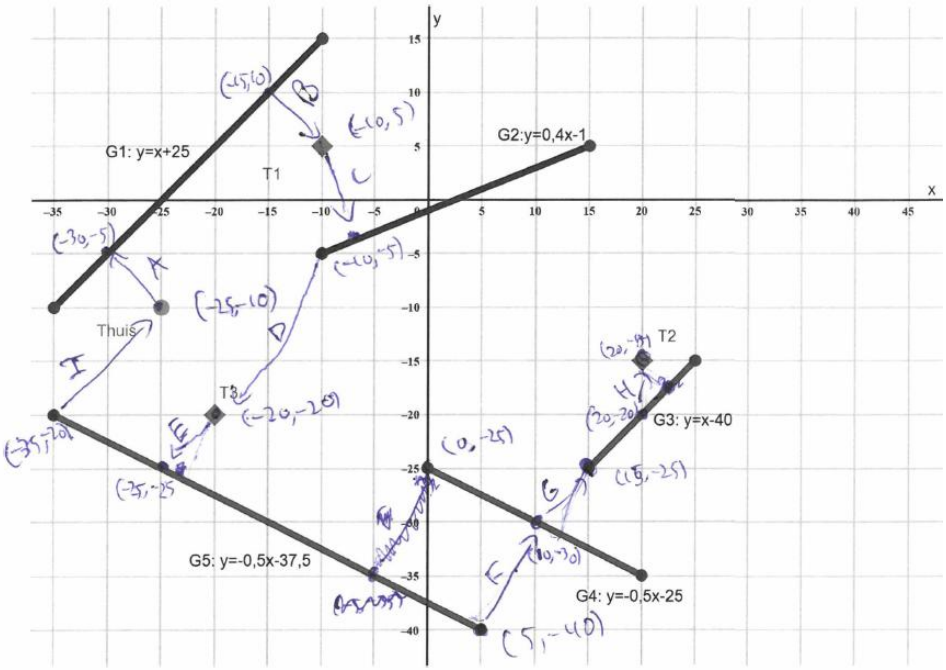
Stel deze hulpvraag tijdens de opdracht aan de aparte groepjes. Door deze vraag vervolgens klassikaal na te bespreken, kan elke groep met de juiste aanpak aan de slag met het vervolg van opdracht 3.

Verwachte oplossing van leerlingen

- Leerlingen vinden verschillende routes voor deel 1 van het probleem. Hieronder zijn in kleur de routes weergegeven van drie verschillende groepjes (blauw, rood en groen).



- In het begin van deel 2 van het probleem zijn leerlingen geneigd om de afstand op te meten met de liniaal in plaats van het exact te berekenen. Uiteindelijk zijn de groepjes bij deze opdracht veel aan het redeneren en berekenen. Hieronder zijn een aantal voorbeelden te zien van uitwerkingen op het werkblad van een oude variant van deze opdracht.



Aanwijzingen voor het klassengesprek

- Laat de groepjes hun gevonden route (met de bepaalde afstand) aan de klas tonen. De docent kan tijdens de nabespreking van deel 1 de volgende vragen stellen:
    - Waar heb je op gelet bij het tekenen van de afstanden tussen de torens en de gebouwen?
    - Wat zorgt ervoor dat de afstand tussen de torens en de gebouwen zo klein mogelijk is?
    - Welke informatie over de route heb je minimaal nodig voor het bepalen van de afstand?
    - Welk deel van deze informatie heb je zelf gecreëerd?
    - Wat hebben we nu ontdekt?
- Besteed aandacht aan de volgende observaties:
    - Voor het bepalen van afstanden tussen een punt en een lijn, heb je een punt op de lijn nodig.
    - Voor het bepalen van de kortste afstand tussen een punt en een lijn, maak je gebruik van een loodlijn.
    - Het punt dat je zoekt op de lijn, is het snijpunt van de loodlijn en de getekende lijn.
- De docent kan tijdens de nabespreking van deel 2 de volgende vragen stellen:
    - Bij welke afstanden is er geen loodlijn nodig? (Bij de afstand tussen twee punten, bijvoorbeeld Thuis en Toren 3).
    - Waarom heb je de vergelijking van de loodlijn nodig voor het berekenen van de afstand tussen Toren 1 en Gebouw 2? (Om het snijpunt te bepalen van Gebouw 2 met de loodlijn door Toren 1, zodat de afstand tussen Toren 1 en het snijpunt berekend kan worden).
    - Welke stappen maak je om de afstand tussen een punt (bijvoorbeeld Toren 1) en een lijn (bijvoorbeeld Gebouw 2) te berekenen?
- Behandel eventueel de volgende observaties:
    - Wat valt op aan de afstanden van [Thuis – Gebouw 1], [Gebouw 1 – Toren 1] en [Gebouw 3 – Gebouw 4]? (Deze afstanden zijn allemaal $5\sqrt{2}$. In het assenstelsel zijn deze afstanden de helft van de diagonaal van één hokje).
        - Welke afstand is daar de helft van? ([Toren 2 – Gebouw 3]).

Reflectie

- Leerlingen konden wel lachen om de inleidingstekst. Ze begrepen prima wat er van hen werd verwacht. Het is wel essentieel om te benadrukken dat de verticale afstand van de sprongen geen rol speelt bij deze opdracht. Tijdens deel 1 is het dan ook handig om bij elk groepje na te gaan of de leerlingen hier goed van op de hoogte zijn.
- De inleidingstekst bevat de tekst “De grote sprongen zijn erg gevaarlijk”, waardoor leerlingen zich tijdens vraag 2 afvroegen of de afstand tussen Gebouw 2 en Toren 2 te groot was om te springen. De bedoeling is dat de totale sprongafstand zo klein mogelijk is en als een grote sprong onderdeel is van de totale kort route, dan is dat geen probleem. Om de verwarring hierover te verminderen, is besloten om de inleidingstekst iets aan te passen, zodat er alleen aandacht hoeft te zijn voor de totale sprongafstand van de route.
- In een vorige variant van deel 2 gingen leerlingen op het werkblad de afstanden berekenen bij hun eigen route van vraag 2. Dit zorgde ervoor dat de groepjes allerlei verschillende sprongafstanden berekenden en de opdracht hierdoor lastig na te bespreken was. Om deze reden is besloten om elke groep dezelfde route te laten gebruiken bij deel 2. Zo loopt elk groepje tegen dezelfde soort problemen aan bij het berekenen van de afstanden.
- Eerder ontbrak BTC als werkvorm bij deel 2, terwijl BTC juist gewenst was voor groepjes die vastliepen of een onjuiste aanpak hadden om ideeën op te doen bij het werk van andere groepjes.

- Een leerling zei: ''Het geeft toch niet als het niet precies een hoek van 90 graden is? Want het scheelt maar een paar meter.'' Een schattende aanpak is prima voor vraag 2, maar het doel is dat leerlingen bij deel 2 (dus vraag 3) op exacte wijze te werk gaan.

Deze opdrachten zijn ontwikkeld binnen het IOL-project Probleemaanpak in de wiskundeles van de NVvW. Meer informatie en vragen vind je op:

www.nvvw.nl/lesmaterialen/probleemoplossen