Introductie productregel

Het probleem

We zoeken de afgeleide van het product van twee functies. Volg de volgende stappen:

1. Vul de tabel aan in regel drie en vier.
2. Splits het vijfde voorbeeld zelf op en vul de rest aan.
3. Verzin zelf een voorbeeld in de lege regel.
4. Formuleer je vermoeden van de algemene regel voor de afgeleide van het product van twee functies in woorden.

p(x) =	**f(x) ***	**g(x)**	**f'(x)**	**g'(x)**	**p'(x)**
$e^x \cdot (2x+3)$	e^x	$2x+3$	e^x	2	$(e^x)(2x+3)+(e^x)(2)$
$(x^3+4x)(x^2+6x)$	x^3+4x	x^2+6x	$3x^2$	$2x+6$	$(x^3+4x)(2x+6)+(x^2+6x)\ (3x^2)$
(x^5+8x)	x^5+8x				
$x^4 \cdot 2^{x+1}$	x^4				
$x^5 \cdot ln(x)$					
$f(x) \cdot g(x)$					

Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren

Doelgroep en onderwerp

Jaarlaag: 6 vwo – wiskunde A
Onderwerp: Productregel
Lesduur: 30 minuten
Benodigdheden: Pen & papier of whiteboard & markers
Werkwijze: Groepsopdracht
Voorkennis: Afgeleide van basisfuncties
Leerdoelen:

- De productregel voor differentiëren ontdekken: wat het wel en niet is
- Een patroon kunnen vinden in een tabel
- Herhalen van afgeleides voor $e^x, 2^x, \ln x$
- Gevoel krijgen voor een bewijs van de productregel

Werkwijze

Beschrijving van de werkvorm

De opdracht kan in tweetallen, maar het is leuker om groepjes van drie te maken voor meer discussie. Geef de leerlingen 5 minuten om het probleem te bespreken en de antwoorden op de vragen op te schrijven. Bespreek daarna de opdracht, en laat de leerlingen in een onderwijsleergesprek tot de productregel komen en het bewijzen daarvan in CV deel 2.

Mogelijke hints

- Vergelijk dit met de mogelijkheid dat $p'(x) = f'(x) \cdot g'(x)$.
- Analyseer de gevonden $p'(x)$, kun je een patroon vinden of een vermoeden formuleren?
- Laat nog een voorbeeld zien hoe het voor een opgave werkt.

Verwachte oplossing van leerlingen

- Foute oplossing: $p'(x) = f'(x) \cdot g'(x)$.
- Het patroon in de tabel zien dat $f(x) \cdot g(x) = p(x)$, en herkennen dat de afgeleiden $f'(x)$, $g'(x)$ en $p'(x)$ kloppen.
- Het patroon doorgronden en komen tot de productregel.
- Niet meer weten wat de afgeleide is van $e^x, 2^x, \ln x$.

Reflectie

De eerste keer deze les geven (alleen het probleem, zonder bewijs), werkte vrij goed. Er waren leerlingen die kwamen met de productregel. Er waren wel veel vraagtekens, waardoor discussie nodig is. In overleg met collega's is het probleem geschikt voor wiskunde A, maar het bewijs eigenlijk meer voor wiskunde B.

Aanwijzingen voor het klassengesprek

- Maak duidelijk dat $p'(x) = f'(x) \cdot g'(x)$ niet klopt. Wat zou wel kunnen kloppen?
- We testen de gevonden regel in situaties die we eenvoudig kunnen controleren. We nemen $p(x) = x^{13}$ en schrijven $p(x)$ als $p(x) = x^5 \cdot x^8$. Bereken nu de afgeleide met de gevonden regel en controleer de uitkomst door de afgeleide te nemen van $p(x) = x^{13}$. Ook bij een andere splitsing van x^{13} zullen we zien dat het klopt. Het klopt altijd. Om daar gevoel voor te krijgen kijken we naar de volgende situatie:

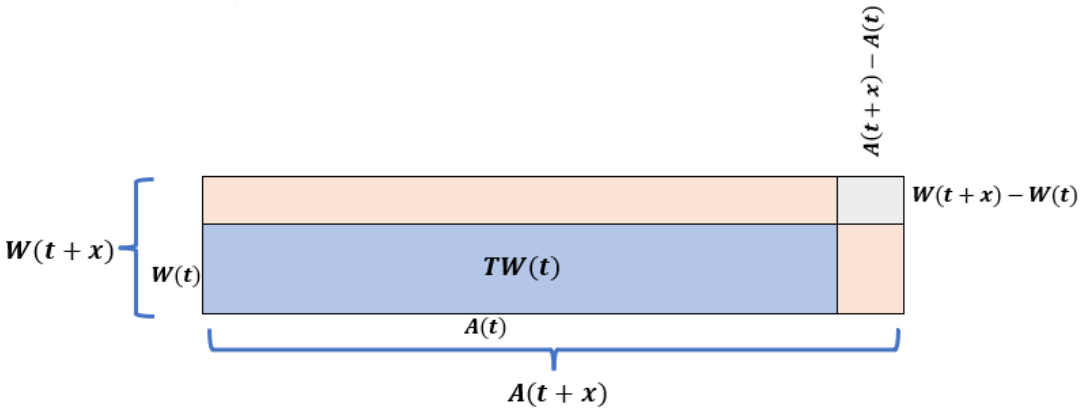
  In de wiskunde willen we dingen zeker weten, daarom gaan we op zoek naar een bewijs of onderbouwing van deze productregel. We gebruiken de volgende context in een onderwijsleergesprek (beschikbaar als extra werkblad aan het einde van dit document):

  We hebben een model bos, bestaande uit een aantal bomen A die allemaal dezelfde waarde W hebben. De totale waarde TW van het bos vinden we door het aantal met de waarde te vermenigvuldigen: $TW(t) = A(t) \cdot W(t)$. Het aantal en de waarde zijn afhankelijk van de tijd t in jaren. Dat wil zeggen dat het aantal en de waarde veranderen in de tijd. Stel dat op enig moment, zeg $t = 20$ geldt $A(20) = 200$ en $W(20) = 6{,}5$, en dat 2 jaar later, $t = 22$, geldt $A(22) = 210$ en $W(22) = 8$. De toename van TW tussen $t = 20$ en $t = 22$ kan natuurlijk berekend worden door $TW(22) - TW(20)$ te berekenen, maar (en dat brengt ons verder) kan ook benaderd worden met $200 \cdot 1{,}5 + 6{,}5 \cdot 10$.
  - Leg uit dat dit een redelijke benadering is van de toename van TW tussen $t = 20$ en $t = 22$.

  Nu geven we een redenering die laat zien dat de gevonden regel voor berekening van $p'(x)$ klopt. We gebruiken de situatie van het bos.
  - Controleer iedere stap in de redenering en geef een onderbouwing (dat is, leg uit waarom de stap klopt).

Stap	Uitleg / onderbouwing
De gemiddelde toename per jaar tussen $t = 20$ en $t = 22$ is gelijk aan $\frac{200 \cdot 1{,}5}{2} + \frac{6{,}5 \cdot 10}{2}$	
I.h.a. geldt dat de gemiddelde toename tussen t en $t + x$ gelijk is aan: $\frac{A(t) \cdot (W(t+x) - W(t))}{x} + \frac{W(x) \cdot (A(t+x) - A(t))}{x}$	
Als x nadert naar 0 dan $TW'(t) = A(t) \cdot W' + A'(t) \cdot W(t)$	

- Maak een tekening op het bord voor de bespreking van het bewijs: een rechthoek met oppervlakte $TW(t)$ en zijden $A(t)$ en $W(t)$, wat er gebeurt als t toeneemt met x. Wat wordt $TW(t+x)$ dan? Geef aan waar de toename zit



- De les eindigt met de vraag: wat neem je mee, dat je over 3 weken nog moet weten?

Deze opdrachten zijn ontwikkeld binnen het IOL-project Probleemaanpak in de wiskundeles van de NVvW. Meer informatie en vragen vind je op:

www.nvvw.nl/lesmaterialen/probleemoplossen

CC BY SA

Extra werkblad – bewijs van de productregel

a. Leg uit dat $200 \cdot 1{,}5 + 6{,}5 \cdot 10$ een redelijke benadering is van de toename van TW tussen $t = 20$ en $t = 22$.

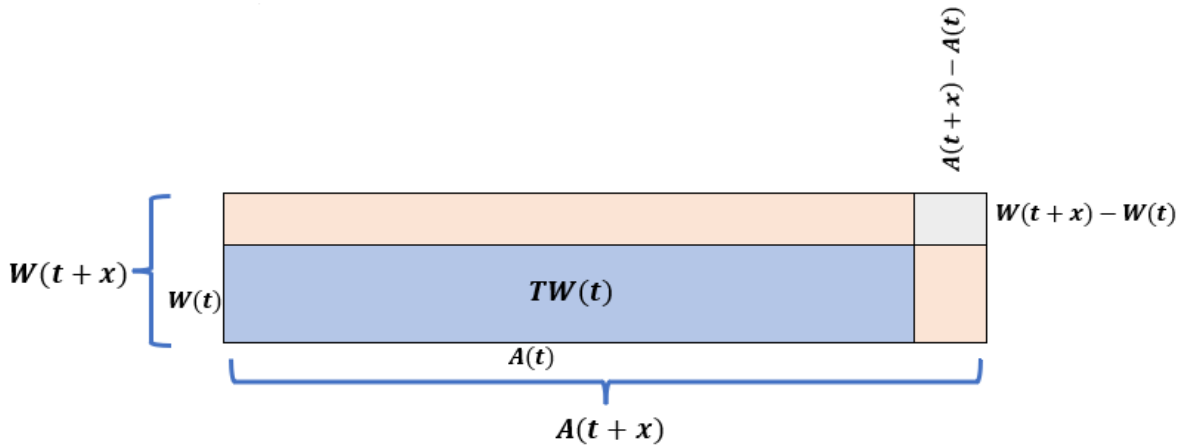
_____

_____

_____

a.

Stap	Uitleg / onderbouwing
De gemiddelde toename per jaar tussen $t = 20$ en $t = 22$ is gelijk aan $\frac{200 \cdot 1{,}5}{2} + \frac{6{,}5 \cdot 10}{2}$	
I.h.a. geldt dat de gemiddelde toename tussen t en $t + x$ gelijk is aan: $\frac{A(t) \cdot (W(t+x) - W(t))}{x} + \frac{W(x) \cdot (A(t+x) - A(t))}{x}$	
Als x nadert naar 0 dan $TW'(t) = A(t) \cdot W' + A'(t) \cdot W(t)$	



Wat neem je mee, dat je nog moet weten over drie weken?

b. _____

_____

_____