Puzzelen met machten en logaritmen

Het probleem

In tweetallen of groepjes krijgen jullie een set kaartjes op de bijgevoegde werkbladen. De opdracht is om de kaartjes die bij elkaar passen bij elkaar te zoeken, zoals in onderstaand voorbeeld.

In totaal zijn er vier verschillende sets van kaartjes: over machten (set A), logaritmen ontdekken (set B), rekenregels met logaritmen verkennen (set C) en gebruiken (set D).

Het gebruik van de rekenmachine is hierbij niet toegestaan.

$x = 3$	$3^x = 81$	$x = {}^5\log(1)$
$x = 1$	$5^x = 1$	$x = {}^3\log(81)$
$x = -1$	$10^x = 1.000.000$	$x = {}^3\log(3)$
$x = 6$	$5^x = \frac{1}{5}$	$x = \log(100)$

Knipblad set A *Herhalen rekenregels machten*

$a^p \cdot a^q$	a^{-1}
$\frac{1}{a^p}$	$a^{\frac{1}{2}}$
$(a^p)^q$	$\frac{1}{a}$
$(ab)^p$	a^0
$\frac{a^p}{a^q}$	a^{p-q}
$\sqrt[q]{a^p}$	$a^{p \cdot q}$
$\sqrt{a}$	a^{p+q}
a^{-p}	$a^p \cdot b^p$
$a^{\frac{p}{q}}$	1

Knipblad set B *Logaritmen ontdekken*

$x = 3$	$3^x = 81$	$x = {}^{5}log\ (1)$
$x = 1$	$5^x = 1$	$x = {}^{3}log\ (81)$
$x = -1$	$10^x = 1.000.000$	$x = {}^{3}log\ (3)$
$x = 6$	$5^x = \frac{1}{5}$	$x = log\ (100)$
$x = 5$	$2^x = 8$	$x = log\ (10^6)$
$x = 2$	$3^x = 3$	$x = {}^{2}log\ (2^3)$
$x = 0$	$3^x = 3^5$	$x = {}^{5}log\ (5^{-1})$

Knipblad set C R*ekenregels logaritmen verkennen*

$x = 6 \times 1$	$x = log\ log\ (10^3) - log\ log\ (10^2)$	$x = {}^{3}log\ log\ (9)$
$x = 3 - 1$	$x = 3 \cdot log\ log\ (100)$	$x = {}^{3}log\ log\ (81^2)$
$x = 1 + 2$	$x = 2 \cdot {}^{3}log\ log\ (81)$	$x = log\ log\ (1.000.000)$
$x = 3 - 2$	$x = {}^{3}log\ log\ (27) - {}^{3}log\ log\ (3)$	$x = {}^{3}log\ log\ (3^6)$
$x = 2 \times 4$	$x = log\ log\ (100) + log\ log\ (100)$	$x = {}^{5}log\ log\ (125)$
$x = 3 \times 2$	$x = 6 \cdot {}^{3}log\ log\ (3)$	$x = log\ log\ (10)$
$x = 2 + 2$	$x = {}^{5}log\ \log(5) + {}^{5}log\ log\ (25)$	$x = log\ log\ (10.000)$

Knipblad set D *Rekenregels logaritmen gebruiken*

$x = log(a) + log(b)$	$x = log(4)$	$a = b \cdot 10^x$
$x = \ 2log(6) + \ 2log(8)$	$x = b\ log(a)$	$x = 0{,}602 \ldots$
$x = log\ log\ (100) - log(25)$	$x = log\ log\ \left(\frac{a}{b}\right)$	$ab = 10^x$
$x = log(a^b)$	$x = 4 \cdot \ 2log(10)$	$x = 5{,}58 \ldots$
$x = \ 2log(10^4)$	$x = \ log(ab)$	$a \ = 10^{\frac{x}{b}}$
$x = log\ log\ (a) \ - log(b)$	$x = \ 2log(48)$	$x = 13{,}28 \ldots$

Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren

Doelgroep en onderwerp

Jaarlaag: 4 havo – wiskunde B
Onderwerp: Machten en logaritmen
Lesduur: Per set ± 15 minuten
Benodigdheden: Bijgevoegde knipbladen, eventueel gekleurd papier
Voorkennis: De rekenregels van machten in abstracte vorm
Werkwijze: Duo of groepsopdracht
Leerdoelen:

- Set A:
  - De rekenregels van machten in abstracte vorm kennen
- Set B:
  - De notatie van een logaritme begrijpen
  - De betekenis van een logaritme uitleggen
- Set C:
  - Het ontdekken van de rekenregels bij het optellen en aftrekken van logaritmen met hetzelfde grondtal
  - Het ontdekken van de rekenregel bij het vermenigvuldigen van een logaritme met een getal
- Set D:
  - De rekenregels van logaritmen (set C) in abstracte vorm kennen
  - Het kunnen schakelen tussen logaritmen en machten
  - De waarde van logaritmen inschatten

Werkwijze

Beschrijving van de werkvorm
Geef elk tweetal eerst één set kaartjes van het knipblad om de kaartjes in groepjes te verdelen. Geef een tweetal vervolgens het antwoordblad als zij alle kaartjes hebben verdeeld in groepjes. De leerlingen doen zo zelf het nakijkwerk. Informeer de leerlingen vervolgens over de afsluitende opdracht (en eventuele uitbreidingsopdracht). Zodra elk tweetal het nakijkwerk heeft gedaan en heeft nagedacht over de eindopdracht, start het klassengesprek.

Praktische tips

- Knip (of snijd) de kaartjes van tevoren uit het knipblad óf laat de leerlingen zelf de kaartjes uitknippen. N.B.: De kaartjes op het knipblad staan in een willekeurige volgorde.
- Het is ook mogelijk om deze opdracht uit te voeren zonder de losse kaartjes te gebruiken: Deel per tweetal één knipblad uit en laat de leerlingen in hun schrift een groepsindeling van de kaartjes maken.
- Gebruik gekleurd papier om de knipbladen van de verschillende sets gemakkelijk van elkaar te onderscheiden.

Set A
Elk groepje krijgt 18 kaartjes. De kaartjes bestaan uit negen groepjes van twee kaartjes.

Afsluitende opdracht A: Noteer de rekenregels in je schrift en geef bij elke set een getallenvoorbeeld (zodat je het beter kunt onthouden).

Uitbreidingsvragen set A:

- Leg met behulp van de rekenregels van machten uit waarom het logisch is dat $a^0 = 1$.
- Leg met behulp van de rekenregel voor $\frac{a^p}{a^q} = a^{p-q}$ de rekenregel $a^{-p} = \frac{1}{a^p}$ uit.

Set B
Elk groepje krijgt 21 kaartjes. De kaartjes bestaan uit zeven groepjes van drie kaartjes. Maak groepjes van drie kaarten die bij elkaar horen.

Mogelijke hints: Begin met het sorteren van de kaartjes. Welke kaartjes kan je combineren? Welke kaartjes blijven over?

Afsluitende opdracht B: Leg uit waarom de uitkomst van $^2log\ (32)$ gelijk is aan 5.

Uitbreidingsvraag set B: Welke twee kaartjes passen bij een kaartje met $x = {}^2log\ (2^3)$?

Set C
Elk groepje krijgt 21 kaartjes. De kaartjes bestaan uit zeven groepjes van drie kaartjes. Maak groepjes van drie kaarten die bij elkaar horen.

Afsluitende opdracht B: Leg uit hoe je $2 *^5log\ (3) +\ ^5log\ (12)$ kunt herleiden tot $^5log\ (412)$.

Uitbreidingsvraag set B: Noteer in algemene vorm de drie verschillende rekenregels van logaritmen die in de kaartjes voorkomen.

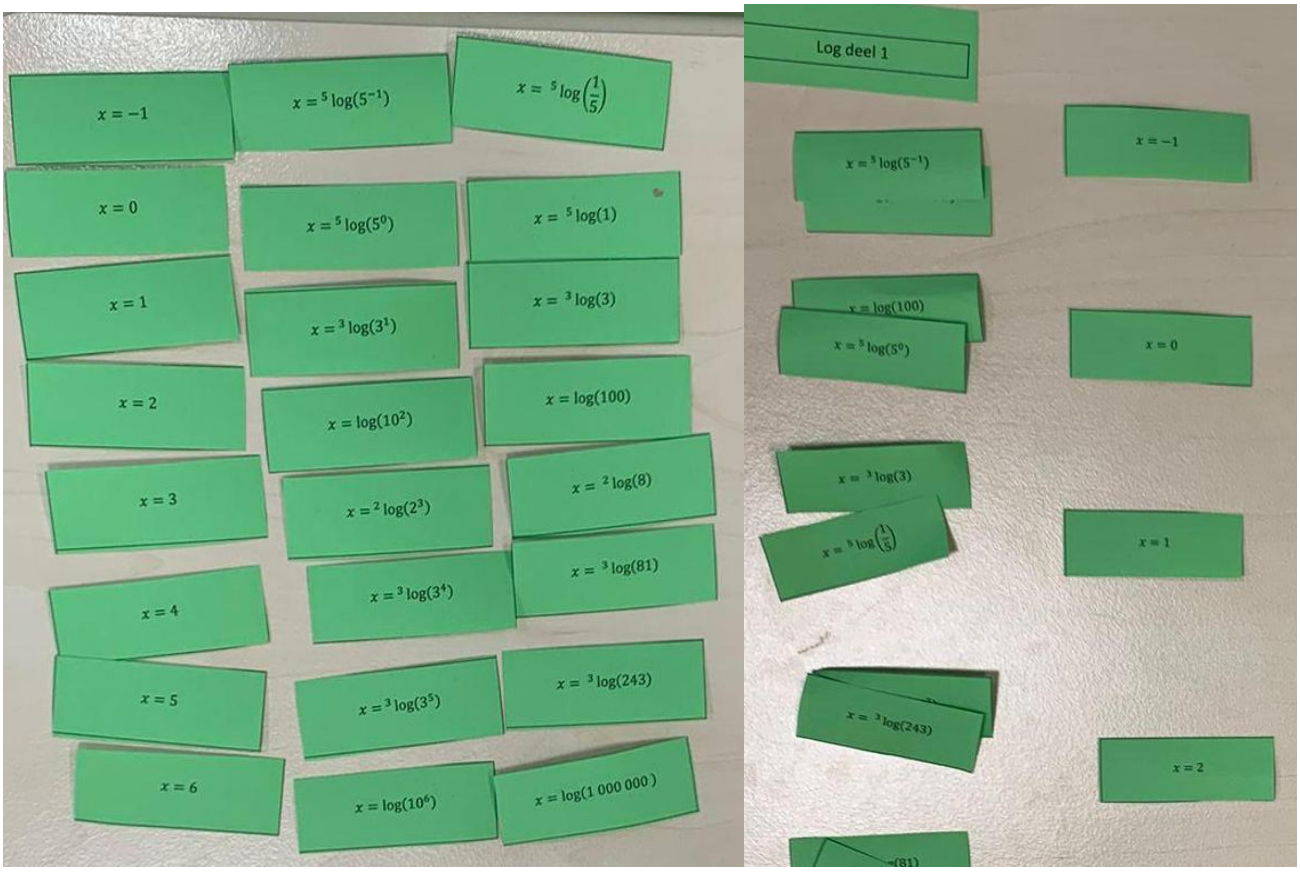
Set D
Elk groepje krijgt 18 kaartjes. De kaartjes bestaan uit zes groepjes van drie kaartjes. Maak groepjes van drie kaarten die bij elkaar horen.

Mogelijke hints: Welke informatie kan je uit de vorige set kaartjes halen? Weet je de oplossing van de logaritme die op het kaartje staan? Welke oplossing hoort daar dan bij? Hoe kan je de a vrijmaken? Tussen welke waarden moet de oplossing liggen?

Afsluitende opdracht B: Herleid de formule $N =\ ^3log(81 * 2)$ tot de vorm $N = p + q *^3log(x)$.

Verwachte oplossing van leerlingen

- Deze groep leerlingen heeft de kaartjes redelijk willekeurig bij elkaar gezocht, ze hadden niet echt een idee van hoe de opdracht aan te pakken.
- Deze leerlingen hebben als aanpak eerst de tweede en derde kolom bij elkaar gezocht en de eerste kolom gesorteerd. Vervolgens hebben ze gepuzzeld welke 2 kaartjes (kolom 2&3) bij de 'x= ' horen. Dit levert wel een goed overzicht op, niet per se het inzicht wat de log-functie oplevert. Dit moet in het klassengesprek besproken worden.



Aanwijzingen voor het klassengesprek

Set A

- Hoe kan je handig de rekenregels voor de machten onthouden, bijvoorbeeld met een getallenvoorbeeld?
- Waarom is het logisch dat $a^0 = 1$?
- Let met behulp van de rekenregel voor $\frac{a^p}{a^q} = a^{p-q}$ de rekenregel $a^{-p} = \frac{1}{a^p}$ uit.
- Besteed extra aandacht aan de rekenregels $a^{-p} = \frac{1}{a^p}$ en $a^{\frac{1}{q}} = \sqrt[q]{a}$, de meeste leerlingen vinden deze regels nog lastig.

Set B

- Wat reken je uit met een logaritme? (Op zoek naar de exponent).
- Leg de koppeling tussen logaritme en macht. Bespreek hierbij de notatie van log, in het bijzonder grondtal en exponent.
- Geef zelf nog een voorbeeld op het bord om te berekenen.
- Bespreek ook de uitbreidingsopdracht indien deze is gegeven.

Set C

- Bespreek de drie rekenregels voor logaritmen die in set C voorkomen:
    - Logaritmen optellen en aftrekken met gelijk grondtal;
    - Logaritmen vermenigvuldigen met een getal.
- De drie rekenregels voor logaritmen in set C abstract (laten) maken, want deze komen terug in set D:
    - ${}^g\log a + {}^g\log b = {}^g\log ab$

- $^{g}\log a - {}^{g}\log b = {}^{g}\log a/b$
- $^{g}\log ab = b * {}^{g}\log a$

Set D

- Bespreek de gevonden oplossingen en de 'werking' van de logaritme.
- Geef aan dat de regels 'beide kanten op' werken.

Reflectie

- Tien havo 5 leerlingen hebben de rekenregels al eens gehad in havo 4, maar dat was bij de meeste leerlingen weggezakt. Ze vonden het wel leuk om 'eens iets anders' te doen, voor de meeste verhelderend over wat de log-functie "ook alweer doet".
- Eén leerling gaf aan: "Oh maar nou begin ik het te begrijpen, bij die vorige toets die hierover ging snapte ik er helemaal niets van".
- De leerlingen die deze opdracht hebben gemaakt waren in eerste instantie bij de eerste set nog wat onzeker over wat ze moesten doen, bij de volgende sets konden ze wel beredeneren welke kaartjes bij elkaar hoorden en waarom.
- Tip 1: Als ze alle kaartjes in een keer krijgen – eerst op kleur laten selecteren
- Tip 2: Het kan handig(er) zijn om ze per set uit te delen en neer te laten leggen. Als ze een set goed hebben opgelost de losse kaartjes in te laten leveren en te vervangen door een print van de betreffende set. Dat kan schelen in het aantal kaartjes dat op de grond terecht komt (of kwijtraakt).
- Set C: er komt twee keer het antwoord zes uit. Is dit storend of nodigt dit juist uit om de notatie van de berekening beter te verkennen?
- Het knipwerk is kan tijdrovend zijn, zelfs bij een kleine klas van 14 leerlingen.
- Moeilijke opdrachten bij set D worden door de leerlingen zelf opgelost. De leerlingen hadden daarbij geen hulp (meer) nodig van de docent.
- Het is uiteraard mogelijk om zelf het aantal kaartjes aan te vullen of aan te passen, in onze klassen heeft deze set prima gewerkt.

Deze opdrachten zijn ontwikkeld binnen het IOL-project Probleemaanpak in de wiskundeles van de NVvW. Meer informatie en vragen vind je op:

www.nvvw.nl/lesmaterialen/probleemoplossen

CC BY SA

Antwoordblad set A *Herhalen rekenregels machten*

$a^p \cdot a^q$	a^{p+q}
$(a^p)^q$	$a^{p \cdot q}$
$(ab)^p$	$a^p \cdot b^p$
$\frac{a^p}{a^q}$	a^{p-q}
a^0	1
a^{-1}	$\frac{1}{a}$
a^{-p}	$\frac{1}{a^p}$
$a^{\frac{1}{2}}$	$\sqrt{a}$
$a^{\frac{p}{q}}$	$\sqrt[q]{a^p}$

Antwoordblad set B *Logaritmen ontdekken*

$x = -1$	$5^x = \frac{1}{5}$	$x = {}^5 log\ log\ (5^{-1})$
$x = 0$	$5^x = 1$	$x = {}^5 log\ log\ (1)$
$x = 1$	$3^x = 3$	$x = {}^3 log\ log\ (3)$
$x = 2$	$10^x = 10^2$	$x = log\ log\ (100)$
$x = 3$	$2^x = 8$	$x = {}^2 log\ log\ (2^3)$
$x = 4$	$3^x = 81$	$x = {}^3 log\ log\ (81)$
$x = 5$	$3^x = 3^5$	$x = {}^3 log\ log\ (3^5)$
$x = 6$	$10^x = 1.000.000$	$x = log\ log\ (10^6)$

Antwoordblad set C R*ekenregels logaritmen verkennen*

$x = 3 - 2$	$x = log\ log\ (10^3) - log\ log\ (10^2)$	$x = log\ log\ (10)$
$x = 3 - 1$	$x = {}^{3}log\ log\ (27) - {}^{3}log\ log\ (3)$	$x = {}^{3}log\ log\ (9)$
$x = 1 + 2$	$x = {}^{5}log\ log\ (5) + {}^{5}log\ log\ (25)$	$x = {}^{5}log\ log\ (125)$
$x = 2 + 2$	$x = log\ log\ (100) + log\ log\ (100)$	$x = log\ log\ (10.000)$
$x = 2 \times 4$	$x = 2 \cdot {}^{3}log\ log\ (81)$	$x = {}^{3}log\ log\ (81^2)$
$x = 6 \times 1$	$x = 6 \cdot {}^{3}log\ log\ (3)$	$x = {}^{3}log\ log\ (3^6)$
$x = 3 \times 2$	$x = 3 \cdot log\ log\ (100)$	$x = log\ log\ (1.000.000)$

Antwoordblad set D *Rekenregels logaritmen gebruiken*

$x = log(a) + log(b)$	$x = \ log(ab)$	$ab = 10^x$
$x = log(a^b)$	$x = b\ log(a)$	$a\ = 10^{\frac{x}{b}}$
$x = log\ log\ (a)\ - log(b)$	$x = log\ log\ \left(\frac{a}{b}\right)$	$a = b \cdot 10^x$
$x = \ 2log(6) + \ 2log(8)$	$x = \ 2log(48)$	$x = 5{,}58 \ldots$
$x = \ 2log(10^4)$	$x = 4 \cdot \ 2log(10)$	$x = 13{,}28 \ldots$
$x = log\ log\ (100)$ $- log(25)$	$x = log(4)$	$x = 0{,}602 \ldots$