



Het Bazel-probleem van Euler

Paul Levrie

3 Oktober 2026, Utrecht



Het doornemen van Eulers
complete oeuvre is en blijft
de allerbeste leerschool
voor de wiskunde.



Carl Friedrich Gauss 1849

Leonhard Euler

Euleralgebra, Eulerhoek, Eulerassen, Eulerbalk, Eulercyclus, Eulerdiagram, Euler differentiaalvergelijking, Eulerconstante, identiteit van Euler, Eulerlijn, Euler-Mascheroni constante, getal van Euler, Eulerpolynomen, veelvlakformule van Euler, Eulerproduct, rotatievergelijkingen van Euler, Eulerspiraal, Eulersubstitutie, Eulersom, Eulertransformatie, Eulerkenmerk, Eulerfunctie, Eulerpad, Eulerkring, Eulerhoeken, Eulervergelijkingen van de stromingsleer, Euler-Lagrangevergelijking, Euler-Maclaurinformule, Euler-Cauchyvergelijking, Euler-Bernoullivergelijking, Euler-Poissonvergelijking, Euler-Poincaré-karakteristiek, Euler-Riemann zètafunctie, de gammafunctie van Euler, Eulergetallen, Eulerintegralen, Eulerse somformule, Eulerse raaklijngetallen (tangent numbers), Eulerse zigzaggetallen, Eulerbalk, Eulerdriehoek, Eulercirkel, Eulerkoorde, Eulerraaklijn, Eulerkegel, Eulerse kritische knikbelasting, methode van Euler voor het numeriek oplossen van een eerste orde differentiaalvergelijking,...

Leonhard Euler

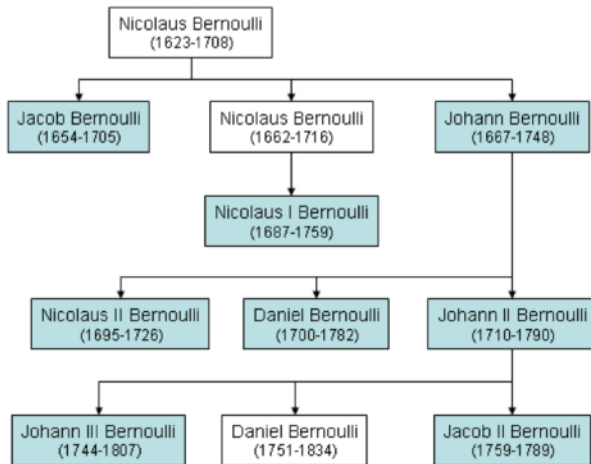


Leonhard Euler



Geboren in Bazel in 1707.
Zoon van predikant Paul Euler en
Margarete Brucker.
Twee zussen.
Paul Euler was vriend van de familie
Bernoulli.

Leonhard Euler



1707.

t Paul Euler en

d van de familie

Leonhard Euler



Geboren in Bazel in 1707.
Zoon van predikant Paul Euler en
Margarete Brucker.
Twee zussen.

Paul Euler was vriend van de familie
Bernoulli.

13 jaar → filosofie Univ. Bazel.
15 jaar → theologie Univ. Bazel.
Mocht vragen stellen aan Johann
Bernoulli.

Leonhard Euler

Plaatsen waar hij langere
tijd verbleef
(1707–1783)

1 Bazel, Zwitserland 1707–1727

- Geboren in Bazel op 15 april 1707.
- Studeerde aan de Universiteit van Bazel.

2 Sint-Petersburg, Rusland 1727–1741

- Uitgenodigd door de Russische Academie van Wetenschappen.
- Eerste grote periode van wetenschappelijk onderzoek.

3 Berlijn, Pruisen 1741–1766

- Uitgenodigd door Frederik de Grote.
- Werkte aan de Pruisische Academie van Wetenschappen.
- Een van zijn meest productieve periodes.

4 Sint-Petersburg, Rusland 1766–1783

- Keerde terug naar de Russische Academie van Wetenschappen.
- Bleef er werken tot zijn overlijden op 18 september 1783.





65000. 2. 2.
Mange &endant
1^e Edition
(L'édit. parut à Paris en 1764 Vol II)

Vol 21
Printing & binding of man.
no 341

38.000 X 1245 45.930 SEF
6 June 1998

Qu 21595

Vocabulaire
INTRODUCTIO
22 Diffinitiones
IN ANALYSIN
INFINITORUM.

AUCTORE

LEONHARDO EULERO,
Professore Regio BEROLINENSI, & Academia Im-
perialis Scientiarum PETROPOLITANÆ
Socio.

TOMUS PRIMUS



LAUSANNÆ,

Apud MARCUM-MICHAELUM BOUSQUET & Socios.

MDCCLXVIII



INTRODUCTIO IN ANALYSIN INFINITORUM.

AUCTORE

LEONHARDO EULERO,

*Professore Regio BEROLINENSI, & Academia Im-
perialis Scientiarum PETROPOLITANA
Socio.*

TOMUS SECUNDUS.



LAUSANNAE,

Apud MARCUM-MICHAELEM BOUSQUET & Socios.

MDCCXLVIII



ILLUSTRISSIMO VIRO
JOHANNI JACOBO
DORTOUS DE MAIRAN,
UNI EX XLVIRIS
ACADEMIÆ GALLICÆ,
REGIÆ ETIAM SCIENTIARUM
PARISIENSIS,
IN QUÆ SECRETARIJ PERPETUI MUNUS NUPER
ADDICAVIT.

NEC

INDEX CAPITUM

TOMI PRIMI.

CAP. I. De Functionibus in genere,	1
CAP. II. De transformatione Functionum, <i>Chas. Peirce</i>	15
CAP. III. De transformatione Functionum per substitutionem,	36
CAP. IV. De transformatione Functionum per series infinitas,	46
CAP. V. De Functionibus duarum plurimumve variabilium,	60
CAP. VI. De Quantitatibus exponentialibus ac Logarithmicis,	69
CAP. VII. De quantitatibus exponentialibus ac Logarithmicis per series, <i>explicatione</i> , <i>Chas. Peirce</i>	85
CAP. VIII. De quantitatibus transcendentibus ex Circulo ortis,	93
CAP. IX. De investigatione Factorum trinomialium, <i>Chas. Peirce</i>	107
CAP. X. De usu Factorum inventorum in definiendis summis Serierum infinitarum,	128
CAP. XI. De aliis Arcuum acque Sinuum expressionibus infinitis,	145
CAP. XII. De reali Functionum graduum evolutione,	161
CAP. XIII. De Serierum recurrentibus, <i>Chas. Peirce</i>	175
CAP. XIV. De multiplicatione ac divisione Angularum,	198
CAP. XV. De Serierum evolutione Factorum ortis,	221
CAP. XVI. De Partitione numerorum,	243
CAP. XVII. De usu Serierum recurrentium in radicibus equationum, <i>Chas. Peirce</i>	276
CAP. XVIII. De fractionibus continuis, <i>Chas. Peirce</i>	295

INDEX

INDEX CAPITUM

TOMI SECUNDI.

CAP. I. De lineis curvis in genere, <i>Chas. Peirce</i>	3
CAP. II. De Coordinatarum permutatione, <i>Chas. Peirce</i>	12
CAP. III. De Linearum curvarum algebraicarum in ordines divisione, <i>Chas. Peirce</i>	23
CAP. IV. De Linearum cuiusque ordinis principis proprietatibus, <i>Chas. Peirce</i>	32
CAP. V. De Lineis secundi Ordinis, <i>Chas. Peirce</i>	41
CAP. VI. De Linearum secundi ordinis subdivisione in genera, <i>Chas. Peirce</i>	65
CAP. VII. De ramorum in infinitum excurrentium investigatione,	83
CAP. VIII. De Lineis Asymptoticis, <i>Chas. Peirce</i>	99
CAP. IX. De Linearum tertii ordinis subdivisione in species, <i>Chas. Peirce</i>	114
CAP. X. De principis Linearum tertii ordinis proprietatibus,	127
CAP. XI. De Lineis quarti ordinis, <i>Chas. Peirce</i>	139
CAP. XII. De investigatione figure Linearum Curvarum, <i>Chas. Peirce</i>	150
CAP. XIII. De Affectionibus Linearum Curvarum, <i>Chas. Peirce</i>	156
CAP. XIV. De curvatura Linearum Curvarum, <i>Chas. Peirce</i>	166
CAP. XV. De Curvis una pluralive Diametris preditis, <i>Chas. Peirce</i>	181
CAP. XVI. De inventione Curvarum ex datis Applicatarum proprietatibus, <i>Chas. Peirce</i>	194
CAP. XVII. De inventione Curvarum ex aliis proprietatibus, <i>Chas. Peirce</i>	212
CAP. XVIII. De Similitudine & Affinitate Linearum curvarum, <i>Chas. Peirce</i>	236
CAP. XIX. De intersectione Curvarum, <i>Chas. Peirce</i>	247
CAP. XX. De Constructione aequationum, <i>Chas. Peirce</i>	269
CAP. XXI. De Lineis curvis transcendentibus, <i>Chas. Peirce</i>	284
CAP. XXII. Solutio nonnullorum Problematum ad Circulum pertinentium, <i>Chas. Peirce</i>	304

INDEX

APPEN-

APPENDIX. XVI

CAR. I. De Superficiebus Corporum in genere,	pag. 323
CAR. II. De Sectionibus Superficierum a planis quibuscunque factis,	337
CAR. III. De Sectionibus Cylindri, Coni & Globi,	348
CAR. IV. De Immutatione Coordinatarum,	365
CAR. V. De Superficiebus secundæ ordinis,	373
CAR. VI. De Superficierum intersectione mutua,	388



INTRO.

INTRODUCTIO

IN

ANALYSIN INFINITORUM

LIBER PRIMUS,

Continens :

Explicationem de Functionibus quantitatum variabilium; earum resolutione in Factores, atque evolutione per Series infinitas: una cum doctrina de Logarithmis, Arcubus circularibus, eorumque Sinubus & Tangentibus; pluribusque aliis rebus, quibus Analysis infinitorum non mediocriter adjuvatur.

Euleri Introduct. in Anal. infra.

A

$$\text{LIT. I. } \frac{\text{fin. } (g+v)}{\text{fin. } \frac{1}{2}g} = \text{cof. } \frac{1}{2}v + \text{est. } \frac{1}{2}g \cdot \text{fin. } \frac{1}{2}v = \\ (1 + \frac{v}{g})(1 - \frac{v}{2g})(1 + \frac{v}{2g})(1 - \frac{v}{4g}) \&c.$$

Quorum Factorum lex progressionis fuit est simplex & uniformis; atque ex his expressionibus per multiplicationem oriuntur ex ipsis, quæ §. præcedente sunt inventæ.

CAPUT X.

De usu Factorum inventorum in definiendis
summæ Serierum infinitarum.

165. SI fuerit $1 + Aa + Ba^2 + Ca^3 + Da^4 + \&c.$ hi Factores, siue sint numero finiti siue infiniti, si in se acta multiplicentur, illam expressionem $1 + Aa + Ba^2 + Ca^3 + Da^4 + \&c.$, producere debent. Aequabitur ergo coefficienti A summæ omnium quantitarum $a + a^2 + a^3 + a^4 + \&c.$ Coefficienti vero B æqualis erit summæ productorum ex binis, eritque $B = a^2 + a^2 + a^2 + a^2 + a^2 + \&c.$ Tum vero coefficienti C æquabitur summæ productorum ex ternis, nempe erit $C = a^3 + a^3 + a^3 + a^3 + a^3 + \&c.$ Atque ita porro erit $D =$ summæ productorum ex quaternis, $E =$ summæ productorum ex quinis, &c., id quod ex Algebra communi constat.

166. Quia summa quantitarum $a + a^2 + a^3 + a^4 + \&c.$, datur una cum summa productorum ex binis, hinc summa Quadratorum $a^2 + a^2 + a^2 + a^2 + \&c.$, inveniri poterit, quippe quæ æqualis est Quadrato summæ demtis duplicibus productis ex binis. Simili modo summa Cuborum, Biquadratorum & aliorum Potestatum definiiri poterit: si enim ponamus

P =

$$\begin{aligned} P &= a + C + \gamma + \delta + \epsilon + \&c. \\ Q &= a^2 + C^2 + \gamma^2 + \delta^2 + \epsilon^2 + \&c. \\ R &= a^3 + C^3 + \gamma^3 + \delta^3 + \epsilon^3 + \&c. \\ S &= a^4 + C^4 + \gamma^4 + \delta^4 + \epsilon^4 + \&c. \\ T &= a^5 + C^5 + \gamma^5 + \delta^5 + \epsilon^5 + \&c. \\ V &= a^6 + C^6 + \gamma^6 + \delta^6 + \epsilon^6 + \&c. \\ &\&c. \end{aligned}$$

Valores P, Q, R, S, T, V &c. sequenti modo ex cognitis $A, B, C, D, \&c.$, determinabuntur.

$$\begin{aligned} P &= A \\ Q &= AP - 2B \\ R &= AQ - BP + 3C \\ S &= AR - BQ + CP - 4D \\ T &= AS - BR + CQ - DP + 5E \\ V &= AT - BS + CR - DQ + EP - 6F \\ &\&c. \end{aligned}$$

quarum formularum veritas examine instituto facile agnoscitur: interim tamen in calculo differentiali summo cum rigore demonstrabitur.

167. Cum igitur supra (§. 156.) invenimus esse: $\frac{x^x - e^{-x}}{2} = x(1 + \frac{x}{1.2.3} + \frac{x^2}{1.2.3.4.5} + \frac{x^3}{1.2.3.4.5.6} + \&c.) =$
 $x(1 + \frac{x}{\pi}) (1 + \frac{x}{4\pi}) (1 + \frac{x}{9\pi}) (1 + \frac{x}{16\pi})$
 $(1 + \frac{x}{25\pi}) \&c.$, erit $1 + \frac{x}{1.2.3} + \frac{x^2}{1.2.3.4.5} + \frac{x^3}{1.2.3.4.5.6} +$
 $\&c. = (1 + \frac{x}{\pi})(1 + \frac{x}{4\pi})(1 + \frac{x}{9\pi})(1 + \frac{x}{16\pi}) \&c.$
Ponatur $x = \pi z$, eritque $1 + \frac{\pi z}{1.2.3} + \frac{\pi^2 z^2}{1.2.3.4.5} + \frac{\pi^3 z^3}{1.2.3.4.5.6} + \&c. = (1 + z)(1 + \frac{1}{4}z)(1 + \frac{1}{9}z)(1 + \frac{1}{16}z) \&c.$
Euleri Introd. in Anal. infin. parv.

R (1 +

LIE L $(1 + \frac{1}{2^1})$ &c.. Fada ergo applicatione superioris regulæ ad hunc casum, erit $A = \frac{\pi^2}{6}$; $B = \frac{\pi^4}{120}$; $C = \frac{\pi^6}{5040}$; $D = \frac{\pi^8}{362880}$ &c.. Quod si ergo ponatur

$$P = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \frac{1}{25} + \frac{1}{36} + \&c.$$

$$Q = 1 + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{9^2} + \frac{1}{16^2} + \frac{1}{25^2} + \frac{1}{36^2} + \&c.$$

$$R = 1 + \frac{1}{4^3} + \frac{1}{9^3} + \frac{1}{16^3} + \frac{1}{25^3} + \frac{1}{36^3} + \&c.$$

$$S = 1 + \frac{1}{4^4} + \frac{1}{9^4} + \frac{1}{16^4} + \frac{1}{25^4} + \frac{1}{36^4} + \&c.$$

$$T = 1 + \frac{1}{4^5} + \frac{1}{9^5} + \frac{1}{16^5} + \frac{1}{25^5} + \frac{1}{36^5} + \&c.$$

atque harum litterarum valores ex A , B , C , D , &c. determinentur, prodibit.

$$P = \frac{\pi^2}{6}$$

$$Q = \frac{\pi^4}{90}$$

$$R = \frac{\pi^6}{945}$$

$$S = \frac{\pi^8}{9450}$$

$$T = \frac{\pi^{10}}{93555}$$

$$\&c.$$

168. Patet ergo omnium Serierum infinitarum in hac forma generali $1 + \frac{1}{a^n} + \frac{1}{b^n} + \frac{1}{c^n} + \&c.$, contentarum, quoties

n fuerit numerus par, ope Peripheriæ Circuli π exhiberi posse; habebit enim semper summa Seriei ad π^n rationem rationalem.

lem. Quo autem valor harum summarum clarius perspicua CANTON. tur, plures huiusmodi Serierum summas commodiori modo expellat hic adijciam.

$$1 + \frac{1}{2^1} + \frac{1}{3^1} + \frac{1}{4^1} + \frac{1}{5^1} + \&c. = \frac{2^2 \cdot 3 \cdot 5}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} \pi^1$$

$$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} + \&c. = \frac{2^4 \cdot 3 \cdot 5}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} \pi^2$$

$$1 + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{4^3} + \frac{1}{5^3} + \&c. = \frac{2^6 \cdot 3 \cdot 5}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} \pi^3$$

$$1 + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{4^4} + \frac{1}{5^4} + \&c. = \frac{2^8 \cdot 3 \cdot 5}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} \pi^4$$

$$1 + \frac{1}{2^5} + \frac{1}{3^5} + \frac{1}{4^5} + \frac{1}{5^5} + \&c. = \frac{2^{10} \cdot 3 \cdot 5}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} \pi^5$$

$$1 + \frac{1}{2^6} + \frac{1}{3^6} + \frac{1}{4^6} + \frac{1}{5^6} + \&c. = \frac{2^{12} \cdot 3 \cdot 5}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} \pi^6$$

$$1 + \frac{1}{2^7} + \frac{1}{3^7} + \frac{1}{4^7} + \frac{1}{5^7} + \&c. = \frac{2^{14} \cdot 3 \cdot 5}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} \pi^7$$

$$1 + \frac{1}{2^8} + \frac{1}{3^8} + \frac{1}{4^8} + \frac{1}{5^8} + \&c. = \frac{2^{16} \cdot 3 \cdot 5}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} \pi^8$$

$$1 + \frac{1}{2^9} + \frac{1}{3^9} + \frac{1}{4^9} + \frac{1}{5^9} + \&c. = \frac{2^{18} \cdot 3 \cdot 5}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} \pi^9$$

$$1 + \frac{1}{2^{10}} + \frac{1}{3^{10}} + \frac{1}{4^{10}} + \frac{1}{5^{10}} + \&c. = \frac{2^{20} \cdot 3 \cdot 5}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} \pi^{10}$$

$$1 + \frac{1}{2^{11}} + \frac{1}{3^{11}} + \frac{1}{4^{11}} + \frac{1}{5^{11}} + \&c. = \frac{2^{22} \cdot 3 \cdot 5}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} \pi^{11}$$

$$1 + \frac{1}{2^{12}} + \frac{1}{3^{12}} + \frac{1}{4^{12}} + \frac{1}{5^{12}} + \&c. = \frac{2^{24} \cdot 3 \cdot 5}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} \pi^{12}$$

$$1 + \frac{1}{2^{13}} + \frac{1}{3^{13}} + \frac{1}{4^{13}} + \frac{1}{5^{13}} + \&c. = \frac{2^{26} \cdot 3 \cdot 5}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} \pi^{13}$$

$$1 + \frac{1}{2^{14}} + \frac{1}{3^{14}} + \frac{1}{4^{14}} + \frac{1}{5^{14}} + \&c. = \frac{2^{28} \cdot 3 \cdot 5}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} \pi^{14}$$

$$1 + \frac{1}{2^{15}} + \frac{1}{3^{15}} + \frac{1}{4^{15}} + \frac{1}{5^{15}} + \&c. = \frac{2^{30} \cdot 3 \cdot 5}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} \pi^{15}$$

$$1 + \frac{1}{2^{16}} + \frac{1}{3^{16}} + \frac{1}{4^{16}} + \frac{1}{5^{16}} + \&c. = \frac{2^{32} \cdot 3 \cdot 5}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} \pi^{16}$$

$$1 + \frac{1}{2^{17}} + \frac{1}{3^{17}} + \frac{1}{4^{17}} + \frac{1}{5^{17}} + \&c. = \frac{2^{34} \cdot 3 \cdot 5}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} \pi^{17}$$

$$1 + \frac{1}{2^{18}} + \frac{1}{3^{18}} + \frac{1}{4^{18}} + \frac{1}{5^{18}} + \&c. = \frac{2^{36} \cdot 3 \cdot 5}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} \pi^{18}$$

$$1 + \frac{1}{2^{19}} + \frac{1}{3^{19}} + \frac{1}{4^{19}} + \frac{1}{5^{19}} + \&c. = \frac{2^{38} \cdot 3 \cdot 5}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} \pi^{19}$$

$$1 + \frac{1}{2^{20}} + \frac{1}{3^{20}} + \frac{1}{4^{20}} + \frac{1}{5^{20}} + \&c. = \frac{2^{40} \cdot 3 \cdot 5}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} \pi^{20}$$

$$1 + \frac{1}{2^{21}} + \frac{1}{3^{21}} + \frac{1}{4^{21}} + \frac{1}{5^{21}} + \&c. = \frac{2^{42} \cdot 3 \cdot 5}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} \pi^{21}$$

$$1 + \frac{1}{2^{22}} + \frac{1}{3^{22}} + \frac{1}{4^{22}} + \frac{1}{5^{22}} + \&c. = \frac{2^{44} \cdot 3 \cdot 5}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} \pi^{22}$$

$$1 + \frac{1}{2^{23}} + \frac{1}{3^{23}} + \frac{1}{4^{23}} + \frac{1}{5^{23}} + \&c. = \frac{2^{46} \cdot 3 \cdot 5}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} \pi^{23}$$

$$1 + \frac{1}{2^{24}} + \frac{1}{3^{24}} + \frac{1}{4^{24}} + \frac{1}{5^{24}} + \&c. = \frac{2^{48} \cdot 3 \cdot 5}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} \pi^{24}$$

$$\text{LIII. I. } \cos \frac{m\pi}{2n} = \left(\frac{n-m}{n} \right) \left(\frac{n+m}{n} \right) \left(\frac{3n-m}{3n} \right) \left(\frac{3n+m}{3n} \right) \left(\frac{5n-m}{5n} \right) \left(\frac{5n+m}{5n} \right) \&c.$$

Ponatur $n = m$ loco m , quia est $\sin \frac{(n-m)\pi}{2n} = \cos \frac{m\pi}{2n}$ &c.

$$\cos \frac{(n-m)\pi}{2n} = \sin \frac{m\pi}{2n}, \text{ provenient hae expressiones.}$$

$$\cos \frac{m\pi}{2n} = \left(\frac{n-m}{2n} \right) \left(\frac{n+m}{2n} \right) \left(\frac{3n-m}{2n} \right) \left(\frac{3n+m}{2n} \right) \left(\frac{5n-m}{4n} \right) \left(\frac{5n+m}{4n} \right) \&c.$$

$$\sin \frac{m\pi}{2n} = \frac{m}{n} \left(\frac{2n-m}{n} \right) \left(\frac{2n+m}{3n} \right) \left(\frac{4n-m}{3n} \right) \left(\frac{4n+m}{5n} \right) \left(\frac{6n-m}{5n} \right) \&c.$$

185. Cum igitur pro Sinu & Cosinu Anguli $\frac{m\pi}{2n}$ binæ habeantur expressiones, si ex inter se comparentur dividendo,

$$\text{erit } t = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{5}{4} \cdot \frac{7}{4} \cdot \frac{9}{6} \cdot \frac{7}{6} \cdot \frac{9}{8} \cdot \frac{7}{8} \cdot \frac{9}{8} \&c.,$$

$$\text{ideoque } \frac{\pi}{2} = 1 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 9 \cdot 11 \cdot 11 \cdot 13 \&c., \text{ quæ est}$$

expressio pro Peripheria Circuli, quam WALLISIUS invenit in *Arithmetica infinitarum*. Similes autem huic innumeras expressiones exhibere licet ope primæ expressionis pro Sinu; ex ea enim deducitur fore:

$$\frac{\pi}{2} = \frac{m}{n} \sin \frac{m\pi}{2n} \left(\frac{2n}{2n-m} \right) \left(\frac{2n}{2n+m} \right) \left(\frac{4n}{4n-m} \right) \left(\frac{4n}{4n+m} \right) \left(\frac{6n}{6n-m} \right) \left(\frac{6n}{6n+m} \right) \&c.,$$

quæ, posito $\frac{m}{n} = 1$, præbet illam ipsam WALLISII formulam.

Sit

$$\text{Sic ergo } \frac{m}{n} = \frac{1}{2}, \text{ ob } \sin \frac{1}{2} \pi = \frac{1}{\sqrt{2}}, \text{ erit}$$

$$\frac{\pi}{2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{8}{7} \cdot \frac{12}{9} \cdot \frac{12}{11} \cdot \frac{16}{13} \cdot \frac{16}{15} \&c.$$

$$\text{Sit } \frac{m}{n} = \frac{1}{3}, \text{ ob } \sin \frac{1}{3} \pi = \frac{1}{2}, \text{ erit}$$

$$\frac{\pi}{2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{6}{5} \cdot \frac{6}{7} \cdot \frac{12}{11} \cdot \frac{12}{13} \cdot \frac{18}{17} \cdot \frac{18}{19} \cdot \frac{24}{23} \&c.$$

$$\text{Quod si Expressio Wallisiana dividatur per illam ubi } \frac{m}{n} = \frac{1}{2},$$

$$\text{erit } \sqrt{2} = \frac{2 \cdot 2 \cdot 6 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 14 \cdot 14 \cdot 18}{3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 15 \cdot 17 \cdot 19} \&c.$$

186. Quoniam Tangens cujusque Anguli æquatur Sinui per Cosinum diviso, Tangens quoque per hujusmodi Factores infinitis exprimi poterit. Quod si autem prima Sinus expressio dividatur per alteram Cosinus expressionem, erit

$$\text{tang. } \frac{m\pi}{2n} = \frac{n}{m} \left(\frac{2n-m}{n} \right) \left(\frac{2n+m}{3n} \right) \left(\frac{4n-m}{3n} \right) \left(\frac{4n+m}{5n} \right) \left(\frac{6n-m}{5n} \right) \left(\frac{6n+m}{7n} \right) \&c.$$

$$\text{erit } \frac{m\pi}{2n} = \frac{n-m}{n} \left(\frac{n+m}{3n-m} \right) \left(\frac{3n-m}{2n+m} \right) \left(\frac{3n+m}{4n-m} \right) \left(\frac{5n-m}{4n+m} \right) \&c.$$

Simili modo autem Secantes & Cosecantes exprimentur

$$\text{sec. } \frac{m\pi}{2n} = \left(\frac{n}{n-m} \right) \left(\frac{n}{n+m} \right) \left(\frac{3n}{3n-m} \right) \left(\frac{3n}{3n+m} \right) \left(\frac{5n}{5n-m} \right) \left(\frac{5n}{5n+m} \right) \&c.$$

$$\text{cosec. } \frac{m\pi}{2n} = \frac{n}{m} \left(\frac{n}{2n-m} \right) \left(\frac{n}{2n+m} \right) \left(\frac{3n}{4n-m} \right) \left(\frac{3n}{4n+m} \right) \left(\frac{5n}{6n-m} \right) \left(\frac{5n}{6n+m} \right) \&c.$$

Sin autem alteræ Sinuum & Cosinuum formulæ combinentur, erit

T

tang.

1 pasture (mange).

1 pasture for grain (at a site for
von Sombelgen - T. 2)

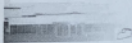
1 pasture 1.275

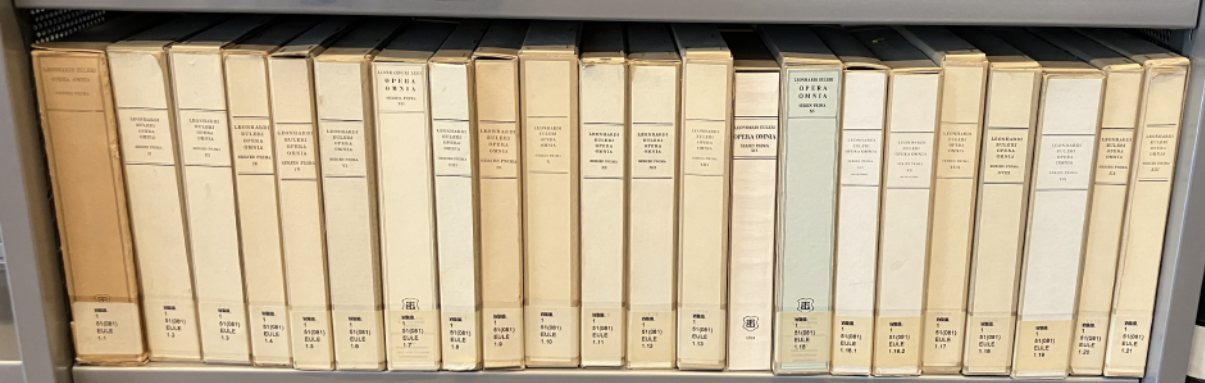
40 pasture for grain, how wide
distant



Campusliberach, Treuburg
The bookplate and the library of the university
of

Ludo Holms
Campus Librarian CBA





LEONHARDI
EULERI
OPERA
OMNIA

SERIES PRIMA
XXI

WBIB.
1
51(081)
EULE
1.21

LEONHARDI EULERI OPERA OMNIA
SUB AUSPICIIS SOCIETATIS SCIENTIARUM NATURALIUM HELVETICAE

EDIDIT
FERDINAND RUDIG - ADOLF KRAZER - PAUL STACKEL

SERIES I - OPERA MATHEMATICA - VOLUMEN XXI

LEONHARDI EULERI
COMMENTATIONES ANALYTICAE

AD THEORIAM INTEGRALIUM
ELLIPTICORUM PERTINENTES

EDIDIT
ADOLF KRAZER

VOLUMEN POSTERIUS

LIPSIÆ ET BEROLINI
TYPE ET IN AEDIBUS R. G. TEUBNERI
MCMXII

Consequenter fit

$$CN - AM = \frac{\pi a \sqrt{m}}{4} \left(1 + \frac{1 \cdot 1}{2 \cdot 4} m + \frac{1 \cdot 1}{2 \cdot 4} \frac{3 \cdot 3}{4 \cdot 6} m^2 + \frac{1 \cdot 1}{2 \cdot 4} \frac{3 \cdot 3}{4 \cdot 6} \frac{5 \cdot 5}{6 \cdot 8} m^3 + \text{etc.} \right).$$

Hic notandum, si fuerit $m = 1$, fore $CN - AM = a \sqrt{m} \int \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - m \sin^2 \varphi}}$, ut fieri debeat $CN - AM = a$, unde sequitur fore

$$1 = \frac{\pi}{4} \left(1 + \frac{1 \cdot 1}{2 \cdot 4} + \frac{1 \cdot 1}{2 \cdot 4} \frac{3 \cdot 3}{4 \cdot 6} + \text{etc.} \right)$$

ideoque haec series $= \frac{\pi}{4}$. Alter casus, quo $m = 0$ et $\pi = 0$, manifesto prodit $CN - AM = 0$.

II. Modus. Ponatur $u = \sin \varphi$, ita ut integrari oporteat a $q = 0$ usque ad $q = \frac{\pi}{2}$, et habebimus

$$CN - AM = a \sqrt{m} \int \frac{d\varphi \cos \varphi^2}{\sqrt{(1 - m \sin^2 \varphi)^3}} = \frac{a \sqrt{m}}{\sqrt{(1 - 2m)^3}} \int \frac{d\varphi (1 + \cos 2\varphi)}{\sqrt{1 + \frac{m}{1 - 2m} \cos 2\varphi}}.$$

Sit nunc brevitatis gratia $\frac{m}{1 - 2m} = k = \frac{mn}{1 + mn}$ et

$$CN - AM = a \sqrt{\frac{1}{2}} k \int \frac{d\varphi (1 + \cos 2\varphi)}{\sqrt{1 + k \cos 2\varphi}}.$$

Iam vero est

$$(1 + k \cos 2\varphi)^{-\frac{1}{2}} = 1 - \frac{1}{2} k \cos 2\varphi + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} k^2 \cos^2 2\varphi - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} k^3 \cos^3 2\varphi + \text{etc.}$$

Porro notetur esse

$$\cos 2\varphi^2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 4\varphi,$$

$$\cos 2\varphi^3 = \frac{3}{4} \cos 2\varphi + \frac{1}{4} \cos 6\varphi,$$

$$\cos 2\varphi^4 = \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} + \frac{1}{2} \cos 4\varphi + \frac{3}{8} \cos 8\varphi,$$

$$\cos 2\varphi^5 = \frac{5}{8} \cos 2\varphi + \frac{5}{16} \cos 6\varphi + \frac{1}{16} \cos 10\varphi,$$

$$\cos 2\varphi^6 = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} + \text{etc.},$$

$$\cos 2\varphi^7 = 2 \cdot \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8} \cos 2\varphi + \text{etc.},$$

$$\cos 2\varphi^8 = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8} + \text{etc.}$$

que mihi facta est contra meam methodum ex serie $0 = 5 - \frac{5^2}{6} + \frac{5^5}{120} - \text{et}$
 petitam, quam etsi statim praevideram, tamen aliter initio tueri non potui,
 nisi mon. vando, summas hae rra irventas cum summis, quas vari approxim,
 di modi superditant, apponere convenire. Omnino autem cuncte objectiones tolli
 mihi videbantur, si demonstrari posset aequationem infinitam $0 = 5 - \frac{5^2}{6} + \frac{5^5}{120}$
 - et. alias radices in se non comprehendi, nisi quas natura circuli indicaret.

Quod si enim fuerit $5 - \frac{5^2}{6} + \frac{5^5}{120} - \text{et.} = 5(1 - \frac{55}{\pi\pi})(1 - \frac{55}{4\pi\pi})(1 - \frac{55}{9\pi\pi}) - \text{et.}$
 seu $1 - \frac{55}{6} + \frac{5^4}{120} - \text{et.} = (1 - \frac{55}{\pi\pi})(1 - \frac{55}{4\pi\pi})(1 - \frac{55}{9\pi\pi}) - \text{et.}$ certe coefficienti
 secundi termini $-\frac{1}{6}$ aequalis esse debet summa coefficientium ipsius 55 in ser,
 quibus factoribus seu $\frac{1}{6} = \frac{1}{\pi\pi} + \frac{1}{4\pi\pi} + \frac{1}{9\pi\pi} + \text{et.}$ atque coefficienti ^{terti}secun
 termini $+\frac{1}{120}$ aequalis erit summa factorum ex binis terminis seriei $\frac{1}{\pi\pi}$,
 $\frac{1}{4\pi\pi}$, $\frac{1}{9\pi\pi}$ et. huius seriei duplum subtrahat a quadrato
 seriei $\frac{1}{\pi\pi} + \frac{1}{4\pi\pi} + \text{et.}$ remanebit series quadratorum singulorum terminum
 $\frac{1}{\pi^4} + \frac{1}{4^2\pi^4} + \frac{1}{9^2\pi^4} + \text{et.} = \frac{1}{36} - \frac{2}{120} = \frac{1}{90}$ seu $\frac{\pi^4}{90} = \frac{1}{1} + \frac{1}{4^2}$
 $+ \frac{1}{9^2} + \text{et.}$ Sed autem expressio $1 - \frac{55}{6} + \frac{5^4}{120} - \text{et.}$ praeter hos facto.
 res indicator alios factores in se comprehenderetur, id quod in serie pro ellipso
 ita videtur, tum hoc initio nullo, rere summationes obli

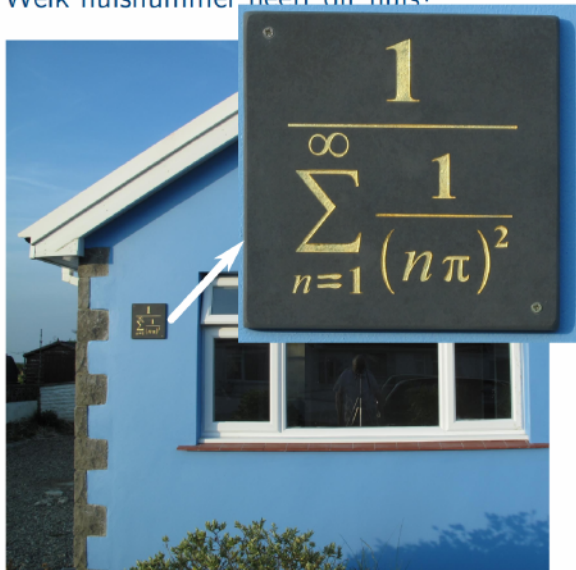
que mihi facta est contra meam methodum ex serie $0 = 5 - \frac{5^2}{6} + \frac{5^3}{120} - \text{et.}$
 petitam, quam etsi statim praevideram, tamen aliter inire non potui,
 nisi mon. frando, summas hae via inventas cum summis, quas variis approximan-
 di modi superdistant, aptissime convenire. Omnino autem cunctae objectiones tolli
 mihi videbantur, si demonstrari posset aequationem infinitam $0 = 5 - \frac{5^2}{6} + \frac{5^3}{120}$
 - et. alias radices in se non complecti, nisi quas natura circuli indicaret.
 Quod si enim fuerit $5 - \frac{5^2}{6} + \frac{5^3}{120} - \text{et.} = 5(1 - \frac{55}{\pi\pi})(1 - \frac{55}{4\pi\pi})(1 - \frac{55}{9\pi\pi}) - \text{et.}$
 seu $1 - \frac{55}{6} + \frac{5^4}{120} - \text{et.} = (1 - \frac{55}{\pi\pi})(1 - \frac{55}{4\pi\pi})(1 - \frac{55}{9\pi\pi}) - \text{et.}$ certe coefficientis
 secundi termini $-\frac{1}{6}$ aequalis esse debet summa coefficientium ipsius 55 in sin-
 gulis factoribus seu $\frac{1}{6} = \frac{1}{\pi\pi} + \frac{1}{4\pi\pi} + \frac{1}{9\pi\pi} + \text{et.}$ atque coefficientis ^{terti} secun-
 dae termini $+\frac{1}{120}$ aequalis erit summa factorum ex binis terminis seriei $\frac{1}{\pi\pi}$,
 $\frac{1}{4\pi\pi}$, $\frac{1}{9\pi\pi}$ et. huius seriei duplum subtrahat a quadrato
 seriei $\frac{1}{\pi\pi} + \frac{1}{4\pi\pi} + \text{et.}$ remanebit series quadratorum singulorum terminorum
 $\frac{1}{\pi^4} + \frac{1}{4^2\pi^4} + \frac{1}{9^2\pi^4} + \text{et.} = \frac{1}{36} - \frac{1}{120} = \frac{1}{90}$ seu $\frac{\pi^4}{90} = \frac{1}{1} + \frac{1}{4^2}$
 $+ \frac{1}{9^2} + \text{et.}$ Si autem expressio $1 - \frac{55}{6} + \frac{5^4}{120} - \text{et.}$ praeter hos facto-
 res indicator alios factores in se complecteretur, id quod in serie pro ellipso
 indicatur, tum hoc interscincio nullas vere summationes alibi

Goed om weten

- François Arago: *Hij rekende zonder enige zichtbare inspanning, net zoals mensen ademen, of zoals arenden zich in de lucht houden.*
- François Arago: *Euler, de man die men zonder metafoor, en zeker zonder hyperbool, de vleesgeworden analyse zou kunnen noemen.*
- Leonhard Euler, nadat hij bijna volledig blind was geworden: *Nu heb ik minder afleiding.*

Het probleem

Welk huisnummer heeft dit huis?



Het probleem

Een reeks $\underbrace{u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_n}_{s_n} + \dots$ convergeert $\Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \text{bestaat} + \text{is eindig}$.

Deze limiet wordt de som van de reeks genoemd, notatie:

$$s = u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_n + \dots$$

1350 Nicole Oresme bewijst dat de harmonische reeks:

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{n} + \dots$$

divergeert.

Het probleem

Een reeks $\underbrace{u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_n}_{s_n} + \dots$ convergeert $\Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \text{bestaat} + \text{is eindig}$.

Deze limiet wordt de som van de reeks genoemd, notatie:

$$s = u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_n + \dots$$

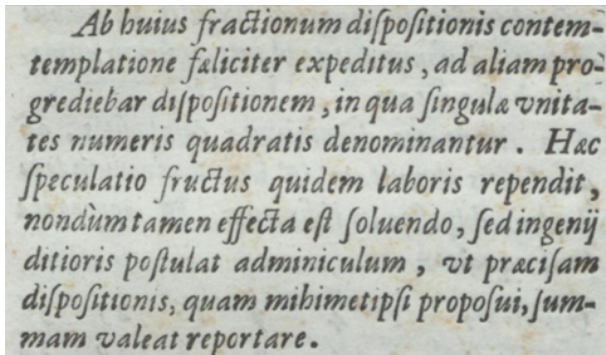
1650 Pietro Mengoli herontdekt de harmonische reeks en geeft een nieuw bewijs van de divergentie.

Hij ontdekt de telescopische reeksen:

$$1 = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{n \cdot (n+1)} + \dots$$

...en stoot op een probleem op p. 11 in zijn boek *Novae quadraturae arithmeticae seu de additione fractionum*.

Het probleem



*Ab huius fractionum dispositionis contem-
templatione feliciter expeditus, ad aliam pro-
gredebam dispositionem, in qua singula unita-
tes numeris quadratis denominantur. Hæc
speculatio fructus quidem laboris rependit,
nondum tamen effecta est soluendo, sed ingenij
ditioris postulat adminiculum, ut præcisam
dispositionis, quam mihi metipso proposui, sum-
mam valeat reportare.*

Of, vrij vertaald: Na mijn onderzoek van de vorige breukenreeks ging ik verder met een nieuwe uitdaging: de reeks waarvan de termen de reciproken van de kwadraten zijn. Die zoektocht heeft al mooie vondsten opgeleverd, maar het grootste geheim is nog niet onthuld. Om de precieze som van de reeks te bepalen, is nog een scherper inzicht vereist.

Het probleem

Na mijn onderzoek van de vorige breukenreeks ging ik verder met een nieuwe uitdaging: de reeks waarvan de termen de reciproken van de kwadraten zijn. Die zoektocht heeft al mooie vondsten opgeleverd, maar het grootste geheim is nog niet onthuld. Om de precieze som van de reeks te bepalen, is nog een scherper inzicht vereist.

Mengoli heeft het dus over de reeks:

$$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots + \frac{1}{n^2} + \dots$$

Over deze reeks

De reeks

$$\overbrace{1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots + \frac{1}{n^2}}^{s_n} + \overbrace{\frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{(n+2)^2} + \frac{1}{(n+3)^2} + \dots}^{r_n}$$

convergeert. Voor deze reeks geldt (via het integraalkenmerk):

$$\int_{n+1}^{\infty} \frac{1}{x^2} dx \leq r_n \leq \int_n^{\infty} \frac{1}{x^2} dx$$

Hiermee kan je de fout schatten als je de som benadert door een aantal termen.

$$n = 10, \text{ fout} \approx 0.1 \quad || \quad n = 100, \text{ fout} \approx 0.01 \quad || \quad n = 1000, \text{ fout} \approx 0.001$$

Beschikbare rekenmiddelen

Dus 1000 termen geeft een fout van ongeveer 0.001.

logaritmen? Niet ideaal want het is een som.

rekenmachines? Rond 1700 waren er de Pascaline en de Leibnizmachine, niet ideaal.

⇒ handmatig of via wiskundige technieken.

De prehistorie van het Bazel-probleem

1650	Pietro Mengoli	Wat is de som $1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \dots$? (...ingenij ditioris postulat adminiculum)
1673	Gottfried Leibniz	<i>At vero hujus seriei in infinitum productae $1 \frac{1}{4} \frac{1}{9} \frac{1}{16}$ etc. summam nondum fateor reperi; sed et necdum inquirendi satis diligenter, otium habui.</i>
“Bazel” 1689	Jakob Bernoulli	<i>< 2, ... tamen finita esse, ex altera, qua manifesto minor est, colligimus: Si quis inveniat nobisque communicet, quod industriam nostram elusit hactenus, magnas de nobis gratias feret.</i>
1691	Johann Bernoulli	<i>... ie voy déjà la route de trouver la somme de cette rangee $\frac{1}{1} + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16}$ & ce que nous ne pouvions pas autrefois;</i>
1728	Daniel Bernoulli	... elle est fort à peu près égale à $\frac{8}{5}$
1729	Christian Goldbach	tussen $\frac{41423}{25200} = 1.6437\dots$ en $\frac{76997}{46800} = 1.6452\dots$
1730	James Stirling	$1.6449340668482264(3)$
1731	Leonhard Euler	1.644934
1733	Leonhard Euler	1.64493406684822643647
1735	Leonhard Euler	$\frac{\pi^2}{6}$

Het bewijs van Euler van 1734-1735



Eerst dit.

Heb je een polynoom in x van graad 2 met 2 nulpunten x_1 en x_2 en constante term 1, dan is dit de ontbinding in factoren ervan:

$$1 + bx + ax^2 = \left(1 - \frac{x}{x_1}\right) \cdot \left(1 - \frac{x}{x_2}\right)$$

Dat is ook zo voor hogere graad met constante term 1.

Het bewijs van Euler van 1734-1735*

Euler vertrekt van de reeksontwikkeling voor de sinusfunctie, al lang gekend:

$$\sin x = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \frac{1}{7!}x^7 + \frac{1}{9!}x^9 - \dots$$

Hieruit volgt:

$$\frac{\sin x}{x} = 1 - \frac{1}{3!}x^2 + \frac{1}{5!}x^4 - \frac{1}{7!}x^6 + \frac{1}{9!}x^8 - \dots$$

In het rechterlid staat een ietwat fors uitgevallen polynoom in x met constante term 1, en deze heeft natuurlijk als nulpunten (kijk naar het linkerlid!):

$$x = \pm\pi, x = \pm2\pi, x = \pm3\pi, \dots$$

* *De summis serierum reciprocarum*, Commentarii academiae scientiarum Petropolitanae, Volume 7, pp. 123-134 (1741)

Het bewijs van Euler van 1734-1735

Omdat

$$x = \pm\pi, x = \pm2\pi, x = \pm3\pi, \dots$$

de nulpunten zijn van

$$1 - \frac{1}{3!}x^2 + \frac{1}{5!}x^4 - \frac{1}{7!}x^6 + \frac{1}{9!}x^8 - \dots$$

kunnen we ontbinden in factoren:

$$\begin{aligned} &1 - \frac{1}{3!}x^2 + \frac{1}{5!}x^4 - \frac{1}{7!}x^6 + \frac{1}{9!}x^8 - \dots \\ &= \left(1 - \frac{x}{\pi}\right) \left(1 - \frac{x}{-\pi}\right) \left(1 - \frac{x}{2\pi}\right) \left(1 - \frac{x}{-2\pi}\right) \left(1 - \frac{x}{3\pi}\right) \left(1 - \frac{x}{-3\pi}\right) \dots \end{aligned}$$

Het bewijs van Euler van 1734-1735

Omdat

$$x = \pm\pi, x = \pm2\pi, x = \pm3\pi, \dots$$

de nulpunten zijn van

$$1 - \frac{1}{3!}x^2 + \frac{1}{5!}x^4 - \frac{1}{7!}x^6 + \frac{1}{9!}x^8 - \dots$$

kunnen we ontbinden in factoren:

$$\begin{aligned} &1 - \frac{1}{3!}x^2 + \frac{1}{5!}x^4 - \frac{1}{7!}x^6 + \frac{1}{9!}x^8 - \dots \\ &= \underbrace{\left(1 - \frac{x}{\pi}\right)} \underbrace{\left(1 - \frac{x}{-\pi}\right)} \underbrace{\left(1 - \frac{x}{2\pi}\right)} \underbrace{\left(1 - \frac{x}{-2\pi}\right)} \underbrace{\left(1 - \frac{x}{3\pi}\right)} \underbrace{\left(1 - \frac{x}{-3\pi}\right)} \dots \end{aligned}$$

Het bewijs van Euler van 1734-1735

Of nog

$$1 - \frac{1}{3!}x^2 + \frac{1}{5!}x^4 - \frac{1}{7!}x^6 + \frac{1}{9!}x^8 - \dots = \left(1 - \frac{x^2}{\pi^2}\right) \left(1 - \frac{x^2}{4\pi^2}\right) \left(1 - \frac{x^2}{9\pi^2}\right) \dots$$

Laten we die haken nu even uitwerken, dan moeten we natuurlijk uitkomen op links... De haken uitwerken is een gedoe, je hebt iets van de volgende vorm maar dan met oneindig veel factoren:

$$(a + b_1)(a + b_2)(a + b_3) = aaa + aa(b_1 + b_2 + b_3) + a(b_1b_2 + b_1b_3 + b_2b_3) + \dots$$

De a 's zijn gelijk aan 1 in dit geval. En de eerste twee termen worden dan in ons geval:

$$1 + 1 \cdot \left(-\frac{x^2}{\pi^2} - \frac{x^2}{4\pi^2} - \frac{x^2}{9\pi^2} - \frac{x^2}{16\pi^2} - \dots \right)$$

Het bewijs van Euler van 1734-1735

$$1 - \frac{1}{3!}x^2 + \frac{1}{5!}x^4 - \frac{1}{7!}x^6 + \frac{1}{9!}x^8 - \dots = \left(1 - \frac{x^2}{\pi^2}\right) \left(1 - \frac{x^2}{4\pi^2}\right) \left(1 - \frac{x^2}{9\pi^2}\right) \dots$$

Met als eerste twee termen in de uitwerking van het rechterlid:

$$1 + \left(-\frac{x^2}{\pi^2} - \frac{x^2}{4\pi^2} - \frac{x^2}{9\pi^2} - \frac{x^2}{16\pi^2} - \dots\right) = 1 + \left(-\frac{1}{\pi^2} - \frac{1}{4\pi^2} - \frac{1}{9\pi^2} - \frac{1}{16\pi^2} - \dots\right) x^2$$

... en de 'volgende term' in de uitwerking bevat een factor x^4 .

Maar als twee polynomen aan elkaar gelijk zijn, dan zijn de coëfficiënten van de overeenkomstige machten van x aan elkaar gelijk!

Dus:

$$-\frac{1}{6} = -\frac{1}{\pi^2} - \frac{1}{4\pi^2} - \frac{1}{9\pi^2} - \frac{1}{16\pi^2} - \dots$$

De oplossing van het probleem

Welk huisnummer heeft dit huis?



Het vervolg

Johann Bernoulli, 2 april 1737, aan Leonhard Euler:

Ik heb de som gevonden van de reeks van de omgekeerden van de kwadraten van de natuurlijke getallen!

Leonhard Euler, 27 augustus 1737, aan Johann Bernoulli:

Maar je geeft hier het bewijs dat ik je gestuurd heb!

Maar blijkbaar had Euler al door dat de bewijsvoering niet echt strikt was, want in diezelfde brief geeft Euler een heel ander bewijs.

Het bewijs van Euler van 1734-1735: kritiek

Johann Bernoulli, 6 november 1737:

... volebam enim facere argumentum ad hominem contra eum, qui vellet concludere in serie sinuum ex arcubus cognoscendorum

$$x - \frac{1}{2.3}x^3 + \frac{1}{2.3.4.5}x^5 - \frac{1}{2.3.4.5.6.7}x^7 + \&c$$

contineri præcise et necessario omnes arcus possibles eidem sinui respondentes, nullosque alios nec imaginarios nec peregrinos;

Het bewijs van Euler van 1734-1735: kritiek

Daniel Bernoulli, 20 september 1741:

Es dünkt mich, dass wenn man eine Aequation in seriem resolvire, dieselbe aequatio per series nicht mehr propria sey noch eben die proprietates habe, als die aequationes algebraicae, in quibus coefficiens secundi termini est summa radicum; solches könnte ich mit gar vielen Argumenten beweisen.

Het bewijs van Euler van 1734-1735: kritiek

Niklaus Bernoulli, 13 juli 1742:

Quamquam autem, ut recte dicis, hic sinus sit productum horum factorum

$$s \left(1 - \frac{ss}{\pi\pi}\right) \left(1 - \frac{ss}{4\pi\pi}\right) \left(1 - \frac{ss}{9\pi\pi}\right) \text{ etc.}$$

et singula quadrata $ss = 0, \pi\pi, 4\pi\pi, 9\pi\pi, \text{ etc.}$ ita ut aequatio praedicta nullas habeat radices imaginarias, non tamen puto ex hoc solo legitime concludi posse, summam omnium $\frac{1}{ss}$ excepto $\frac{1}{0}$, h.e. $\frac{1}{\pi\pi}, \frac{1}{4\pi\pi}, \frac{1}{9\pi\pi}, \text{ etc.}$ esse $\frac{1}{6}$, negativae coefficienti secundi termini in hac infinita aequatione $0 = 1 - \frac{ss}{6} + \frac{s^4}{120} - \text{etc.}$ nisi simul demonstretur, seriem

$$s - \frac{s^3}{6} + \frac{s^5}{120} - \text{etc.}$$

esse convergentem et exacte dare sinum arcus s , quicunque valor assignetur ipsi s ;

Het bewijs van Euler van 1737[†]

$$\arcsin x = x + \frac{1}{6}x^3 + \frac{3}{40}x^5 + \frac{5}{112}x^7 + \frac{35}{1152}x^9 + \dots$$

$$\Rightarrow \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{1}{6} \frac{x^3}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{3}{40} \frac{x^5}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{5}{112} \frac{x^7}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{35}{1152} \frac{x^9}{\sqrt{1-x^2}} + \dots$$

Term per term integreren tussen 0 en 1 geeft:

- voor het linkerlid $\frac{1}{2}(\arcsin 1)^2 = \frac{\pi^2}{8}$;
- voor het rechterlid $1 + \frac{1}{9} + \frac{1}{25} + \frac{1}{49} + \frac{1}{81} + \dots$

[†] *Démonstration de la somme de cette suite $1 + 1/4 + 1/9 + 1/16 + \dots$* , Journal littéraire d'Allemagne, de Suisse et du Nord, Volume 2, Den Haag, pp. 115-127 (1743)

Het bewijs van Euler van 1737

Dus

$$1 + \frac{1}{9} + \frac{1}{25} + \frac{1}{49} + \frac{1}{81} + \dots = \frac{\pi^2}{8}$$

Het resultaat volgt dan uit:

$$\begin{aligned} s &= 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \frac{1}{25} + \frac{1}{36} + \frac{1}{49} + \frac{1}{64} + \frac{1}{81} + \dots \\ &= 1 + \frac{\color{red}{1}}{4} + \frac{1}{9} + \frac{\color{red}{1}}{4} \cdot \frac{1}{4} + \frac{1}{25} + \frac{\color{red}{1}}{4} \cdot \frac{1}{9} + \frac{1}{49} + \frac{\color{red}{1}}{4} \cdot \frac{1}{16} + \frac{1}{81} + \dots \\ &= 1 + \frac{1}{9} + \frac{1}{25} + \frac{1}{49} + \frac{1}{81} + \dots + \frac{\color{red}{1}}{4} \left(1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \dots \right) \\ &= \frac{\pi^2}{8} + \frac{1}{4}s \quad \implies \quad \frac{3}{4}s = \frac{\pi^2}{8} \end{aligned}$$

Verwante reeksen

Dit bewijs zit wiskundig beter in elkaar, maar heeft niet de voordelen van het vorige.
Dat had als onmiddellijk gevolg:

$$\begin{array}{l} 1 + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{4^4} + \frac{1}{5^4} + \dots = \frac{\pi^4}{90} \\ 1 + \frac{1}{2^6} + \frac{1}{3^6} + \frac{1}{4^6} + \frac{1}{5^6} + \dots = \frac{\pi^6}{945} \\ 1 + \frac{1}{2^8} + \frac{1}{3^8} + \frac{1}{4^8} + \frac{1}{5^8} + \dots = \frac{\pi^8}{9450} \\ 1 + \frac{1}{2^{10}} + \frac{1}{3^{10}} + \frac{1}{4^{10}} + \frac{1}{5^{10}} + \dots = \frac{\pi^{10}}{93555} \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} 1 - \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} - \frac{1}{4^4} + \dots = \frac{7\pi^4}{720} \\ 1 - \frac{1}{2^6} + \frac{1}{3^6} - \frac{1}{4^6} + \dots = \frac{31\pi^6}{30240} \\ 1 - \frac{1}{2^8} + \frac{1}{3^8} - \frac{1}{4^8} + \dots = \frac{127\pi^8}{1209600} \\ 1 - \frac{1}{2^{10}} + \frac{1}{3^{10}} - \frac{1}{4^{10}} + \dots = \frac{73\pi^{10}}{6842880} \end{array}$$

enz. (gebruikmakend van de elementaire symmetrische functies).

Bewijzen door Euler

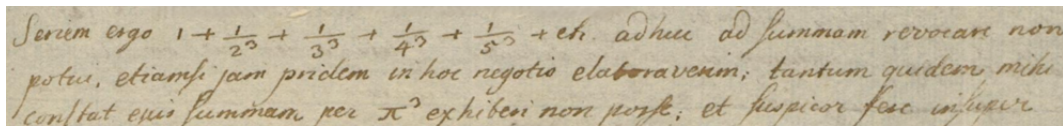
1735 – 1735 – 1737 – 1738 – 1742 – 1743 – 1748 – 1752 – ?

Belang

De Riemann-zeta functie, van Euler:

$$\zeta(s) = 1 + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \frac{1}{4^s} + \dots + \frac{1}{n^s} + \dots$$

$\zeta(3)$?



Constante van Apéry: 1979 $\rightarrow$ irrationaal.

Toch een telescopisch bewijs (David Benko 2017)

Voor m oneven hebben we met partiële integratie:

$$\int_0^{\pi} x \cos mx \, dx = -\frac{2}{m^2}.$$

Maar $2 \sin \frac{x}{2} \cos mx = \sin(\frac{2m+1}{2}x) - \sin(\frac{2m-1}{2}x)$ (Simpson). Dus:

$$\frac{1}{m^2} = \int_0^{\pi} \frac{x}{4 \sin \frac{x}{2}} \sin(\frac{2m-1}{2}x) dx - \int_0^{\pi} \frac{x}{4 \sin \frac{x}{2}} \sin(\frac{2m+1}{2}x) dx \quad (2\text{de term} \rightarrow 0 \text{ voor } m \rightarrow \infty)$$

Optellen! Denk eraan, m oneven:

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$$

Dear Editor:

The poem "Bell's Conjecture" (this MAGAZINE, June 1997, p. 203) adopted E. T. Bell's ranking of Archimedes, Newton, and Gauss as the greatest mathematicians of all time. We felt compelled to respond to the omission of Leonhard Euler from such glorious company. Thus . . .

Before we let you get away,
Your choices set in stone,
Consider what we have to say:
E.T.! O, please! Call home!
Stop the presses! Hold that thought!
And listen to our voices.
Ruffled, even overwrought,
We'll supplement your choices.
Old Archie, Isaac, C. F. Gauss—
Though each deserves a floor
In mathematics' honored house,
Make room for just one more.
Without the Bard of Basel, Bell,
You've clearly dropped the ball.
Our votes are cast for Euler, L.
Whose *Opera* says it all:
Six dozen volumes—what a feat!

Profound and deep throughout
Does Leonhard rank with the elite?
Of this there is no doubt.
Consider how he summed, in turn
The quite elusive mix
Of one slash n all squared—you'll
learn
He got π^2 slash six.
We're shocked we did not see his
name
With those you justly sainted.
No Euler in your Hall of Fame?
Your judgment's surely Taine-ted.
It's time to honor one you missed,
To do your duty well.
Add worthy Euler to your list,
And save him by the Bell.

—CHARLIE MARION
LAKELAND H.S.
SHRUB OAK, NY 10588

—WILLIAM DUNHAM
MUHLENBERG COLLEGE
ALLENTOWN, PA 18104