Rijdende autootjes

Het probleem

Een rood speelgoedautootje racet op een cirkelvormig circuit met een constante snelheid. Door een assenstelsel precies in het midden van het circuit te plaatsen, kunnen we de plek van de raceauto wiskundig weergeven met de volgende *bewegingsvergelijkingen*:

$$\begin{cases} x(t) = cos\ (t) \\ y(t) = sin\ (t) \end{cases}$$

Bij de start op het tijdstip $t = 0$ bevindt de raceauto zich dus in het punt $(1,0)$ en hij rijdt tegen de klok in. Een andere (blauwe) raceauto gaat ook op het circuit rijden volgens de volgende voorwaarden:

- De raceauto start onderaan het circuit, dus ter hoogte van het boompje.
- De blauwe raceauto rijdt met de klok mee.
- De blauwe raceauto passeert elke 2 rondes 3 keer de rode raceauto.
- De raceauto rijdt over de binnenbaan en die is 12% minder lang dande buitenbaan (van de rode raceauto).

Geef de bewegingsvergelijkingen van de blauwe raceauto, zodat voldaan wordt aan alle voorwaarden.



Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren

Doelgroep en onderwerp

Jaarlaag:	6 vwo – wiskunde B
Onderwerp:	Bewegingsvergelijkingen
Lesduur:	60 minuten
Benodigdheden:	Pen & papier of whiteboard & markers, eventueel grafische rekenmachine
Werkwijze:	Groepsopdracht
Voorkennis:	Je kunt de bewegingsvergelijkingen van een cirkel opstellen met een gegeven straal, middelpunt en snelheid
Leerdoelen:	• Leerlingen passen het manipuleren van bewegingsvergelijkingen toe • Leerlingen krijgen meer inzicht in het feit dat bij bewegingsvergelijkingen een punt zich op een bepaald moment op een curve bevindt en dat het punt over de curve beweegt

Werkwijze

Beschrijving van de werkvorm
Verdeel de leerlingen in groepjes van 3 leerlingen. De leerlingen werken aan tafel op papier of op whiteboards, zonder laptop of computer.

Mogelijke hints
- Doe de voorwaarden één voor één.
- Hoe kun je controleren welke kant de auto op beweegt? Bijvoorbeeld met een tabel.
- Gebruik de grafische rekenmachine als hulpmiddel in de modus bewegingsvergelijkingen.
- Hoe vaak komen de rode en blauwe raceauto elkaar tegen als ze even snel rijden?

Mogelijke uitbreidingsvragen
- Bedenk zelf een aantal voorwaarden voor een derde raceauto en stel de bijbehorende bewegingsvergelijkingen op.

Verwachte oplossing van leerlingen

- Onderaan de baan starten
  - Verwachte juiste oplossingen:
    - Redeneren met startwaarden van (co)sinus geeft:

$$\begin{cases} x(t) = sin\ (t) \\ y(t) = -cos\ (t) \end{cases}$$

- Alternatief: rood start op op $(1,0)$ dus voor blauw een kwart cirkel verschuiven om in $(0,-1)$ te starten, bijvoorbeeld:
$$\begin{cases} x(t) = cos\left(t - \frac{\pi}{2}\right) \\ y(t) = sin\left(t - \frac{\pi}{2}\right) \end{cases}$$

  - Verwachte onjuiste oplossingen:
    Horizontaal en verticaal verschuiven, of een translatie de verkeerde kant op, bijvoorbeeld:
$$\begin{cases} x(t) = cos(t) - 1 \\ y(t) = sin(t) - 1 \end{cases}$$
    of
$$\begin{cases} x(t) = cos\left(t + \frac{\pi}{2}\right) \\ y(t) = sin\left(t + \frac{\pi}{2}\right) \end{cases}$$

- Met de klok meerijden
  - Verwachte juiste oplossingen:
    - Redeneren met startwaarden van (co)sinus geeft
$$\begin{cases} x(t) = cos\,(t) \\ y(t) = -sin\,(t) \end{cases}$$
    - "De andere kant oprijden", dus negatieve t-waarden invullen, geeft
$$\begin{cases} x(t) = cos\,(-t) \\ y(t) = sin\,(-t) \end{cases}$$
  - Verwachte onjuiste oplossingen:
    Leerlingen denken dat het helemaal tegengesteld moet, bijvoorbeeld:
$$\begin{cases} x(t) = -cos\,(t) \\ y(t) = -sin\,(t) \end{cases}$$

- De blauwe raceauto passeert elke 2 rondes 3 keer de rode raceauto
  Verwachte (juiste) oplossingen, voortbordurend op de vorige deelvraag:
    - Als de auto's even snel zouden rijden, dan komt de blauwe auto steeds na een halve ronde de andere auto tegen. Dat is 2 keer per ronde, dus te veel. We willen dus dat de blauwe auto steeds na 2/3 ronde de andere auto tegen komt, want 3 keer 2/3 is 2. Dus 3 keer tegenkomen in 2 rondes.
    - Als ze elkaar een keer tegenkomen, dan komen ze elkaar weer tegen als de blauwe auto 2/3 ronde heeft gereden en de rode auto 1/3 ronde. Dat betekent dat de blauwe auto twee keer zo hard moet rijden (in tegengestelde richting). Dit geeft bijvoorbeeld:
$$\begin{cases} x(t) = cos\,(2t) \\ y(t) = -sin\,(2t) \end{cases} \quad \text{of} \quad \begin{cases} x(t) = cos\,(-2t) \\ y(t) = sin\,(-2t) \end{cases}$$

- Baan is 12% minder lang
  Verwachte (juiste) oplossingen, voortbordurend op de vorige deelvraag
    - De binnenbaan heeft dus een omtrek die 88% van de lengte van de buitenbaan heeft. De straal van de cirkel van de binnenbaan is dus 0,88 keer de straal van de buitenbaan. Dat geeft bijvoorbeeld:
$$\begin{cases} x(t) = 0{,}88\,cos\,(2t) \\ y(t) = -0{,}88\,sin\,(2t) \end{cases} \quad \text{of} \quad \begin{cases} x(t) = 0{,}88\,cos\,(-2t) \\ y(t) = 0{,}88\,sin\,(-2t) \end{cases}$$

Aanwijzingen voor het klassengesprek

Laat de groepjes hun gevonden bewegingsvergelijkingen aan de klas tonen. De docent kan tijdens de nabespreking van de opdrachten de volgende vragen stellen:

- Hoe kun je richting bepalen van een cirkelbeweging?
- Hoe kun je het startpunt bepalen van de cirkelbeweging?

Reflectie

De leerlingen waren 40 minuten intensief bezig. De voorwaarde 12% kortere baan was het makkelijkst voor ze. De voorwaarde van 3 keer passeren in 2 rondes is door geen enkel groepje (echt) gelukt en is kennelijk de moeilijkste. De andere kant op rijden lukte uiteindelijk vaak wel en op het juiste punt starten soms.

We deden de opdracht in BTC vorm in de week voor het schoolexamen over onder andere bewegingsvergelijkingen. Als docent was ik best tevreden, vooral omdat ze veel wiskunde actualiseerden. Er zou nog een gallery walk aan toegevoegd kunnen worden.

De hints zoals bedacht in het ontwerp werkten redelijk adequaat (ze konden weer verder). Nog een hint die erbij zou kunnen: probeer gewoon eens bewegingsvergelijkingen (en kijk of het werkt). Toen de groepjes al flink wat nagedacht hadden heb ik de hele klas even op het digibord laten zien hoe je met de grafische rekenmachine de beweging van de bedachte bewegingsvergelijkingen kunt nagaan. Dat is ook een mooie herhaling van een hulpmiddel bij het oplossen van dergelijke opgaven.

Let op:
Veel verschillende mogelijkheden om sinus/cosinus te herschrijven maakt het klassengesprek lastig.

Deze opdrachten zijn ontwikkeld binnen het IOL-project Probleemaanpak in de wiskundeles van de NVvW. Meer informatie en vragen vind je op:

www.nvvw.nl/lesmaterialen/probleemoplossen

CC BY SA