

SUR LA FORCE DES COLONNES.

PAR M. EULER.

I.

Quand je développai dans le supplément de mon Traité sur les Iso-périmètres les courbes des lames élastiques, j'en ai tiré une règle pour juger de la force des colonnes, qui me parut d'abord fort remarquable. Il s'agit de déterminer le poids qu'une colonne peut soutenir, sans être sujette à se plier. La Règle que j'ai trouvée, regarde les colonnes, qui sont également fortes par toute leur longueur; & si l'on nomme la hauteur d'une telle colonne $= a$, & le moment de son ressort $= Ekk$, dont j'ai expliqué tant la signification, que les moyens pour en trouver la juste valeur en chaque cas; le poids que cette colonne est capable de soutenir sans se plier, est $= \pi\pi \cdot \frac{Ekk}{aa}$, où π marque la circonférence d'un cercle dont le diamètre est $= 1$: d'où l'on voit que ce poids suit la raison renversée du carré de la hauteur de la colonne. Mais pour faire usage de cette règle, il est bon que je rapporte ici ce qu'il faut entendre par l'expression Ekk , que je viens de nommer *Moment du Ressort*.

II. D'abord je dois remarquer, que ce moment n'est pas uniquement attaché aux corps élastiques, parmi lesquels on pourroit douter avec raison, si les colonnes y étoient comprises. Il regarde proprement la force, dont un corps quelconque s'oppose à l'inflexion, & il est tout à fait indifférent, si le corps après l'inflexion est doué d'une force de se retablir ou non? Par cette raison on pourroit plutôt nommer ce moment celui de roideur, puisqu'il a effectivement lieu



lieu dans tous les corps qui s'opposent à l'inflexion, soit qu'ils soient élastiques ou non. Ces recherches peuvent donc être appliquées à toutes les colonnes, dont la force dépend de leur roideur, & qui sont capables de soutenir des fardeaux, entant qu'elles résistent à l'inflexion. Si cette idée paroît moins convenir aux colonnes de pierre ou de marbre, elle sera sans contredit applicable à celles de bois; & c'est sous cette vuë, que je me propose d'examiner leur force.

III. Pour déterminer ledit moment de ressort, ou plutôt de roideur, exprimé par la formule Ekk , qui convient à une colonne quelconque, que je suppose ici comme également épaisse par toute sa longueur; soit $ABCD$ la colonne proposée, non seulement posée verticalement, mais aussi fermement enchaissée au fond AB , qu'elle ne puisse abandonner cette situation verticale, qu'en se pliant. Maintenant qu'on lui applique en haut une force horizontale CF , qui soit $= F$, & qui plie tant soit peu la colonne, en la forçant dans la situation $ABcd$. Qu'on mesure exactement tant la hauteur de la colonne AC , que l'espace Dd , par lequel la force a fait avancer le haut de la colonne, & l'expression $F \cdot AC^2 \left(\frac{AC}{3Dd} - \frac{1}{2} \right)$ donnera le moment de roideur Ekk . Or puisque Dd est extrêmement petit par rapport à AC , on peut supposer sans erreur $Ekk = \frac{F \cdot AC^3}{3Dd}$. La raison de cette détermination se trouve exposée dans le §. 39. du supplément allégué.

IV. Cette quantité Ekk exprimant le moment de roideur dans chaque endroit de la colonne, elle dépend uniquement de l'épaisseur de la colonne, & de la roideur de la matière, dont elle est composée. Donc l'épaisseur & la matière demeurant les mêmes, l'expérience rapportée fournira toujours la même valeur pour Ekk , quelle que soit la hauteur de la colonne AC , & la force F . D'où l'on voit, que si la force F demeure la même, l'espace de Dd doit se trouver pro-



portionnel au cube de la hauteur de la colonne : mais si la force F varie, la hauteur AC demeurant la même, l'espace DD sera proportionnel à la force F : or en général si tant la hauteur de la colonne que la force varie, l'espace DD sera proportionnel à $F.AC^3$. On pourra donc varier à l'infini les expériences pour découvrir la valeur Ekk , & en faisant plusieurs telles expériences, on s'assurera avec d'autant plus de certitude de la véritable quantité du moment de roideur Ekk .

V. Après avoir déterminé ce moment de roideur Ekk pour une certaine épaisseur & matiere, il seroit bon de faire de semblables expériences pour en connoître la valeur, si tant l'épaisseur que la matiere de la colonne étoit différente. Or pour l'épaisseur, à moins qu'elle ne soit ronde ou circulaire, il la faut considérer dans un double sens ; ou bien il y faut distinguer la largeur & l'épaisseur proprement ainsi nommée. Si la colonne a la forme d'un prisme rectangulaire, la dimension exprimée dans la figure par la ligne AB sera l'épaisseur, suivant laquelle la force tend à rompre la colonne : & si le rectangle $ABab$ marque la base de la colonne, la dimension Aa en sera la largeur. Pour celle-cy il est assez évident, que le moment de roideur lui est proportionnel ; mais pour l'épaisseur, puisqu'elle s'oppose davantage à l'inflexion, il semble que le moment de roideur en suive la raison doublée, ou même triplée : d'où l'on pourroit conclure, que si la colonne est un cylindre, son moment de roideur seroit proportionnel au cube, ou peut être plutôt au quarré quarré du diamètre de sa base.

VI. Cependant il seroit à souhaiter, qu'on fit plusieurs expériences sur plusieurs figures différentes, & qu'on les pliât par la force F en plusieurs sens différens, pour connoître plus exactement, combien tant la largeur que l'épaisseur contribuent à augmenter le moment de roideur. On pourroit ensuite étendre ces recherches à plusieurs matieres différentes, & ensuite par le secours de quelque Théorie on découvrira peut être une règle, par laquelle on fera en état de déterminer d'abord le moment de roideur d'une colonne proposée quelcon-



conque, tant par rapport à la matiere dont elle est compofée, que par rapport à fa largeur & épailleur. Alors, quand même la colonne ne feroit pas cylindrique ou prismatique, mais que fon épailleur feroit variable, on en pourroit affigner pour chaque endroit le vrai moment de roideur.

VII. Connoiffant ce moment de roideur, il eft facile de déterminer la courbure, que l'action d'une force quelconque doit produire: car une force n'y agiffant qu'en vertu de fon moment rapporté à l'endroit où fe fait la courbure, fi nous pofons ce moment de force $\equiv Pf$, le moment de roideur étant $\equiv Ekk$, le rayon de courbure imprimée au corps au même endroit, fera $\equiv \frac{Ekk}{Pf}$. C'eft la raifon, que le moment de roideur eft le produit d'une force par le quarré d'une ligne, & qu'il eft femblable aux expreffions qui marquent le moment d'inertie des corps. Donc réciproquement, fi le rayon de courbure eft pofé $\equiv r$, le moment de force requis à produire cette courbure eft $\equiv \frac{Ekk}{r}$; & c'eft fur ce principe qu'eft fondée toute la Théorie, qui fert à déterminer l'inflexion de tous les corps tant élaftiques que fimplement roides: car, tant qu'on ne regarde que l'inflexion, fans fe foucier fi le corps après la ceffation de la force fe retablit ou non, l'élafticité n'entre point en confidération.

VIII. Ayant établi ce principe, il eft aifé d'en déduire la regle que je viens d'expofer, pour déterminer par des expériences le moment de roideur. Car, pofons pour un point quelconque M de la colonne cy-deffus les coordonnées BP $\equiv x$, & PM $\equiv y$, & confidérant que l'appliquée PM eft quafi infiniment petite, le rayon de courbure en M eft $\equiv \frac{dx^2}{ddy}$ prenant l'élément dx pour constant. Donc le moment de la force CF $\equiv F$, à caufe de AC $\equiv a$, étant $\equiv F(a-x)$
pour



pour le point M, nous aurons $\frac{dx^2}{dy} = \frac{Ekk}{F(a-x)}$, posant Ekk pour le moment de roideur par toute l'étendue de la colonne. De là nous tirons $\frac{dy}{dx} = \frac{F(a-x)dx}{Ekk}$, & en intégrant $\frac{dy}{dx} = \frac{F(2ax - xx)}{2Ekk}$, sans y ajouter de constante, puisque par l'hypothèse il faut que $\frac{dy}{dx}$ évanouisse au point A. La seconde intégration donne $y = \frac{F(3axx - x^3)}{6Ekk}$: donc posant $x=a$, puisque y devient $= D\delta$, nous aurons $D\delta = \frac{Fa^3}{3Ekk}$, d'où découle la règle donnée $Ekk = \frac{Fa^3}{3D\delta} = \frac{F.AC^3}{3D\delta}$, savoir pour les cas où $D\delta$ est extrêmement petit par rapport à AC.

IX. Nous voyons donc que, quelque petite que soit la force F, qui est supposée agir horizontalement, elle doit toujours produire quelque inflexion, puisque l'espace $D\delta$ est proportionnel à la force F même. Mais il n'en est pas de même lorsque la force agit verticalement, ou que la colonne a à soutenir un poids, dont elle est pressée par en haut. Or d'abord il semble, qu'une telle force, quelque grande qu'elle soit, ne sauroit plier la colonne: puisqu'il n'y auroit point de raison, pour quoi la colonne se plieroit dans un sens plutôt que dans un autre. Mais la moindre inégalité dans les parties de la colonne, ou le moindre effort qu'elle éprouve par quelque côté, fournit bientôt la raison suffisante, pour la faire plier dans un certain sens. Cependant je dis, que tant que la force, ou le fardeau, que la colonne soutient, ne surpasse point la quantité $\pi\pi \cdot \frac{Ekk}{aa}$, il n'y a point à craindre que la co-

lonne



lonne subisse la moindre inflexion : mais un fardeau plus pesant ne manquera pas de la faire plier, & cela d'autant plus, plus le fardeau surpasse la quantité marquée $\pi\pi \cdot \frac{Ekk}{aa}$.

X. Cette différence entre l'action d'une force horizontale & verticale ne paroitra pas peu paradoxe : & il semble que, si une grande force fait plier une colonne, une moindre devrait toujours produire un semblable effet, quoiqu'il fut peut-être imperceptible. Cela semble exiger le principe de continuité : car, quel que soit le rapport entre la force & l'inflexion produite, il est difficile à concevoir, comment des forces, qui se trouvent au dessous d'une certaine quantité, ne puissent produire absolument aucune inflexion, tandis que de plus grandes en produisent incontestablement. Mais ce raisonnement n'est que précipité, puisqu'on pourroit produire une infinité de cas semblables dans les lignes courbes, où nonobstant le principe de continuité il arrive, qu'il ne répond aucune appliquée aux abscisses, tant qu'elles sont au dessous d'un certain terme, lequel étant passé les appliquées deviennent réelles.

XI. Donc, pour expliquer ce paradoxe, on n'a qu'à dire, que tant que le poids soutenu par la colonne est moindre que la quantité $\pi\pi \cdot \frac{Ekk}{aa}$, l'inflexion est imaginaire, & qu'elle devient $= 0$, lors-

que le poids atteint cette limite, & que passant cette limite l'inflexion devienne réelle & croisse avec la force. Comme cela est conforme aux principes du calcul, lequel étant fondé sur le principe de continuité, ne sauroit rien donner de contraire à ce principe; on est sans doute obligé d'acquiescer à cette explication, & on peut établir pour principe général, que les résultats du calcul fournissent toujours les plus sûres règles, que nous devons suivre dans nos raisonnemens sur le principe de continuité. Or on ne sauroit restreindre cette maxime à la seule Géométrie, ou aux spéculations purement théoriques. Après



que je viens de montrer, qu'un cas semblable a actuellement lieu dans les colonnes, qui ne sont plus du ressort d'une Théorie purement spéculative.

XII. La formule $\pi \pi \cdot \frac{E k k}{a a}$ nous fournit des conséquences aussi importantes que curieuses sur la force des colonnes. D'abord nous voyons, que plus une colonne est haute, & moins est elle capable de soutenir, ce qui se trouve suffisamment constaté par l'expérience : mais nous voyons de plus, que la force qu'une colonne peut soutenir, est réciproquement comme le quarré de sa hauteur. Donc deux colonnes cylindriques de la même matiere & d'une égale épaisseur & dont l'une soit deux fois plus haute que l'autre, étant proposées, on peut prononcer, que la plus longue ne supportera que le quart du poids, que la plus courte est capable de soutenir. Ensuite, si le moment de roideur est proportionnel au cube du diametre, les colonnes étant cylindriques, & qu'une colonne dont la hauteur est $= a$, & le diametre $= d$, puisse soutenir un poids $= p$; une autre colonne de la même matiere, dont la hauteur $= A$, & le diametre $= D$, soutiendra le poids $= P$, en sorte qu'il soit

$$p : P = \frac{d^3}{a a} : \frac{D^3}{A A}, \quad \& \text{ partant } P = \frac{a a D^3}{A A d^3} \cdot p.$$

D'où l'on peut comparer ensemble les forces de différentes colonnes tant par rapport à leur hauteur qu'à leur épaisseur.

XIII. Pour juger mieux du poids absolu, qu'une colonne cylindrique peut soutenir, supposons qu'une force égale à ce poids

$\pi \pi \cdot \frac{E k k}{a a}$ soit appliquée horizontalement en haut à la même colonne, après l'avoir affermie en bas, en sorte qu'elle ne puisse pas être renversée, & nous aurons pour le cas de l'expérience développé cy-dessus §. VIII. $F = \pi \pi \cdot \frac{E k k}{a a}$: or, cette valeur y étant substituée, nous



aurons $D\delta = \frac{\pi\pi}{3} . a$: donc, puisque $\pi\pi$ est à peu près $= 10$, il y auroit $D\delta = 3\frac{1}{3} . a = 3\frac{1}{3} . AC$; ce qui est sans doute impossible. Mais il faut observer, que dans ce calcul nous avons supposé l'inflexion quasi infiniment petite, & qu'il ne peut pas par conséquent être appliqué au cas présent, pour lequel si l'on achevoit le calcul selon toute la rigueur, on trouveroit l'espace $D\delta$ beaucoup plus petit. Cependant il est assez évident, que cette force étant appliquée horizontalement à la colonne, y produiroit une inflexion énorme, d'où l'on peut juger, combien grande doit être la force qu'une colonne est capable de soutenir verticalement.

XIV. Après ces réflexions je passe à la démonstration de cette règle, ou plutôt à l'analyse qui y conduit : car, puisque celle dont je me suis servi autrefois, est principalement appliquée aux lances élastiques, où j'ai eu à examiner plusieurs autres objets à la fois, il sera bon de donner ici une analyse qui y soit uniquement attachée, afin qu'on soit d'autant plus assuré, que la considération du ressort ne change rien dans la courbe qu'une colonne forme en se pliant. Je restreindrai cette recherche d'abord, comme j'ai fait autrefois, uniquement aux colonnes cylindriques, ou qui aient par toute leur longueur le même moment de roideur ; & ensuite je tâcherai de pousser ces mêmes recherches aux colonnes dont l'épaisseur est variable. Or on verra que ce problème étant généralement proposé surpasse les bornes de l'analyse, ce qui m'oblige de n'en développer que quelques cas particuliers, mais qui ne laisseront pas cependant de répandre beaucoup de lumière sur cette matière, & qui fourniront des réflexions assez importantes, tant sur le sujet même dont il s'agit, que sur l'analyse en général.

XV. Concevons donc une colonne cylindrique chargée d'un poids si grand, qui la fasse plier tant soit peu, & soit AMC la figure infiniment peu courbe, qu'elle aura prise. Posons la hauteur de la

Fig. 2.



colonne $\equiv a$, qui ne différera pas de la corde AC, que je suppose verticale, le poids du fardeau, dont elle est chargée en D $\equiv P$, & le moment de roideur en chaque endroit M $\equiv Ekk$. Maintenant la colonne est supposée reposer librement sur son piédestal par la base AB, sans y être affermie comme auparavant, où il s'agissoit de découvrir son moment de roideur, où un tel affermissement étoit nécessaire. La ligne verticale CA exprime donc la direction de la force P, qui produit cette inflexion : laquelle étant supposée infiniment petite, on pourra négliger le propre poids de la colonne, puisqu'il ne sauroit presque rien contribuer à l'inflexion : du moins je fais ici abstraction de son effet, pour rendre la question plus simple : me proposant d'examiner dans la suite, combien le propre poids de la colonne influe sur sa force.

XVI. Prenant maintenant sur la verticale une abscisse quelconque CA $\equiv x$, à laquelle réponde l'appliquée PM $\equiv y$, qui étant infiniment petite, l'abscisse x examinera en même tems l'arc CM ; & partant prenant l'élément dx constant le rayon de courbe en M fera $\equiv \frac{-dx^2}{ddy}$, puisque la courbe tourne sa concavité vers l'axe CA. Or la force P agissant dans la direction CA, son moment pour produire cette courbe en M fera $\equiv Py$: donc, en vertu du principe établi cy - dessus (§. 7.) nous aurons $\frac{-dx^2}{ddy} = \frac{Ekk}{Py}$, ou bien $\frac{Ekk}{p} ddy + ydx^2 = 0$. Multiplions par $2dy$ & l'intégrale fera $\frac{Ekk}{p} dy^2 + yydx^2 = Cdx^2$; ou $dx = \frac{dy\sqrt{Ekk}}{\sqrt{p(C-yy)}}$: pour déterminer la constante C, soit θ la tangente de l'angle infiniment petit PCM, & posant $y = 0$, il faut qu'il devienne $\frac{dy}{dx} = \theta$, donc $1 = \frac{\theta\sqrt{Ekk}}{\sqrt{pC}}$, de sorte que CP $\equiv Ekk\theta\theta$. Par conséquent
ayant



ayant $dx = \frac{dy \sqrt{Ekk}}{\sqrt{(Ekk\theta\theta - Pyy)}}$, l'intégration fournit :
 $x = \sqrt{\frac{Ekk}{P}} \cdot A \sin \frac{y\sqrt{P}}{\theta\sqrt{Ekk}}$, où il ne faut pas ajouter de constante
 puisque l'abscisse x doit évanouir en posant $y = 0$.

XVII. Par le renversement de cette équation nous tirons
 $\frac{y}{\theta} \sqrt{\frac{P}{Ekk}} = \sin x \sqrt{\frac{P}{Ekk}}$. Mais la nature de la question demande, qu'il devienne encore $y = 0$, en prenant $x = CA = a$, il faut donc que l'angle $a \sqrt{\frac{P}{Ekk}}$ soit égal à deux droits, & partant posant le rapport du diamètre à la circonférence $= 1 : \pi$, nous aurons
 $a \sqrt{\frac{P}{Ekk}} = \pi$, & par conséquent $P = \pi\pi \cdot \frac{Ekk}{aa}$. D'où nous apprenons que, pour faire plier infiniment peu la colonne, il faut que le poids dont elle est chargée soit $= \pi\pi \cdot \frac{Ekk}{aa}$: & de là il s'ensuit, que tant que le fardeau est moindre, la colonne ne sera assujettie à aucune inflexion, pas même infiniment petite. Or si l'on développe plus exactement le calcul, sans négliger la petite différence entre l'abscisse $CP = x$, & l'arc CM , on trouvera que pour que la tangente de l'angle PCM devienne $= \theta$, il faut que le poids P soit $= \pi\pi \cdot \frac{Ekk}{aa} \sqrt{(1 + \theta\theta)}$, cependant cette expression n'a lieu que tandis que θ est extrêmement petit.

XVIII. Voilà donc le dénouement complet du paradoxe rapporté cy-dessus : car puisqu'une inflexion qui répond à l'angle PCM , dont la tangente est supposée $= \theta$, demande un fardeau, dont le poids est $P = \pi\pi \cdot \frac{Ekk}{aa} \sqrt{(1 + \theta\theta)}$, il est évident, que cette force



doit être plus grande que $\pi\pi \cdot \frac{Ekk}{aa}$, de sorte que, tant qu'elle est plus petite, elle ne sauroit produire aucune inflexion, ou bien, si $P < \pi\pi \cdot \frac{Ekk}{aa}$, l'on voit que la quantité θ , qui détermine la grandeur de l'inflexion, deviendrait imaginaire, comme j'ai remarqué cy-dessus. Au reste on voit, que la courbe CMA est la trochoïde infiniment allongée, ou bien la ligne des *sinus*; quoique notre dessein n'exige pas la connoissance de cette courbe. Cependant il auroit été impossible de parvenir à notre conclusion, sans le secours de l'équation qui exprime la nature de cette courbe.

XIX. Il ne fera pas plus difficile de parvenir à une équation pour ces courbes, lorsque la colonne n'a pas partout la même épaisseur, mais qu'elle varie d'une manière quelconque; on la pourra considérer comme une certaine fonction de l'arc CM, ou bien de l'abscisse $CP = x$. Soit donc le moment de roideur en $M = EkkX$, où X marque une fonction quelconque de x ; & au lieu de l'équation trouvée pour le cas précédent, nous aurons celle-cy :

$$\frac{-dx^2}{ddy} = \frac{EkkX}{Py}, \text{ ou bien } \frac{Ekk}{P} \cdot Xddy + ydx^2 = 0,$$

qui posant $y = e^{\int u dx}$ se change en celle-cy :

$$du + uu dx + \frac{Pdx}{EkkX} = 0.$$

Or on sait qu'il est impossible de résoudre celle équation en général, ce qui m'oblige de borner mes recherches à des cas particuliers, dont la résolution est connue : qui sont, lorsque X est une puissance de x , ou bien de $a + bx$ dont l'exposant est compris dans cette série ;

$$0 ; 4 ; \frac{4}{3} ; \frac{8}{3} ; \frac{8}{5} ; \frac{12}{5} ; \frac{12}{7} ; \frac{16}{7} ; \frac{16}{9} ; \text{ \&c.}$$



XX. Supposons donc premièrement $X = \left(a + \frac{\xi x}{a}\right)^4$, de sorte que le moment de roideur en M soit $= Ekk \left(a + \frac{\xi x}{a}\right)^4$, & l'équation pour la courbe :

$$\frac{Ekk}{P} \left(a + \frac{\xi x}{a}\right)^4 ddy + y dx^2 = 0.$$

Poisons pour abrégier $a + \frac{\xi x}{a} = s$, & $\frac{Paa}{\xi \xi Ekk} = nn$, & nous aurons : $s^4 ddy + nny ds^2 = 0$, où l'élément ds est constant.

Soit $y = b e^{\int u ds}$ pour obtenir cette équation :

$$du + u u ds + \frac{n n ds^2}{s^4} = 0,$$

dont l'intégrale complete est $u = \frac{1}{s} - \frac{n}{s s} \cot. \left(\zeta + \frac{n}{s}\right)$,

où ζ est la constante arbitraire. Maintenant ayant

$\int u ds = \log s + \sin \left(\zeta + \frac{n}{s}\right)$, on obtiendra $y = b s \sin \left(\zeta + \frac{n}{s}\right)$,

ou bien $y = \frac{b}{a} (aa + \xi x) \sin \left(\zeta + \frac{na}{aa + \xi x}\right)$.

XXI. Puisque posant $x = 0$, & $x = a$, il faut que y évanouisse, nous en déterminerons d'abord la constante $\zeta = -\frac{n}{a}$,

de sorte que $y = \frac{b}{a} (aa + \xi x) \sin \frac{n \xi x}{a(aa + \xi x)}$: où il faut re-

marquer qu'il est indifférent de prendre n positivement ou négativement, puisque dans l'équation différentio-différentielle il ne se trouve que le carré nn : d'ailleurs on pourroit aussi donner à b une valeur négative. Mais, pourque y évanouisse en posant $x = a$, il est clair qu'il doit



doit être $\frac{n \mathfrak{G} a}{a(a + \mathfrak{G} a)} = \pi = \frac{n \mathfrak{G}}{a(a + \mathfrak{G})}$, donc $n = \frac{\pi a(a + \mathfrak{G})}{\mathfrak{G}}$.

Or notre supposition donne $P = \frac{a a}{n n \mathfrak{G} \mathfrak{G}} \cdot E k k$, & partant

$$P = \frac{\pi \pi a a (a + \mathfrak{G})^2}{a a} \cdot E k k,$$

le moment de roideur en M étant $= E k k \left(a + \frac{\mathfrak{G} x}{a} \right)^4$.

Donc une telle colonne demeurera ferme tant que le fardeau qu'elle soutient, est moindre que $\frac{\pi \pi a a (a + \mathfrak{G})^2}{a a} \cdot E k k$: si $a = 1$, & $\mathfrak{G} = 0$, nous avons le cas, où la colonne est par route la longueur également épaisse.

XXII. Cette formule nous donne à connoître, que si $a = 0$, ou $\mathfrak{G} = -a$, il devient $P = 0$: dans le premier cas le moment de roideur évanouit en haut, & dans l'autre en bas; d'où nous voyons qu'une colonne pointue tant en haut qu'en bas n'a aucune force. Mais supposons l'épaisseur en haut telle, qu'il lui réponde le moment de roideur $E k k$; & nous aurons $a = 1$, & le moment de roideur en bas sera $= E k k (a + \mathfrak{G})^4 = E k k (1 + \mathfrak{G})^4$; & partant plus grand: or la charge de cette colonne étant $= \frac{\pi \pi (1 + \mathfrak{G})^2}{a a} \cdot E k k$

on voit que cet élargissement en bas contribue considérablement à augmenter la force de la colonne. Si le diamètre de la base d'en haut est $= f$, & de celle d'en bas $= h$, à cause de $f^3 : h^3 = 1 : (1 + \mathfrak{G})^4$; nous aurons $(1 + \mathfrak{G})^2 = \frac{h \sqrt{h}}{f \sqrt{f}}$, & partant s'il y avoit $h = 2f$, la force de la colonne seroit $2 \sqrt{2}$, ou bien 3 fois plus grande, que si l'épaisseur étoit partout égale à celle d'en haut.



XXIII. Laissons $\alpha + \frac{6x}{a} = s$, & $\frac{P_{a,a}}{66.Ekk} = nn$; & soit plus généralement le moment de roideur en $M = Ekk.s^{4\lambda}$, ce qui nous fournit cette équation : $s^{4\lambda} dd\gamma + nnyds^2 = 0$, où λ soit un tel nombre, qui rende l'équation intégrable. Or, pour découvrir cette intégrale, mettons $-mm$ pour nn , puisque sans cela nous tomberions en des expressions imaginaires : & posons

$y = e^{\frac{-m:(2\lambda-1)s}{2\lambda-1}}$, pour avoir cette équation transformée :

$$ddz + \frac{2msds}{s^{2\lambda}} - \frac{2\lambda mzsds^2}{s^{2\lambda+1}} = 0$$

pour laquelle supposons :

$$z = As^\lambda + Bs^{3\lambda-1} + Cs^{5\lambda-2} + Ds^{7\lambda-3} + Es^{9\lambda-4} + \&c.$$

& la substitution fournira les déterminations suivantes

$$B = -\frac{\lambda(\lambda-1)A}{2(2\lambda-1)m}; \quad C = +\frac{\lambda(\lambda-1)(3\lambda-1)(3\lambda-2)A}{2.4(2\lambda-1)^2mm}$$

$$D = -\frac{\lambda(\lambda-1)(3\lambda-1)(3\lambda-2)(5\lambda-2)(5\lambda-3)A}{2.4.6(2\lambda-1)^3m^3} \&c.$$

XXIV. Puisque $m = n\sqrt{-1}$, tant l'expression exponen-

tielle $e^{\frac{-m}{2\lambda-1}s^{2\lambda-1}}$ que les coefficients $B, D, F, \&c.$ seront imaginaires. Donc, posant pour abréger $(2\lambda-1)s^{2\lambda-1} = v$,

nous aurons $e^{\frac{-n\sqrt{-1}}{v}} = \cos \frac{n}{v} - \sqrt{-1} \sin \frac{n}{v}$. Ensuite soit



$$\frac{\lambda(\lambda-1)}{2(2\lambda-1)} = \mathfrak{A}; \quad \frac{(3\lambda-1)(3\lambda-2)}{4(2\lambda-1)} = \mathfrak{B}; \quad \frac{(5\lambda-2)(5\lambda-3)}{6(2\lambda-1)} = \mathfrak{C};$$

& notre intégrale sera :

$$y = A \left(\cos \frac{n}{v} - \sqrt{-1} \sin \frac{n}{v} \right) \left(s^{\lambda} + \frac{\mathfrak{A}\sqrt{-1}}{n} s^{3\lambda-1} - \frac{\mathfrak{A}\mathfrak{B}}{nn} s^{5\lambda-2} - \frac{\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}\sqrt{-1}}{n^3} s^{7\lambda-3} \&c. \right)$$

Or, puisque nous pouvons prendre avec autant de raison n négatif, il y aura également :

$$y = A' \left(\cos \frac{n}{v} + \sqrt{-1} \sin \frac{n}{v} \right) \left(s^{\lambda} - \frac{\mathfrak{A}\sqrt{-1}}{n} s^{3\lambda-1} - \frac{\mathfrak{A}\mathfrak{B}}{nn} s^{5\lambda-2} + \frac{\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}\sqrt{-1}}{n^3} s^{7\lambda-3} \&c. \right)$$

Mais il est aisé de voir, que si chacune de ces deux formules satisfait séparément à l'équation différentio-différentielle proposée, leur somme lui doit satisfaire également. Donc leur somme fournira l'intégrale complète de notre équation, puisqu'elle renferme deux constantes arbitraires A & A' .

XXV. Mais, pour délivrer cette expression des imaginaires, il faut donner aux constantes A & A' des valeurs imaginaires : soit donc $A = M + N\sqrt{-1}$, & $A' = M - N\sqrt{-1}$, par ce moyen la somme des deux expressions trouvées, & partant l'intégrale complète, sera exprimée en sorte :

$$y = +2 \left(M \cos \frac{n}{v} + N \sin \frac{n}{v} \right) \left(s^{\lambda} - \frac{\mathfrak{A}\mathfrak{B}}{nn} s^{5\lambda-2} + \frac{\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}\mathfrak{D}}{n^4} s^{9\lambda-4} - \&c. \right) \\ - 2 \left(N \cos \frac{n}{v} - M \sin \frac{n}{v} \right) \left(\frac{\mathfrak{A}}{n} s^{3\lambda-1} - \frac{\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}}{n^3} s^{7\lambda-3} + \frac{\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}\mathfrak{D}\mathfrak{E}}{n^5} s^{11\lambda-5} - \&c. \right)$$

Soit $M = \frac{1}{2} b \sin \zeta$, & $N = \frac{1}{2} b \cos \zeta$, pour avoir

$$y = b \sin \left(\zeta + \frac{n}{v} \right) \left(s^{\lambda} - \frac{\mathfrak{A}\mathfrak{B}}{nn} s^{5\lambda-2} + \frac{\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}\mathfrak{D}}{n^4} s^{9\lambda-4} - \&c. \right) \\ - b \cos \left(\zeta + \frac{n}{v} \right) \left(\frac{\mathfrak{A}}{n} s^{3\lambda-1} - \frac{\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}}{n^3} s^{7\lambda-3} + \frac{\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}\mathfrak{D}\mathfrak{E}}{n^5} s^{11\lambda-5} - \&c. \right)$$

Qu'on



Qu'on pose de plus pour abrégé :

$$s^\lambda - \frac{\mathfrak{A}\mathfrak{B}}{n^2} s^{5\lambda-2} + \frac{\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}\mathfrak{D}}{n^4} s^{9\lambda-4} - \&c. = R$$

$$\frac{\mathfrak{A}}{n} s^{3\lambda-1} - \frac{\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}}{n^3} s^{7\lambda-3} + \frac{\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}\mathfrak{D}\mathfrak{E}}{n^5} s^{11\lambda-5} - \&c. = Q,$$

& qu'on introduise l'angle ϕ , dont $\text{tang } \phi = \frac{Q}{R}$, & on aura enfin

$$y = b\sqrt{(RR + QQ)} \cdot \sin\left(\zeta + \frac{n}{v} - \phi\right).$$

XXVI. Maintenant la solution de notre problème, par lequel nous cherchons la force P capable de faire plier la colonne, dont la hauteur $AC = a$, & le moment de roideur dans un endroit quelconque $M = Ekk\left(a + \frac{\epsilon x}{a}\right)^{4\lambda}$ nommant $CP = x$, s'achevera en sorte. Premièrement on pose $x = 0$, ou $s = a$, & ayant déterminé pour ce cas les quantités v & ϕ , on déterminera l'angle constant $\zeta = \phi - \frac{n}{v}$. Ensuite on mettra $x = a$, & $s = a + \epsilon$, & après avoir conformément déterminé les quantités v & ϕ , il faut que l'angle $\zeta + \frac{n}{v} - \phi$ devienne $= \pi$, d'où l'on tirera la valeur de n ; & de là enfin la force cherchée $P = \frac{n\epsilon\epsilon}{aa} \cdot Ekk$. Si

l'on pose $\lambda = 0$, ce qui est le cas des colonnes également épaisses, on a $v = -\frac{1}{s}$; $\mathfrak{A} = 0$, $\mathfrak{B} = 0$, &c. donc $R = 1$ & $Q = 0$,

par conséquent $\phi = 0$, & $\zeta + \frac{n}{v} - \phi = \zeta - ns$. Donc $\zeta - na = 0$ & $\zeta - n(a + \epsilon) = \pi$, & partant $-n\epsilon = \pi$.



d'où il s'ensuit comme cy-dessus la force $P = \frac{\pi \pi}{aa} . E k k$. Si $\lambda = 1$, on aura le cas déjà développé, où le moment de roideur étoit $= E k k \left(a + \frac{6x}{a} \right)^4$, & pour quelques autres ajoutons les exemples suivans

I E X E M P L E.

XXVII. La hauteur de la colonne AC étant $= a$, & le moment de roideur en M $= E k k \left(a + \frac{6x}{a} \right)^4$, à cause de $\lambda = 1$, nous aurons $v = s$; $\mathcal{U} = 0$, $\mathcal{V} = 0$, &c. donc $R = s$ & $Q = 0$, & partant $\text{rang } \phi = \frac{Q}{R} = 0$, ou $\phi = 0$. Notre angle $\zeta + \frac{n}{v} = \phi$ fera donc $= \zeta + \frac{n}{s}$, & partant $\zeta = -\frac{n}{a}$. Faisons maintenant $s = a + 6$, & posons $-\frac{n}{a} + \frac{n}{a+6} = \pi = -\frac{n6}{a(a+6)}$; d'où nous tirons $n6 = -\pi a(a+6)$. Par conséquent la force capable de faire plier la colonne fera $P = \frac{\pi \pi a^2 (a+6)^2}{aa} . E k k$ tout comme nous l'avons trouvée cy-dessus.

2 E X E M P L E.

XXVIII. Soit $\lambda = \frac{1}{3}$, & la hauteur de la colonne étant AC $= a$, le moment de roideur en M fera $= E k k \left(a + \frac{6x}{a} \right)^{\frac{4}{3}}$. Pour ce cas nous aurons $v = -\frac{1}{3}s^{-\frac{1}{3}} = \frac{-1}{3\sqrt[3]{s}}$, & $\mathcal{U} = \frac{1}{3}$, $\mathcal{V} = 0$, donc $R = s^{\frac{1}{3}}$ & $Q = \frac{1}{3n}$, & partant $\text{rang } \phi = \frac{1}{3n\sqrt[3]{s}}$, ou bien



bien $\phi = \Lambda \operatorname{tang} \frac{1}{3n\sqrt[3]{s}}$. Maintenant notre angle étant

$\zeta + \frac{n}{s} - \phi = \zeta - 3n\sqrt[3]{s} - \Lambda \operatorname{tang} \frac{1}{3n\sqrt[3]{s}}$, si nous posons

$x = 0$, ou $s = a$ pour le point C, nous aurons l'angle constant

$\zeta = 3n\sqrt[3]{a} + \Lambda \operatorname{tang} \frac{1}{3n\sqrt[3]{a}}$. Soit à présent pour l'autre bout

A, $s = a + \epsilon$, & notre angle doit devenir $= \pi$, ce qui donne

$$3n\sqrt[3]{a} + \Lambda \operatorname{tang} \frac{1}{3n\sqrt[3]{a}} - 3n\sqrt[3]{a + \epsilon} - \Lambda \operatorname{tg} \frac{1}{3n\sqrt[3]{a + \epsilon}} = \pi,$$

d'où l'on doit déterminer la valeur du nombre n , & alors le poids

cherché P, qui est capable de faire plier la colonne, sera

$P = \frac{nn\epsilon\epsilon}{aa}.Ekk$. Puisqu'il est difficile de trouver en général la

valeur de n , soit $a = 1$, & ϵ extrêmement petit, & puisque alors

$$\sqrt[3]{a + \epsilon} = 1 + \frac{1}{3}\epsilon, \text{ \&}$$

$$\Lambda \operatorname{tang} \frac{1}{3n\sqrt[3]{a}} - \Lambda \operatorname{tang} \frac{1}{3n\sqrt[3]{a + \epsilon}} = \Lambda \operatorname{tang} \frac{3n\sqrt[3]{a + \epsilon} - 3n\sqrt[3]{a}}{1 + 9nn\sqrt[3]{a(a + \epsilon)}},$$

nous aurons: $-n\epsilon + \Lambda \operatorname{tang} \frac{n\epsilon}{1 + 9nn} = \pi = -\frac{9n^3\epsilon}{1 + 9nn}$,

d'où l'on voit que le nombre n est extrêmement grand: & partant

assez près $-n\epsilon = \pi + \frac{\epsilon\epsilon}{9\pi}$, de sorte que $P = \left(\pi + \frac{\epsilon\epsilon}{9\pi}\right)^2 \frac{Ekk}{aa}$.

Mais, en poursuivant plus exactement les approximations, on aura

$P = \pi\pi \left(1 + \frac{\epsilon}{3}\right)^2 \frac{Ekk}{aa}$, ou $P = \pi\pi \left(1 + \frac{2}{3}\epsilon\right) \frac{Ekk}{aa}$, le

moment de roideur étant en C $= Ekk$, & en A $= \left(1 + \frac{4}{3}\epsilon\right).Ekk$.



XXIX. Puisque nous voyons, que si ϵ est un nombre fort petit par rapport à a , le nombre n devient très grand, les arcs seront à peu près égaux à leur tangentes, & partant nous aurons

$$3^n \sqrt[3]{a} - 3^n \sqrt[3]{(a + \epsilon)} + \frac{1}{3^n \sqrt[3]{a}} - \frac{1}{3^n \sqrt[3]{(a + \epsilon)}} = \pi,$$

d'où nous tirons assez près $n = \frac{\pi}{3 \sqrt[3]{(a + \epsilon)} - 3 \sqrt[3]{a}}$, & par-

tant $P = \frac{\pi \pi \epsilon \epsilon}{9 [\sqrt[3]{(a + \epsilon)} - \sqrt[3]{a}]^2} \cdot \frac{E k k}{a n}$. Or, si ϵ étoit plus grand, cette formule tromperoit: cependant l'erreur ne sera pas considérable, tant que ϵ n'excede pas considérablement a . Pour prouver cela, soit

$$\epsilon = a, \text{ \& selon cette règle on auroit } n = \frac{\pi}{3 \sqrt[3]{2a} - 3 \sqrt[3]{a}} = \frac{4,0289}{\sqrt[3]{a}}.$$

$$\text{Or faisant le calcul on trouve } n = \frac{4,0505}{\sqrt[3]{a}}, \text{ \& } P = 16,4065 a \sqrt[3]{a} \cdot \frac{E k k}{a n}.$$

$$\text{Donc si } a = 1, \text{ \& le moment de roideur en } M = \left(1 + \frac{x}{a}\right)^{\frac{4}{3}} \cdot E k k,$$

$$\text{le poids, que cette colonne peut soutenir fera } P = 16,4065 \cdot \frac{E k k}{a n}.$$

$$\text{Or, si le moment de roideur étoit } = \left(1 + \frac{x}{a}\right)^4 \cdot E k k, \text{ ce poids se trou-}$$

$$\text{ve } P = 39,47844 \cdot \frac{E k k}{a n} : \text{ mais pour le cas du moment de roideur}$$

$$\text{constant } = E k k, \text{ on a } P = 9,86961 \cdot \frac{E k k}{a n}.$$

3. E X E M P L E.

XXX. Soit $\lambda = \frac{2}{3}$, ou la hauteur de la colonne étant $AC = a$,

le moment de roideur en $M = \left(a + \frac{\epsilon x}{a}\right)^{\frac{8}{3}} \cdot E k k$, & pour ce cas nous

au.



aurons $v = \frac{1}{3} \sqrt[3]{s}$, $\mathfrak{A} = -\frac{1}{3}$, $\mathfrak{B} = 0$, donc $R = \sqrt[3]{s s}$,
 & $Q = -\frac{1}{3n} s$, & partant $\text{tang } \phi = -\frac{\sqrt[3]{s}}{3n}$, par conséquent no-
 tre angle $= \zeta + \frac{3n}{\sqrt[3]{s}} + A \text{ tang } \frac{\sqrt[3]{s}}{3n}$. Soit $s = a$, & nous au-
 rons $\zeta = -\frac{3n}{\sqrt[3]{a}} - A \text{ tang } \frac{\sqrt[3]{a}}{3n}$. De plus posant $s = a + \epsilon$,
 il faut qu'il devienne :

$$-\frac{3n}{\sqrt[3]{a}} + \frac{3n}{\sqrt[3]{a+\epsilon}} - A \text{ tang } \frac{\sqrt[3]{a}}{3n} + A \text{ tang } \frac{\sqrt[3]{a+\epsilon}}{3n} = \pi,$$

où il est encore évident, que si ϵ est fort petit par rapport à a , le
 nombre n sera fort grand, & partant il y aura fort exactement

$$nn = + \frac{\pi \pi \sqrt[3]{a a} (a + \epsilon)^2}{9 [\sqrt[3]{a+\epsilon} - \sqrt[3]{a}]^2}, \text{ donc le poids que la colonne est ca-}$$

$$\text{pable de soutenir sera : } P = \frac{\pi \pi \epsilon \epsilon \sqrt[3]{a a} (a + \epsilon)^2 E k k}{9 [\sqrt[3]{a+\epsilon} - \sqrt[3]{a}]^2 \cdot a a}.$$

Mais, quand ϵ surpasse a , il faut déterminer plus exactement le
 nombre n .

4 EXEMPLE.

XXX. Les autres cas où notre équation peut-être résoluë, con-
 duiroient à des formules trop compliquées. Mais il y a encore un
 cas bien remarquable, quand $\lambda = \frac{1}{2}$, où le moment de roideur en
 $M = \left(a + \frac{\epsilon x}{a}\right)^2 E k k$; puisqu'alors notre équation différentio-

différentielle posant $a + \frac{\epsilon x}{n} = s$ devient homogene $s s d d y +$
 $n n y d s^2 = 0$, à laquelle doit satisfaire une certaine puissance de s .

Posons donc $y = s^\mu$, & l'exposant μ se déterminera par cette équation
 $\mu(\mu - 1) + nn = 0$, d'où l'on tire $\mu = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{1}{4} - nn\right)}$,
 &



& cette double valeur nous fournit l'intégrale complète :

$$y = A s^{\frac{1}{2}} + V(\frac{1}{4} - nn) + B s^{\frac{1}{2}} - V(\frac{1}{4} - nn).$$

Ici il est clair, que si $V(\frac{1}{4} - nn)$ est réel, ou $nn < \frac{1}{4}$, il est impossible que y évanouisse dans les deux cas $s = a$, & $s = a + \epsilon$.

D'où il s'ensuit que si $nn < \frac{1}{4}$, une force $P = nn \epsilon \epsilon \cdot \frac{E k k}{a a}$, n'est pas capable de faire plier la colonne. Il en est encore de même si $nn = \frac{1}{4}$, auquel cas l'intégrale est $y = (A + B/s) V s$.

XXXII. Soit donc $nn > \frac{1}{4}$ & $V(nn - \frac{1}{4}) = v$, ou $nn = vv + \frac{1}{4}$,

& notre intégrale étant $y = (A s^{+v} V^{-1} + B s^{-v} V^{-1}) V s$, les exposans imaginaires se réduisent en cette forme :

$$y = [(A + B) \cos. v/s + (A - B) V - 1. \sin v/s] V s,$$

& changeant les constantes nous aurons : $y = b \sin (\zeta + v/s). V s$.

Or la position $s = a$ donne $\zeta = -v/a$, & posant $s = a + \epsilon$, il faut qu'il soit $-v/a + v/(a + \epsilon) = \pi = v \left(1 + \frac{\epsilon}{a} \right)$,

$$\text{donc } v = \frac{\pi}{1 + \frac{\epsilon}{a}} \quad \& \quad nn = \frac{1}{4} + \frac{\pi \pi}{[1 + \frac{\epsilon}{a}]^2},$$

& cette valeur de nn étant la force cherchée sera

$$P = \left(\frac{1}{4} + \frac{\pi \pi}{[1 + \frac{\epsilon}{a}]^2} \right) \epsilon \epsilon \cdot \frac{E k k}{a a},$$

ou toute force moindre que celle - cy ne produira aucune inflexion.



XXXIII. Ces cas peuvent suffire pour juger de la force des colonnes non cylindriques, pourvu que leur figure ne s'écarte pas très considérablement de celles qui répondent aux cas développés. Si la figure ne diffère pas beaucoup d'un cylindre, tous ces cas aboutissent au même résultat : car soit le moment de roideur en haut en $C = Ekk$, & celui d'en bas en $A = mm Ekk$, où m soit un nombre peu différent de l'unité ; & nous aurons dans tous nos exemples $\alpha = 1$. Or si la figure répond au premier exemple, nous aurons $(1 + \epsilon)^4 = mm$, donc $(1 + \epsilon)^2 = m$. Donc cette colonne pourra soutenir sans se plier un poids $P = \pi \pi m \cdot \frac{Ekk}{aa} = 9,86961 m \cdot \frac{Ekk}{aa}$.

Mais, si elle convient avec le second exemple, à cause de $(1 + \epsilon)^{\frac{4}{3}} = mm$ & $1 + \epsilon = m^{\frac{3}{2}}$, ce poids sera

$$P = \frac{\pi \pi (m^{\frac{3}{2}} - 1)^2 Ekk}{9 (\sqrt{m} - 1)^2 aa} = \frac{5}{9} \pi \pi (m + \sqrt{m} + 1)^2 \cdot \frac{Ekk}{aa} ;$$

& partant, si $m = 1 + \omega$, de sorte que ω soit fort petit, on aura $P = \pi \pi (1 + \omega) \cdot \frac{Ekk}{aa}$: ce même accord se trouve aussi dans les autres exemples. Mais, si m n'est pas si près de l'unité, le premier exemple demeure dans son entier, mais le quatrième donne

$$P = (m - 1)^2 \left(\frac{1}{4} + \frac{\pi \pi}{(lm)^2} \right) \cdot \frac{Ekk}{aa}, \text{ à cause de } 1 + \epsilon = m.$$

XXXIV. Si la colonne a la figure d'un cône tronqué, & que le diamètre de la base d'en haut soit $= f$, & de celle d'en bas $= h$, le diamètre de son épaisseur en M sera $= f + \frac{(h - f)x}{a}$. Donc, po-

sant le moment de roideur en haut $= Ekk$, si le moment de roideur étoit comme le quarré-quarré du diamètre de l'épaisseur, nous aurions le cas du premier exemple, & le poids, que la colonne peut



soutenir sans se plier seroit $P = \frac{\pi \pi h h}{f f} \cdot \frac{E k k}{a a}$. Mais, si le moment de roideur étoit comme le cube du diametre de l'épaisseur, le moment de roideur en M sera $= E k k \left(1 + \frac{(h-f)x}{f a} \right)^3$, auquel cas notre calcul ne peut pas être appliqué. Mais, si h diffère fort peu de f , puisqu'il y aura fort à peu près

$$\left(1 + \frac{(h-f)x}{f a} \right)^3 = 1 + \frac{3(h-f)x}{f a} = \left(1 + \frac{3(h-f)x}{4 f a} \right)^4.$$

Le premier exemple, à cause de $a = 1$, & $\epsilon = \frac{3(h-f)}{4 f}$, donne le poids, que cette colonne peut encore soutenir sans se plier

$$P = \frac{\pi \pi (3 h - f)^2}{16 f f} \cdot \frac{E k k}{a a}.$$

Or ce cas étant pareillement appliqué au quatrième exemple, où l'on auroit $\epsilon = \frac{3(h-f)}{2 f}$, on trouve-

$$\text{roit ce poids } P = \frac{9(h-f)^2}{4 f f} \left(\frac{1}{4} + \frac{\pi \pi}{(1 + \frac{3 h - f}{2 f})^2} \right) \cdot \frac{E k k}{a a}.$$

la lettre a marquant la hauteur de la colonne.

XXXV. Quoique ces deux expressions deviennent d'accord si la différence $h - f$ est extrêmement petite, elles s'écartent sensiblement, lorsque cette différence $h - f$ est considérable, la dernière donnant une valeur plus petite pour P . Cependant, comme la véritable formule $\left(1 + \frac{(h-f)x}{f a} \right)^3$, tient un milieu entre celles qui repondent à nos deux exemples, il est certain que la valeur de P tirée du premier exemple est trop grande, & l'autre trop petite, de sorte qu'en prenant en chaque cas un milieu, on approchera fort de la vérité



vérité. Ainsi, s'il étoit $h = 2f$ la première formule donneroit $P = 30,22568 \cdot \frac{Ekk}{aa}$, & la seconde $P = 27,01186 \cdot \frac{Ekk}{aa}$, donc prenant un milieu il y aura fort à peu près $P = 28\frac{1}{2} \cdot \frac{Ekk}{aa}$. Or la pratique ne demande jamais un tel degré de précision.

XXVI. Examinons enfin aussi, combien le propre poids d'une colonne contribue à la plier : dans cette recherche je considérerai la colonne comme cylindrique, dont la hauteur soit, comme jusqu'ici, $AC = a$, & soit Q le poids de toute la colonne, P étant celui du fardeau dont elle est chargée. Rapportons l'inflexion qui en naît à celle de l'axe de la colonne, puisqu'il passe par les centres de gravité de toutes les sections. Soit donc CMA la figure de cet axe courbé, dont la courbure soit infiniment petite, & le moment de roideur partout $= Ekk$. Nommant maintenant $CP = x$ & $PM = y$, le rayon de courbure en M fera $= -\frac{dx^2}{ddy}$, prenant dx pour constant ; & le moment de la force P pour produire cette inflexion fera $= Py$, auquel il faut ajouter le moment qui résulte du poids de la partie CM . Or la longueur CM étant $= x$, le poids de la partie CM fera $= \frac{Qx}{a}$: lequel doit être conçu ramassé au centre de gravité de la partie CM , mais cette considération meneroit à un calcul trop ennuyant.

Fig. 3.

XXXVII. Envisageons pour un moment le point M comme fixe, par rapport auquel le point Y soit variable, & nommons $CX = CY = X$ & $XY = Y$. Maintenant, quel que soit le moment du poids de l'arc CY sur le point M , son différentiel sera égal au poids de l'élément $Yy = \frac{QdX}{a}$ par $y - Y$, c'est à dire

$$= \frac{QdX}{a} (y - Y) = \frac{Q}{a} (yX - YdX).$$

Avan-



Avançons à présent le point Y jusqu'en M, & à cause de $X = x$ & $Y = y$, le moment du poids de la partie, qui répond à l'arc

$$CM \text{ fera } = \frac{Q}{a} (xy - \int y dx) = \frac{Q}{a} \int x dy,$$

qui étant ajouté au moment déjà trouvé Py , donne le moment total
 $= Py + \frac{Q}{a} \int x dy$, d'où nous tirons pour la courbe cette équation :

$$Ek k = - \frac{dx^2}{a dy} (P ay + Q \int x dy),$$

ou bien $Ek k a dy + P ay dx^2 + Q dx^2 \int x dy = 0$,

laquelle étant encore différenciée pour la dégager de l'intégral $\int x dy$ donne $Ek k a d^2 y + P a dx^2 dy + Q x dx^2 dy = 0$.

XXXVIII. Posons pour abréger $1 + \frac{Qx}{Pa} = s$, & l'élément

ds fera maintenant constant. Donc, à cause de $dx = \frac{Pa ds}{Q}$, notre équation prendra cette forme :

$$\frac{QQ}{P^3} \cdot \frac{Ek k}{aa} d^3 y + s ds^2 dy = 0.$$

Soit $dy = u ds$, & à cause de $d^3 y = ds ddu$ nous aurons

$$\frac{QQ}{P^3} \cdot \frac{Ek k}{aa} ddu + u s ds^2 = 0,$$

laquelle se peut bien réduire à une équation simplement différentielle en posant $u = e^{\int v ds}$, & on parviendra à celle-cy :

$$dv + v v ds + \frac{P^3 aa}{Q^2 Ek k} \cdot s ds = 0,$$

qui est un tel cas de l'équation de Riccati, qu'on s'est donné jusqu'ici en vain la peine de l'intégrer : & partant on n'en attendra pas ici le dénouement.

XXXIX.



XXXIX. Cependant, quand le poids Q est très petit par rapport au poids P , ce qui arrivera presque toujours, puisqu'une colonne peut toujours porter un poids, qui surpasse plusieurs fois son propre poids, avant que de plier : dans ces cas il ne sera pas difficile d'approcher de la solution. Car, puisque $s = 1 + \frac{Qx}{Pa}$ diffère fort peu de l'unité, & que cette quantité est presque constante ; cette considération nous fournit l'approximation suivante. Posons pour abrégé : $\frac{Pa}{Ekk} = nn$ & $\frac{Q}{P} = m$, nombre très petit, & notre équation donnant $\int x dy = -\frac{ny}{m} - \frac{a^3 ddy}{nn dx^2}$, ce sera une condition à remplir dans les intégrations suivantes, que $\int x dy$ évanouisse en posant $a = 0$. Or différentiant encore nous aurons :

$$(a + mx) dy + \frac{a^3 d^3 y}{nn dx^2} = 0,$$

& faisant $dy = u dx$ celle - cy :

$$(a + mx) u + \frac{a^3 ddu}{nn dx^2} = 0.$$

XL. S'il étoit $m = 0$, l'intégrale complète feroit $u = a \sin \left(\zeta + \frac{nx}{a} \right)$. Mais, puisque m est très petit, on pourra envisager $1 + \frac{mx}{a}$ comme étant $= \left(1 - \frac{mx}{4a} \right)^4$, de sorte qu'on ait

$$nn u dx^2 + a a ddu \left(1 - \frac{mx}{4a} \right)^4 = 0,$$

dont l'intégrale complète est

$$u = C \left(1 - \frac{mx}{4a} \right) \sin \left(\zeta + \frac{16 a n}{m(4a - mx)} \right) = \frac{dy}{dx},$$



& partant

$$\frac{du}{dx} = \frac{ddy}{dx^2} = -\frac{Cm}{4a} \sin\left(\zeta + \frac{16an}{m(4a-mx)}\right) + \frac{4nC}{4a-mx} \cos\left(\zeta + \frac{16an}{m(4a-mx)}\right).$$

Mais en intégrant

$$y = \frac{C}{4a} \int (4a-mx) dx \sin\left(\zeta + \frac{16an}{m(4a-mx)}\right),$$

ce qu'il faut déterminer par approximation.

XLI. D'abord, puisque m est très petit, on aura

$$\frac{16an}{m(4a-mx)} = \frac{4n}{m} + \frac{nx}{a} + \frac{mnxx}{4aa}. \text{ Donc posant } \zeta + \frac{4n}{m} = \theta;$$

$$u = C \left(1 - \frac{mx}{4a}\right) \sin\left(\theta + \frac{nx}{a} + \frac{mnxx}{4aa}\right), \quad \text{ou}$$

$$u = C \left(1 - \frac{mx}{4a}\right) \sin\left(\theta + \frac{nx}{a}\right) + \frac{mnCxx}{4aa} \cos\left(\theta + \frac{nx}{a}\right) = \frac{dy}{dx}$$

& en différentiant

$$\begin{aligned} \frac{du}{dx} = \frac{ddy}{dx^2} = & -\frac{mC}{4a} \sin\left(\theta + \frac{nx}{a}\right) + \frac{nC}{a} \left(1 + \frac{mx}{4a}\right) \cos\left(\theta + \frac{nx}{a}\right) \\ & - \frac{mnCxx}{4a^3} \sin\left(\theta + \frac{nx}{a}\right). \end{aligned}$$

Mais, puisque y évanouit au cas $x=0$, il faut que $\frac{ddy}{dx^2}$ évanouisse aussi : ce qui donne

$$-\frac{m}{4} \sin \theta + n \cos \theta = 0, \quad \text{donc} \quad \tan \theta = \frac{4n}{m}.$$

En-



Ensuite nous trouverons :

$$y = \int u dx = -\frac{Ca}{n} \operatorname{cof}\left(\theta + \frac{nx}{a}\right) + \frac{3mCx}{4n} \operatorname{cof}\left(\theta + \frac{nx}{a}\right) - \frac{3mCa}{4nn} \sin\left(\theta + \frac{nx}{a}\right) \\ + \frac{mCx}{4a} \sin\left(\theta + \frac{nx}{a}\right) + \frac{Ca}{n} \operatorname{cof} \theta + \frac{3mCa}{4nn} \sin \theta,$$

ayant ajouté une telle constante, que y évanouisse quand on met $x = 0$.

XII. Maintenant, posant $x = a$, il faut qu'il devienne encore $y = 0$, d'où l'on parvient à cette équation :

$$0 = -\frac{1}{n}(\theta + n) + \frac{1}{n} \operatorname{cof} \theta + \frac{3m}{4n} \operatorname{cof}(\theta + n) - \frac{3m}{4nn} \sin(\theta + n) \\ + \frac{3m}{4nn} \sin \theta + \frac{m}{4} \sin(\theta + n),$$

d'où il s'agit de trouver la valeur de n . Pour cet effet cherchons encore la valeur de $\operatorname{tang} \theta$, qui sera :

$$\operatorname{tang} \theta = \frac{4n \operatorname{cof} n - 4n - 3mn \operatorname{cof} n + 3m \sin n - mnn \sin n}{4n \sin n - 3mn \sin n - 3m \operatorname{cof} n + 3m + mnn \operatorname{cof} n} = \frac{4n}{m},$$

d'où l'on trouve, en négligeant les termes, où m monte à la seconde dimension :

$$4n \sin n - 3mn \sin n - 4m \operatorname{cof} n + 4m + mnn \operatorname{cof} n = 0.$$

Puisque nous savons que, s'il étoit $m = 0$, il seroit $n = \pi$, posons $n = \pi - \omega$, de sorte que $\sin n = \omega$, & $\operatorname{cof} n = -1$, & notre équation devenant :

$$4\pi\omega - 3m\omega\omega + 4m - m\pi\pi = 0$$

$$\text{donne } \omega = \frac{(\pi\pi - 8)m}{4\pi}; \text{ donc } n = \pi - \frac{(\pi\pi - 8)m}{4\pi}.$$

Par



Par conséquent le poids P qui commence à faire plier la colonne sera :

$$P = \left(\pi\pi - \frac{Q}{2P} (\pi\pi - 8) \right) \cdot \frac{Ekk}{aa} = \pi\pi \cdot \frac{Ekk}{aa} - \frac{(\pi\pi - 8)Q}{2\pi\pi}$$

XLIII. Par là nous apprenons, que le poids que la colonne est capable de soutenir, est un peu diminué par le propre poids de la colonne, celui-cy contribuant quelque chose à la faire plier. Cependant cet effet est très petit, & puisque $\pi\pi = 10$ fort à peu près, il ne vaut qu'environ la dixième partie du poids entier de la colonne. Ayant donc fait voir que ce poids est fort petit par rapport à celui qui est capable de faire plier la colonne, il est certain que dans l'estime de la force des colonnes on peut hardiment négliger leur propre poids, pourvu qu'elles ne soient faites d'une matiere extrêmement fragile, ou qu'elles ne soient très hautes par rapport à leur épaisseur. Au reste, pour ce qui regarde les colonnes, ou cylindriques, ou qui ont la figure d'un cone tronqué, la matiere étant la même, tant la Théorie que quelques expériences faites sur la roideur des corps, nous assurent que le moment de roideur en chaque endroit est assez exactement proportionnel au quarré-quarré du diametre de l'épaisseur, ou au quarré de la section faite au même endroit.

XLIV. De ce que je viens d'exposer, on peut tirer les conséquences suivantes sur la force des colonnes. D'abord on peut supposer, qu'on ait une colonne cylindrique quelque petite qu'elle soit, faite de la même matiere, & qu'on ait déterminé par quelques expériences le poids qu'elle est capable de soutenir sans se plier. Soit a la hauteur de cette colonne d le diametre de l'une de ses bases, & p le poids qu'elle peut soutenir. Maintenant ayant une autre colonne cylindrique faite de la même matiere, dont la hauteur soit $= A$, & le diametre de l'une de ses bases $= D$; on trouvera le poids qu'elle peut soutenir $P = \frac{aaD^4}{AAa^4} \cdot p$. Mais si la colonne a la figure d'un cone



tronqué de la hauteur $\equiv A$, & que le diametre de la bafe d'en haut foit $\equiv D$, & de celle d'en bas $\equiv E$, le poids qu'elle fera capable de foutenir fera $P \equiv \frac{aaDDEE}{AA d^4} p$. Si l'on veut juger des colonnes faites d'une autre matiere, il faut fe procurer un modele de la même matiere, pour fervir de fondement à ces conclusions.

XLV. Confidérons deux colonnes parfaitement femblables, & faites de la même matiere, les mefures de la premiere étant à celles de l'autre comme $1:n$, & il eft clair, que les poids foutenus par ces colonnes feroient entr'eux comme $1:nn$, ou bien une colonne, dont la hauteur feroit double, & partant auffi le diametre de fon épailfeur, ne feroit capable de porter qu'un poids quadruple, quoique fon poids foit 8 fois plus grand. Or, fi les batimens foutenus par les colonnes font femblables, il faudroit que les colonnes, dont la hauteur eft double, portaffent un poids huit fois plus grand, & en général les poids foutenus par les colonnes devroient être proportionnels aux cubes de leurs hauteurs. A cet égard donc, on peut dire que les colonnes plus hautes font moins fortes; entant qu'on les construit fur le même modele, comme les Architectes ont coutume de faire. Et partant fi les poids que les colonnes doivent foutenir, fuivent la raifon cubique de leur hauteur, leur épailfeur doit être augmentée dans une plus grande raifon que leur hauteur, & on ne feroit plus les former fur le même modele.

XLVI. Car, pofant la hauteur d'une petite colonne $\equiv a$, le diametre de fon épailfeur $\equiv d$, & le poids qu'elle eft capable de foutenir $\equiv p$; s'il faut construire une colonne de la hauteur na , qui doive porter le poids $\equiv n^3 p$, le diametre de l'épailfeur de cette colonne ne doit pas être pris $\equiv nd$, mais il faut qu'il foit $\equiv nd^{\frac{4}{3}} n$; d'où l'on tire cette table



hauteur de la co- lonne	diametre de l'épais- seur	poids sou- tenu	hauteur de la co- lonne	diametre de l'épais- seur	poids sou- tenu
a	$1,0000d$	p	$7a$	$11,3860d$	$343p$
$2a$	$2,3784d$	$8p$	$8a$	$13,4543d$	$512p$
$3a$	$3,9528d$	$27p$	$9a$	$15,5885d$	$729p$
$4a$	$5,6568d$	$64p$	$10a$	$17,3828d$	$1000p$
$5a$	$7,4767d$	$125p$	$11a$	$20,0327d$	$1331p$
$6a$	$9,3905d$	$216p$	$12a$	$22,3345d$	$1728p$

XLVII. Peut-être que ces proportions serviroient mieux à établir les ordres & les règles pour la construction des colonnes, si nous en exceptions ce qui regarde uniquement leurs ornemens. Mais, puisque le poids à soutenir n'est pas toujours proportionnel au cube de la hauteur des colonnes, il conviendra de donner à notre règle une plus grande étendue. Soit la hauteur d'une colonne, qui nous sert de modele $= a$, le diametre de son épaisseur $= d$, & le poids, qu'elle est capable de soutenir $= p$, & qu'il faille construire une colonne de la même matiere, dont la hauteur soit $= na$, & qui doive soutenir un poids $= mp$. Alors il faudra que le diametre de l'épaisseur de cette colonne soit $= d\sqrt[4]{mnn}$; & de là on tirera aisément pour tous les cas la juste épaisseur des colonnes qu'on veut employer; dont le diametre doit suivre la raison composée de la racine quarrée de sa hauteur, & de la racine quarré-quarrée du poids qu'elle doit soutenir.



ad pag. 172.

Fig. XV.

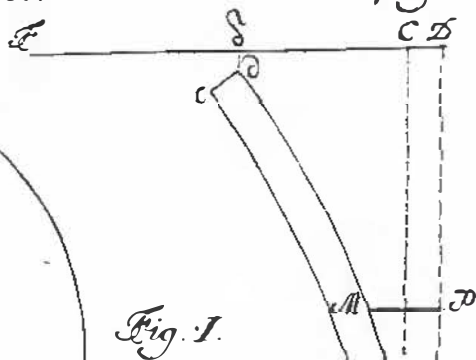
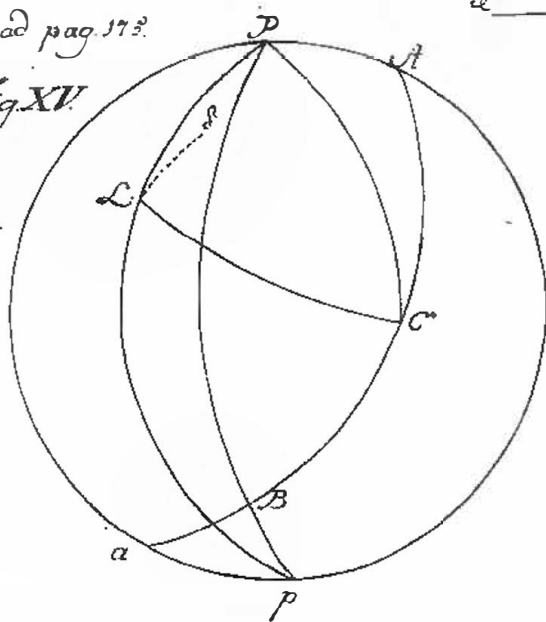


Fig. I.

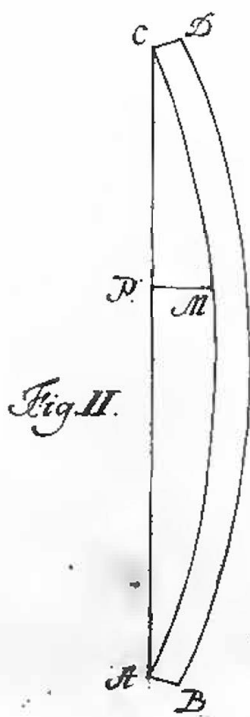
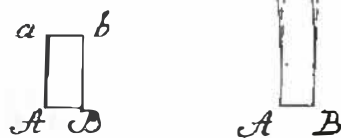


Fig. II.

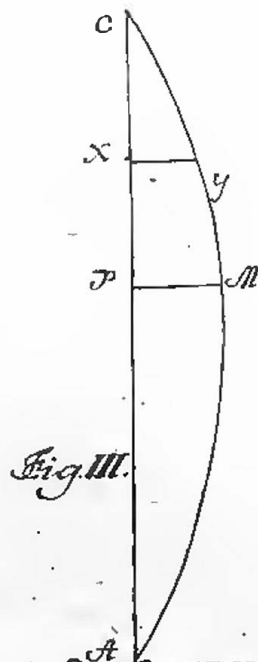


Fig. III.