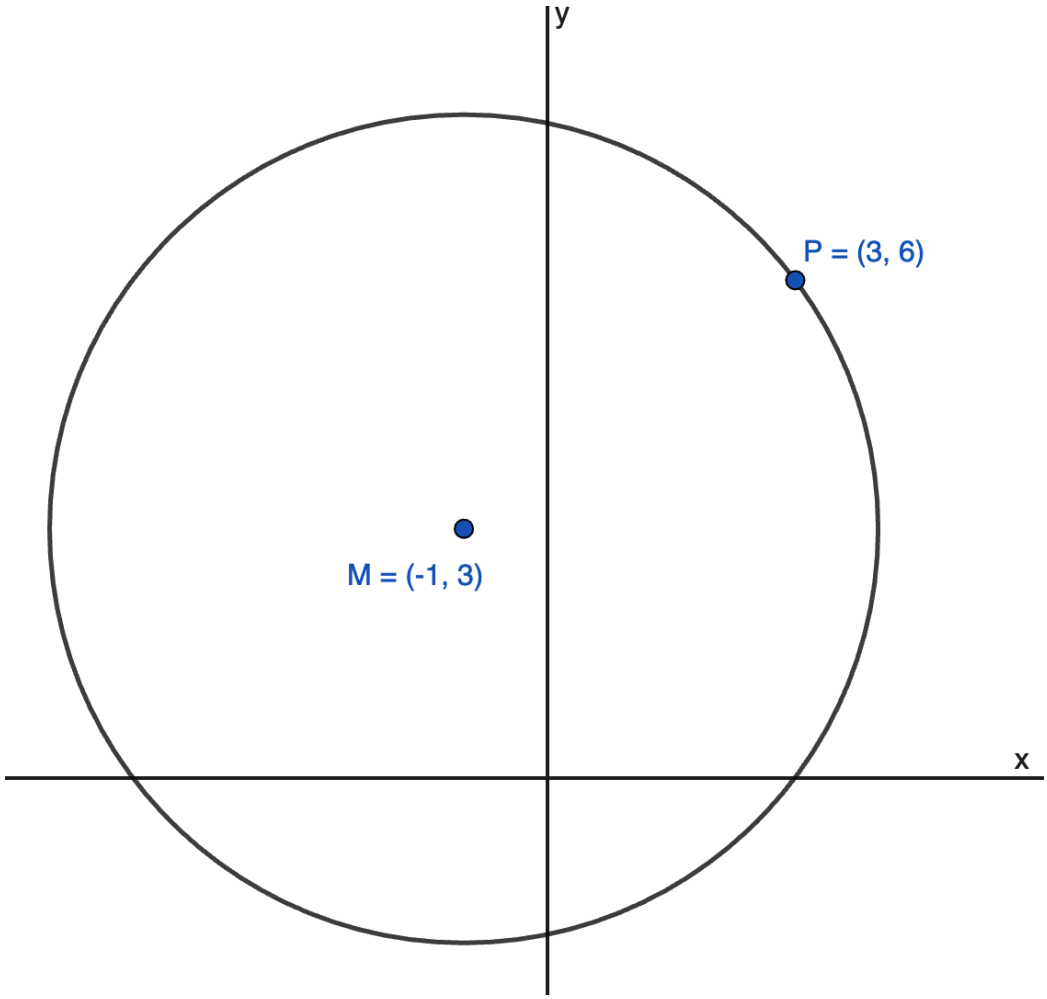
Cirkelvergelijkingen

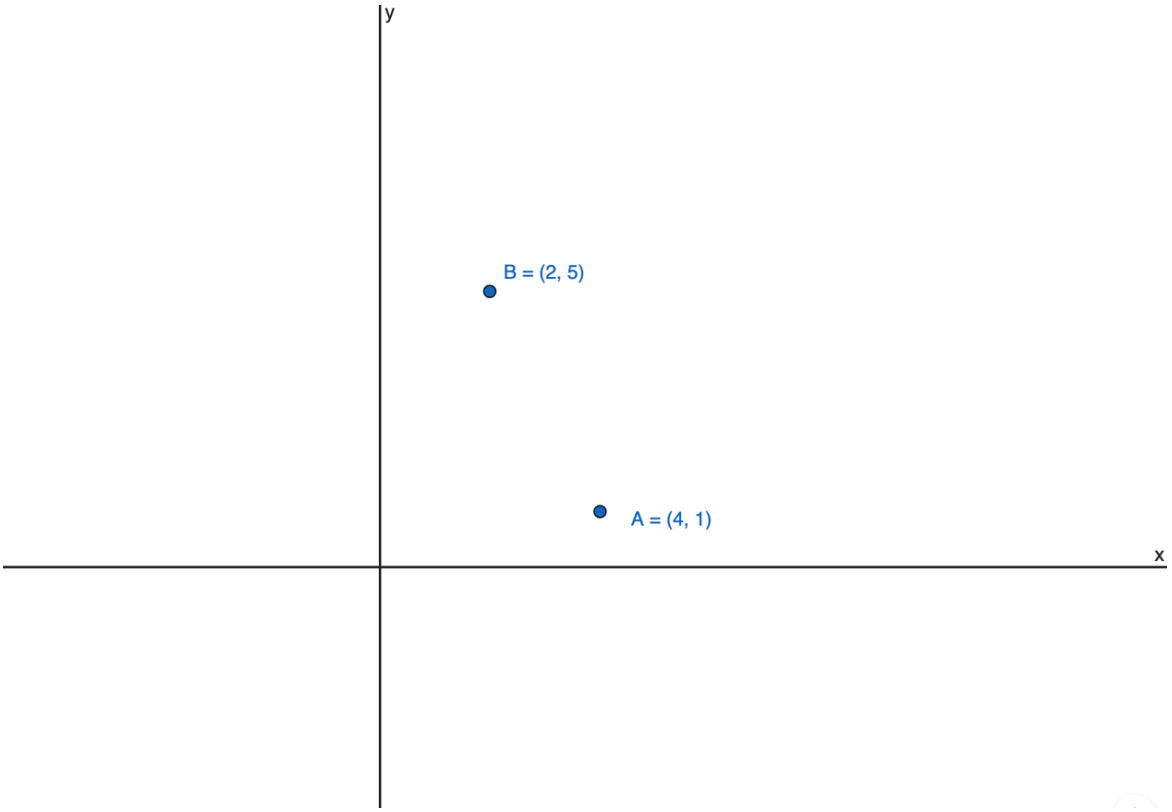
Het probleem

Gegeven is een cirkel met middelpunt $M(-1,3)$ en een punt $P(3,6)$ op deze cirkel. Stel een formule op van deze cirkel.



Uitdagende opdracht

Gegeven zijn twee punten $A(4,1)$ en $B(2,65)$. Stel een cirkelvergelijking op van een cirkel door deze punten met een straal van 5.



Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren

Doelgroep en onderwerp

Jaarlaag: 5 vwo – wiskunde B
Onderwerp: Cirkelvergelijkingen
Lesduur: 30 minuten
Benodigdheden: Grafische rekenmachine of eventueel Geogebra, whiteboard & markers
Werkwijze: Groepsopdracht
Voorkennis: Stelling van Pythagoras, translaties, formule van een lijn opstellen

Leerdoelen:

- Gebruikmakend van de stelling van Pythagoras en de voorkennis van translaties ontwikkelen de leerlingen inzicht in de opbouw van de cirkelvergelijking
- De leerling kent de cirkelvergelijking en kan deze zelf samenstellen op basis van een gegeven middelpunt en een gegeven punt op de cirkel

Voorkennis uitdagende opdracht: Middelloodlijn met zijn eigenschappen, het feit dat indien $rc_l \cdot rc_m = -1$, dan $l \perp m$

Werkwijze

Beschrijving van de werkvorm

Voer deze opdracht uit in groepjes van 3 op whiteboard of whiteboardfolie.

Mogelijke hints

- Hoe is de straal van de cirkel afhankelijk van de coördinaten van M en P?
- Hoe is een willekeurig punt $P(x_P, y_P)$ op de cirkel afhankelijk van M en de straal? Laat de leerlingen de wortel wegwerken uit de vergelijking.

Consolidatie

- Geef 2 andere punten M en P, bijvoorbeeld $M(2,4)$ en $P(-6,-2)$.
- Geef een ander punt M en een lengte van de straal, bijvoorbeeld $M(2,-3)$ en de straal is $\sqrt{41}$.

Mogelijke uitbreidingsvragen

- Voor leerlingen die snel klaar zijn kan de uitdagende opdracht ingezet worden.
    - **Mogelijke hints**:
        - Wat weet je van de afstand van M tot aan de punten A en B?
        - Welke meetkundige plaats hoort hierbij?
            - De term 'meetkundige plaats' is wellicht nog onbekend, maar kan hier toegelicht worden.
        - Hoe kun je de straal bepalen? Denk aan wat je weet van de coördinaten die op de middelloodlijn van AB liggen en denk weer aan de stelling van Pythagoras.

Verwachte oplossing van leerlingen

- De straal is $\sqrt{(3--1)^2+(6-3)^2}=\sqrt{25}=5$. Als ze de dubbele min vergeten komen ze uit op $\sqrt{13}$.
- Als $P(x_P, y_P)$ en ze houden dezelfde werkwijze vast, dan komen ze op $\sqrt{(x_P+1)^2+(y_P-3)^2}=5$ want M en de straal blijven onveranderd. Ook mogelijk is $(x_P+1)^2+(y_P-3)^2=25$.

Verwachte oplossing van leerlingen (uitdagende opdracht)

- Midden van AB is het punt $C(3,3)$. De helling tussen A en B is -2. Middelloodlijn l van AB is dan $l: y=\frac{1}{2}x+1\frac{1}{2}$, dus voor elk punt P op l geldt dan $P(x, \frac{1}{2}x+1\frac{1}{2})$.
- Pythagoras geeft $d(A,P)=\sqrt{(x-4)^2+\left(\frac{1}{2}x+1\frac{1}{2}-1\right)^2}$ en die moet gelijk zijn aan r^2, dus $5^2=25$.
- De vergelijking oplossen geeft $x=-1$ ∨ $x=7$ met respectievelijk $y=1$ ∨ $y=5$. De mogelijke middelpunten zijn dus $M_1=(-1,1)$ en $M_2=(7,5)$. De twee middelpuntsvergelijkingen worden dan: $c_1: (x+1)^2+(y-1)^2=25$ en $c_2: (x-7)^2+(y-5)^2=25$.

Aanwijzingen voor het klassengesprek

- De leerling kent de middelpuntsvergelijking nog niet en gaat zelf ontdekken hoe deze in elkaar zit. Normaal wordt deze vergelijking gegeven in het boek en hoeven ze er alleen mee te werken. Hierdoor kan er meer begrip ontwikkeld worden voor de formule en algebra 'an sich'.
- De consolidatie is verwerkt in de opdracht en leerlingen kunnen ook met opdrachten uit de lesmethode aan de slag. Ook zit er een uitdagendere opgave bij voor leerlingen die het snel onder de knie hebben.
- Het liefst werken de leerlingen op whiteboards (of whiteboardfolie) in groepjes van drie zodat ze erover kunnen discussiëren. De probleemaanpak zit hem erin dat leerlingen zelf moeten gaan onderzoeken hoe een middelpuntsvergelijking eruitziet, waar die van afhankelijk is, en hoe ze hem in het vervolg met bepaalde gegevens snel kunnen opstellen.
- Als leerlingen overweg kunnen met het programma Geogebra, dan kunnen ze dat ook gebruiken om een idee te krijgen.

Reflectie

Hoewel het vinden van de straal met behulp van de afstandsformule goed ging, bleek de volgende stap, het opstellen van de cirkelformule, voor veel leerlingen abstract. Met name het idee van een algemeen punt $P(x,y)$ op de cirkel en het vertalen daarvan naar een formule was lastig te begrijpen. Hou hier in het klassengesprek rekening mee.

Deze opdrachten zijn ontwikkeld binnen het IOL-project Probleemaanpak in de wiskundeles van de NVvW. Meer informatie en vragen vind je op:

www.nvvw.nl/lesmaterialen/probleemoplossen

