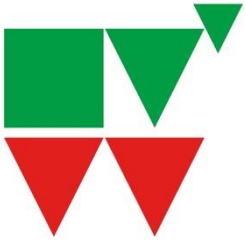




Nederlandse Vereniging
van Wiskundeleraren

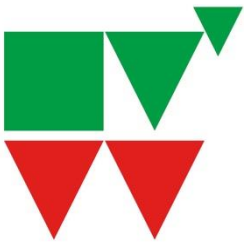
Probleemgestuurde aanpak in de wiskundeles

Meet up 10 februari 2026



Programma vanavond

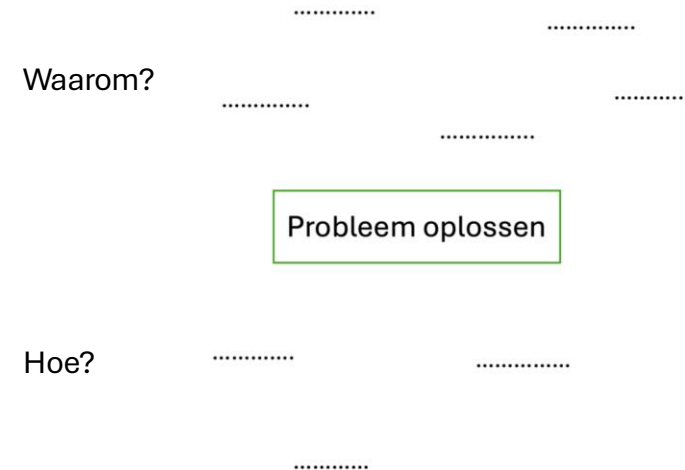
- Start, introductie
- Oriëntatie
- Vijf minuten wiskunde
- Probleem oplossen: Wat en Waarom?
- Sorteertaak
- Probleem oplossen in de klas: Hoe?
- Preview opdrachten uit het project

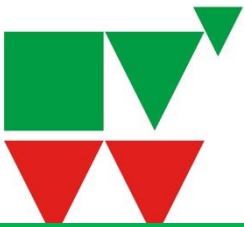


Probleem oplossen

Denk eens na over de volgende vragen:

- Wat versta je onder probleem oplossen?
- Waarom aandacht voor probleemoplossen?
- Hoe?





5 minuten wiskunde

Hoe vaak past 24 minuten in 12 uur?

Probeer je antwoord op verschillende manieren te berekenen.

Mogelijke manieren

- Hoe vaak past 24 min in 1 uur? ($24 + 24 + 12$) dus 2,5 keer; en dit keer $12 \rightarrow 30$
- $24 : 2 = 12$ 5 keer 12 minuten in een uur... en dat dan 12 keer = $60 \rightarrow 30 \times$
- $12 : (0,4) =$
- $720 : 24 =$

Gebaseerd op Kangoeroe wizBRAIN 2025 (95% goed)

5. Hoe vaak past 12 minuten in 12 uur?

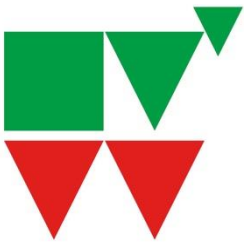
A. 6

B. 10

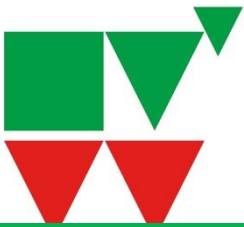
C. 12

D. 24

E. 60



Probleem oplossen: Wat en Waarom?



Wat verstaan we onder probleem oplossen?

Kiezen van een probleemaanpak van niet-routine taken met gebruik van:

- vakinhoudelijke kennis en vaardigheden
- wiskundige heuristieken,
- metacognitieve vaardigheden,
- een productieve houding.

Weten dat: kennis van feiten en begrippen, reproduceren, technieken beheersen;

Weten waarom: concepten, abstracties, rijke schema's, argumenten, overzicht;

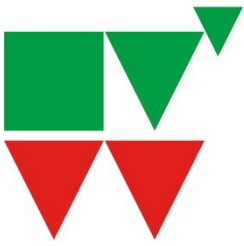
Weten hoe: probleemaanpak, toepassen, onderzoeksvaardigheden;

Weten over weten: reflecteren, monitoren, kennis over je eigen weten en aanpak;

Houding: wiskunde leren is leuk, interessant, doorzetten, durven, ik kan het.

Drijvers, Van Streun & Zwaneveld (2012)

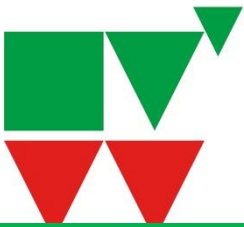
Van Streun, A. (1994); Verschaffel, L., Schukajlow, S., Star, J., & Van Dooren, W. (2020).



Kerdoelen en Examenprogramma's

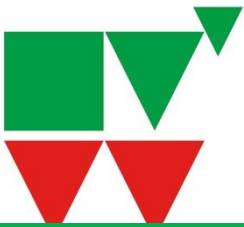
De leerling

- pakt niet-routineproblemen systematisch aan, waarbij wiskunde een rol speelt.
 - herkent en gebruikt een abstract perspectief op wiskundige concepten en technieken om op heuristische wijzen niet-routine problemen aan te pakken.
 - doet onderzoek met behulp van wiskunde in een probleemsituatie.
- De leerling lost wiskundige problemen en toepassingsproblemen op
 - De school stimuleert de ontwikkeling van een wiskundige attitude bij leerlingen



Activiteiten

- *herkennen* van en werken aan niet-routine problemen;
- *samenwerken* en taken verdelen;
- organiseren, monitoren en evalueren van het *proces* van probleemaanpak
- herkennen en gebruiken van *algorithmische* aspecten
- *vragen stellen* met behulp van wiskunde bij een probleemsituatie
- formuleren van een *vermoeden* van wiskundige aard;
- *onderbouwen* van conclusies.
- gebruiken van *heuristieken*
- *reflecteren* op aanpak, uitvoering en oplossing



Voor of na instructie?

Om succesvol problemen op te lossen moeten leerlingen domeinspecifieke kennis hebben (Barton, 2019)

Maar: na of tijdens 'het onderwijzen van domeinspecifieke kennis'?

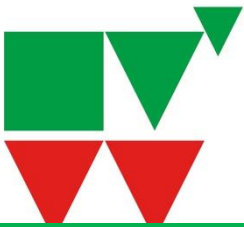
Barton (2019): *'Probleemoplossen moet aan het eind van het proces komen, nadat de noodzakelijke domeinspecifieke kennis bij elkaar verzameld is'*

Lester en Cai (2016): Aspecten van succesvol probleemoplossen:

- Niet als extra na instructie, maar integraal onderdeel van wiskunde leren
- Er is een sterke connectie tussen probleem oplossen en conceptuele kennis
- Leerlingen moeten er aan wennen.

Barton, C. (2020). *Volgens Barton. Lesgeven in wiskunde aan de hand van wetenschap, experts, en 12 jaar aan mislukkingen*. Phronese uitgeverij.

Lester, F. K., and Cai, J. (2016). "Can mathematical problem solving be taught? Preliminary answers from 30 years of research," in *Posing and Solving Mathematical Problems*, eds. P.L. Felmer, E. Pekhonen, and J. Kilpatrick (Springer): 117-135.



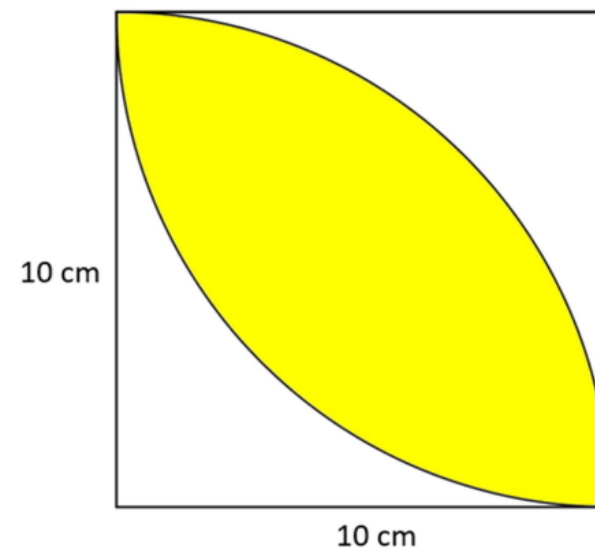
Soorten opdrachten in het project

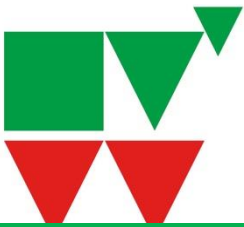
(1) ontwikkeling nieuwe wiskundige
concepten en procedures,



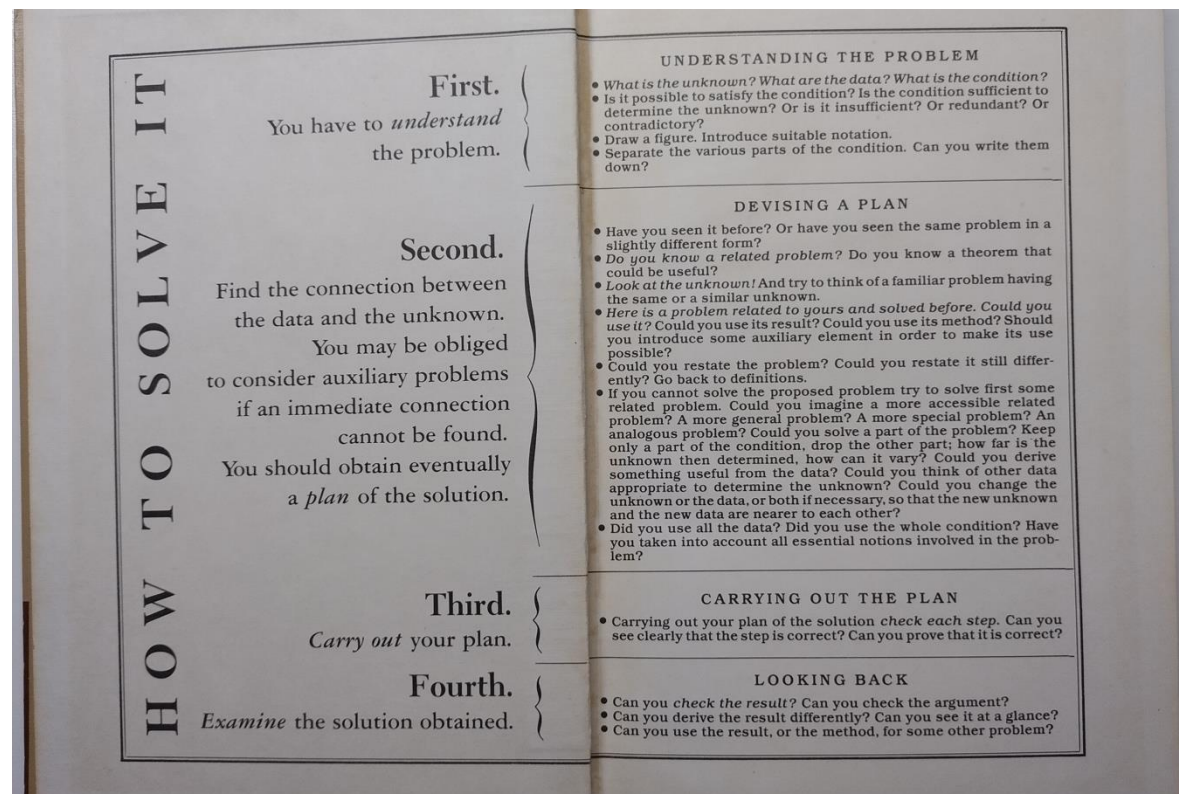
Hoe duur is één koek?

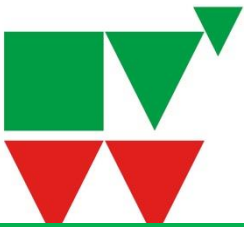
2) toepassen van eerder 'geleerde'
kennis





Polya over heuristieken: stel jezelf vragen





Andere modellen

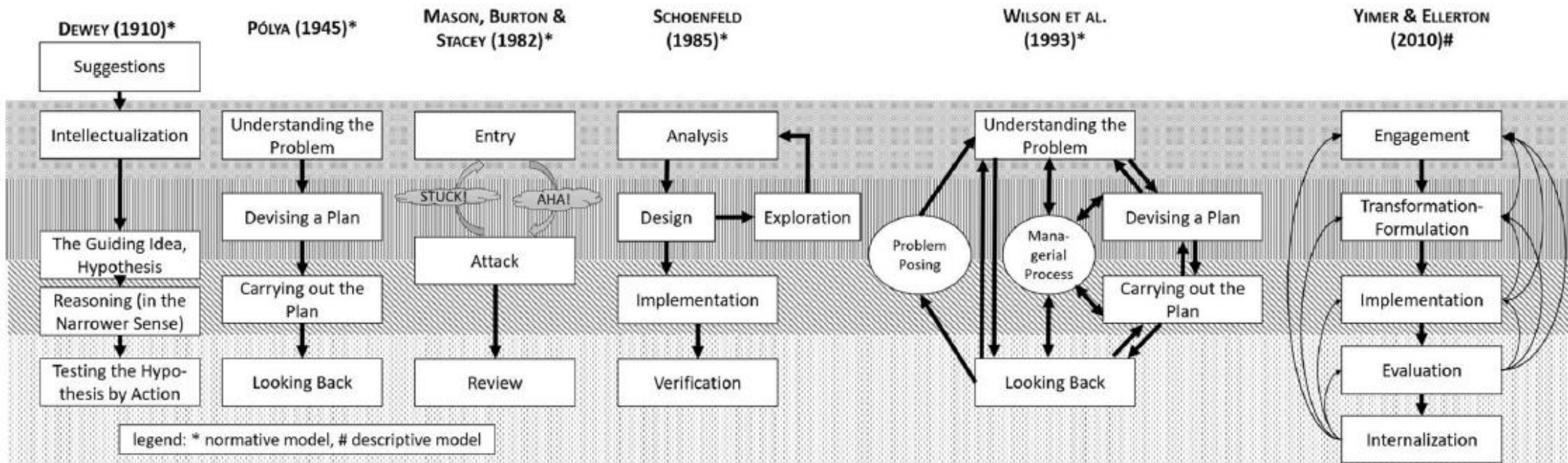
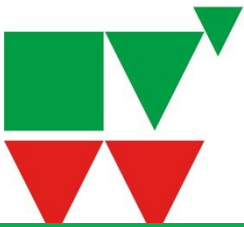


Fig. 1 Different phase models of problem-solving processes

Rott, B., Specht, B., & Knipping, C. (2021). A descriptive phase model of problem-solving processes. *ZDM–Mathematics Education*, 53(4), 737–752.



Andere modellieren

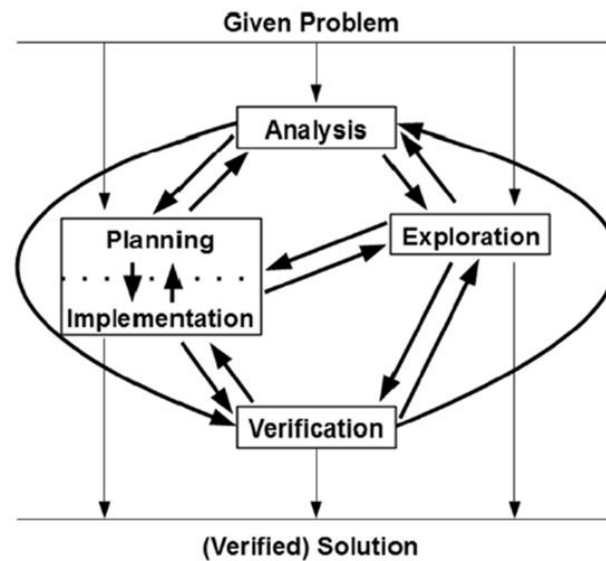
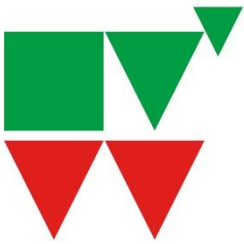
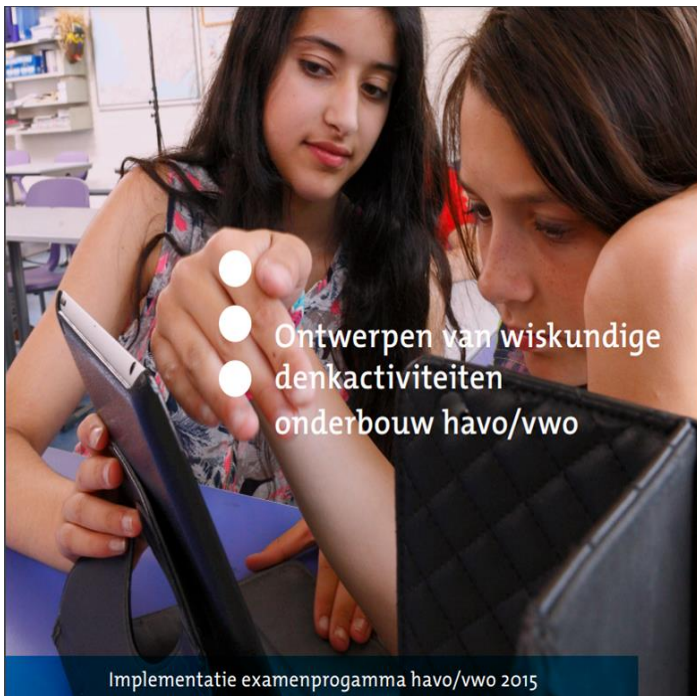
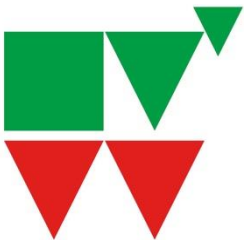


Fig. 5 Descriptive model of problem-solving processes

Rott, B., Specht, B., & Knipping, C. (2021). A descriptive phase model of problem-solving processes. *ZDM–Mathematics Education*, 53(4), 737–752.



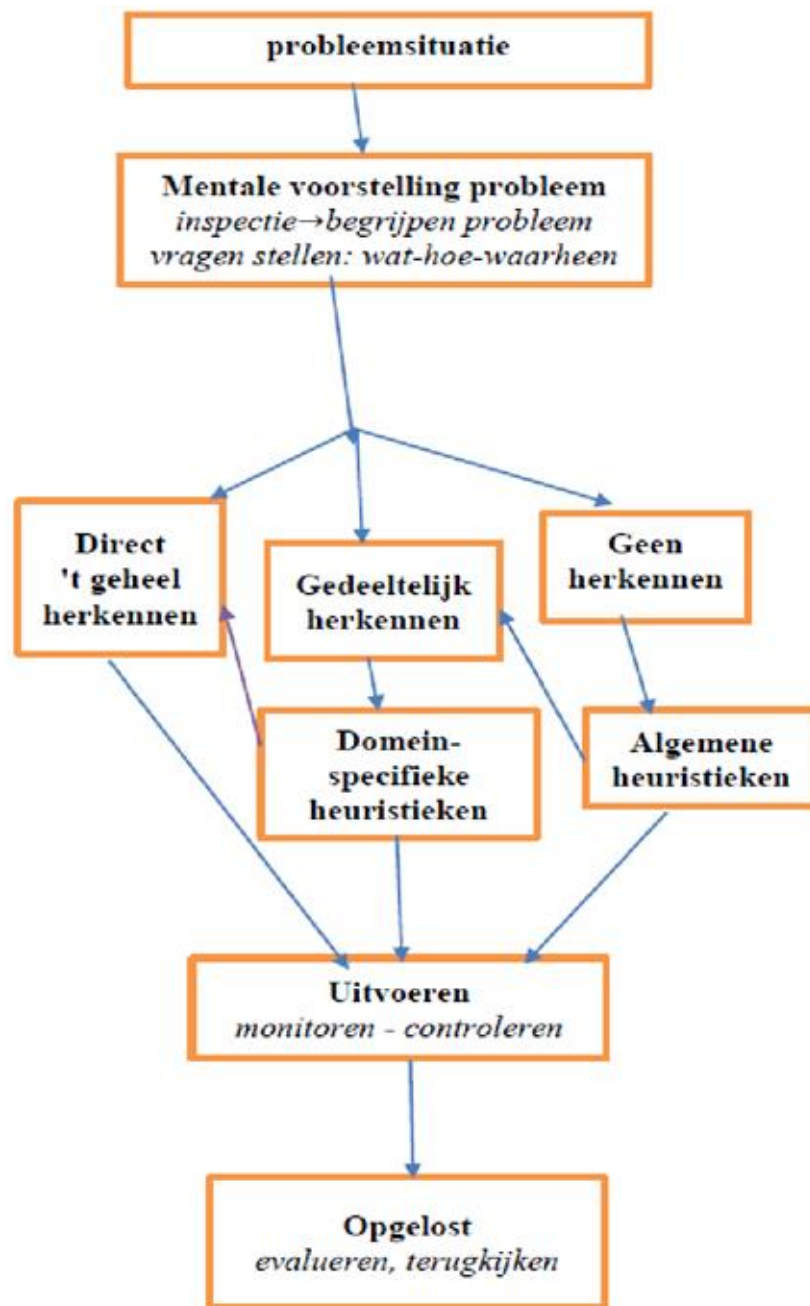
Probleemaanpak in de klas



• Ontwerpen van wiskundige
denkactiviteiten
• onderbouw havo/vwo

Implementatie examenprogramma havo/vwo 2015

SLO • nationaal expertisecentrum leerplanontwikkeling



Aspecten die rol spelen bij probleem oplossen:

Probleem begrijpen, verkennen, doel-middelen analyse

Herkennen: Ken ik aanpakken, methoden die me verder helpen?

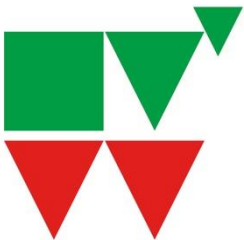
Domeinspecifieke heuristieken: (gebonden aan het type problemen; bijv. bij hoeken van 90°)

Algemene heuristieken: (breder toepasbaar; bijv. schets, getallenvoorbeeld, probleem kleiner maken)

Overstijgend:

- *metacognitie* (plannen, monitoren, controleren)
- *houding* (doorzetten, vertrouwen, durf,..)

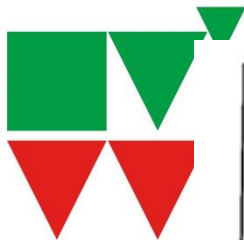
Zie Van Streun & Kop (2017)
<https://www.slo.nl/zoeken/@4594/ontwerpen-wiskundige-0/>;



Introductie van Wiskundelij 4a VWO (Streun, A. van; Meijer, H.E.)

“voor het goed aanpakken van problemen heb je meer nodig dan het kennen van regels, eigenschappen, technieken of definities.”



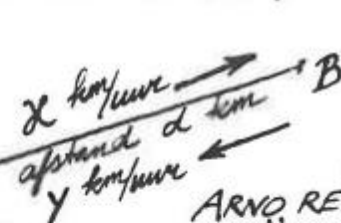


HO, HO, NIET ZO SNEL.
WAT WORDT MIJN GEMIDDELTE
SNELHEID, ALS IK OP DE HEEN-
WEG GEMIDDELD 90 KM/UAUR
EN OP DE TERUGWEG 50
KM/UAUR HEB GEREDEN?
OF OP DE HEEN-
WEG GEMIDDELD
100 KM/UAUR
EN OP DE
TERUGWEG
40 KM/UAUR?



STOM GEDOE. ZO KUN JE WEL AAN DE GANG BLIJVEN.
MOETEN WE DAT JOEK
WEER UITREKENEN?

MISSCHIEF KUNNEN WE
HET ALGEMEEN MET EEN
FORMULE AANPAKKEN. NOEM
DE GEMIDDELTE SNELHEID OP DE HEENWEG
NU EENS x KM/UAUR EN DIE OP DE TERUGWEG
 y KM/UAUR EN DE AFSTAND d KM.
KIJK MAAR, EVEN
EEN PLAATJE
TEKENEN



ARNO REKEN JIJ
DE TIJD VOOR DE
HEENWEG UIT.
BENITA JIJ VOOR DE TERUGWEG

$\frac{d}{x}$ UAUR EN $\frac{d}{y}$ UAUR, WAT IS NU DE TOTALE TIJD?
KUN JE NU DE FORMULE OPSCHRIJVEN VOOR
DE GEMIDDELTE SNELHEID OVER DE
TOTALE AFSTAND?

$$\frac{d}{x} + \frac{d}{y} \text{ UAUR}$$

DE WEG GEDEELD
DOOR DE TIJD DUS

$$\frac{d}{\frac{d}{x} + \frac{d}{y}} \text{ KM/UAUR.}$$

NEE, DE WEG
IS $2d$ DUS

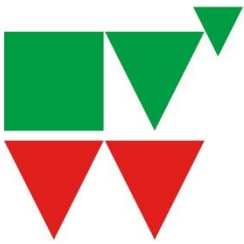
$$\frac{2d}{\frac{d}{x} + \frac{d}{y}} \text{ KM/UAUR.}$$



NU TERUGKIJKEN. BIJ DAT RETOVRTJE
DRACHTEN - GRONINGEN, DEED DE AFSTAND
ER NIET TOE. TOCH ZIT DE AFSTAND d
NOG IN DE FORMULE. HOE ZIT DAT?



Wat denk jij?

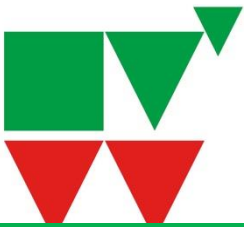


Terugblik

De hints van Dora komen heel vaak van pas.

Het gaat om:

- controleren
- een getallenvoorbeeld nemen
- meer voorbeelden doorrekenen
- een tekening maken
- naar het algemene geval
- lettervariabelen $x, y, d, \dots$ invoeren
- terugkijken of het algemene geval wel klopt met je getallenvoorbeelden
- controleren door substitueren

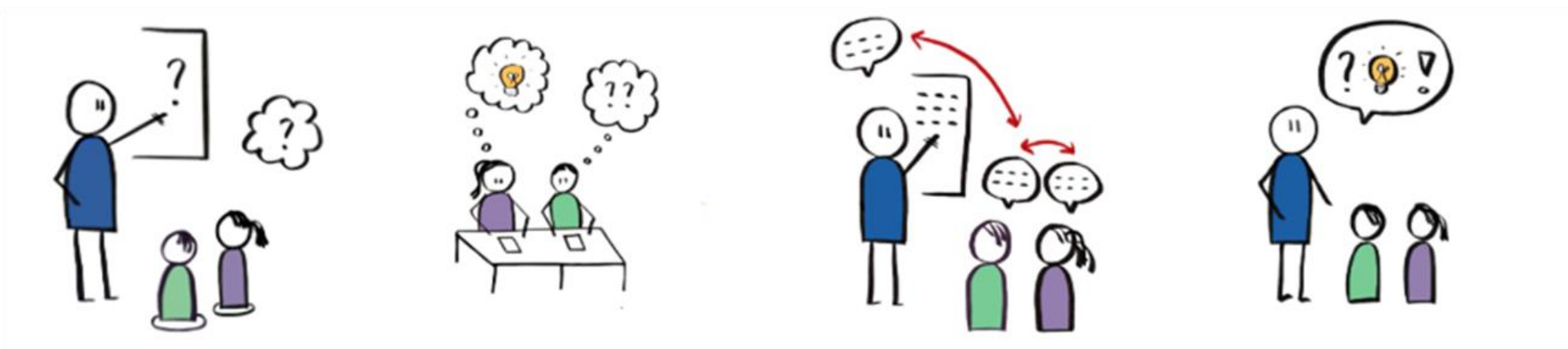


Probleem gestuurde lessen: hoe doe je dat?

Centrale vraag

Werkwijze (leerlingen aan werk)

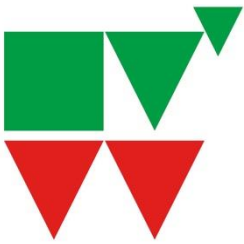
Klassikale bespreking



Wat zijn goede centrale vragen?

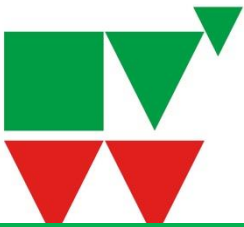
Hoe maak je die?

Waarom en hoe klassikale bespreking?



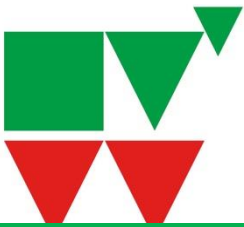
Sorteertaak

Is dit een geschikt probleem?
ja – nee – misschien



Is dit een geschikt probleem? J / N / ?

1. Opstellen exponentiele formule
2. Eenheden
3. Wortels
4. Parabool raakt x-as
5. Patronen zoeken en beschrijven
6. Diefstal
7. Hoeken



Kwaliteitscriteria voor centrale vragen

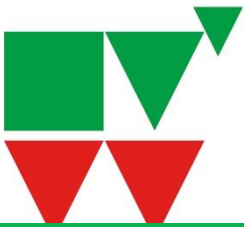
Zet aan tot wiskundig denken, het is non-routine opgave

Wiskunde

- Past bij leerdoelen en in leerlijn
- Bevat de kern en de volle complexiteit
- Focust op ontwikkeling van wiskundige concepten OF op probleem aanpak

Taak

- Is een betekenisvolle vraag voor leerlingen en heeft een beperkte introtekst
- Heeft low floor-high ceiling en verschillende aanpakken zijn mogelijk
- Is uitdagend en motiverend



Hoe kun je zelf centrale vragen maken?

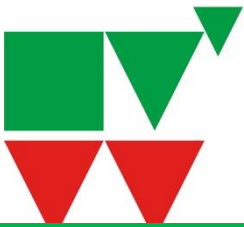
Strategieën

- (1) Omdraaien en weglaten
- (2) Zoeken en aanpassen
- (3) Netwerk van kernen van hoofdstuk/onderwerp maken
- (4) Andere werkwoorden/activiteiten gebruiken
- (5) Thin slicing

Inspiratie: SLO brochure Ontwerpen van wiskundige denkactiviteiten
onderbouw/bovenbouw:

<https://www.slo.nl/zoeken/@4594/ontwerpen-wiskundige-0/>;

<https://www.slo.nl/zoeken/@4505/ontwerpen-wiskundige/>



(1) Omdraaien en weglaten

- 18** Het gewicht van een hondje neemt de eerste weken exponentieel toe. Hiernaast zie je een tabel met t de tijd in weken en G het gewicht in grammen.
- a** Geef de algemene formule voor een exponentieel verband. Welke variabelen moet je hier gebruiken?
 - b** Bereken de groeifactor per week.
 - c** Welk gewicht had de hond bij de geboorte, dus op $t = 0$?
 - d** Geef een formule voor het gewicht G in grammen van de hond na een tijd van t weken.
 - e** Na vier weken weegt de hond 195 gram. Controleer je formule door $t = 4$ in te vullen.

t	0	1	2	3	4
G	...	100	125	156	195



Het gewicht van een hondje neemt de eerste weken exponentieel toe. Zie de tabel hiernaast met t de tijd in weken en G het gewicht in grammen.

Geef een formule voor het gewicht G na t weken. Controleer je formule bij $t=4$.

t	0	1	2	3	4
G	...	100	125	156	195

(1) Omdraaien en weglaten

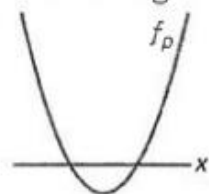
Voorbeeld + opdracht

Voorbeeld

Gegeven zijn de functies $f_p(x) = 2x^2 - 10x + p$.

Bereken algebraïsch voor welke p de functie f_p een negatief minimum heeft.

Uitwerking



$$\left. \begin{array}{l} \text{Er moet gelden } D > 0 \\ D = (-10)^2 - 4 \cdot 2 \cdot p = 100 - 8p \end{array} \right\} \begin{array}{l} 100 - 8p > 0 \\ -8p > -100 \\ p < 12\frac{1}{2} \end{array}$$

- 51 Gegeven zijn de functies $f_p(x) = 2x^2 - 6x + p$.
Bereken algebraïsch voor welke p
- a de grafiek van f_p de x -as raakt
 - b f_p een negatief minimum heeft.

Opdracht + bespreking

- 51 Gegeven zijn de functies $f_p(x) = 2x^2 - 6x + p$.
Bereken algebraïsch voor welke p
- a de grafiek van f_p de x -as raakt
 - b f_p een negatief minimum heeft.

Hints: controleer of $p=1$ het goede antwoord is

Bij klassikale bespreking:

Methode 1

Er is dus 1 snijpunt

dus vgl $y=0$ heeft 1 oplossing

Dus discriminant = 0

Methode 2

Top is $(..., 0)$

$x_{\text{top}} = -b/(2a) \rightarrow y_{\text{top}} = 0$ oplossen

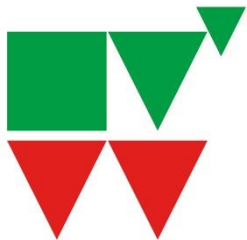
Methode 3

$y = 2x^2 - 6x$

Schuif die omhoog of omlaag.

$x_{\text{top}} = -b/(2a) \rightarrow y_{\text{top}} = \dots$

Dus Omhoog schuiven



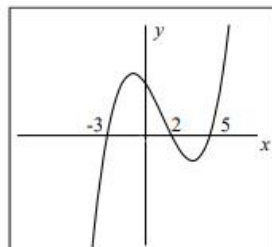
(2) Zoeken en aanpassen: (www.map.mathshell.org/)

Cubic Graphs and Their Equations

1. Write down an equation of a cubic function that would give a graph like the one shown here. It crosses the x -axis at $(-3, 0)$, $(2, 0)$, and $(5, 0)$.

.....

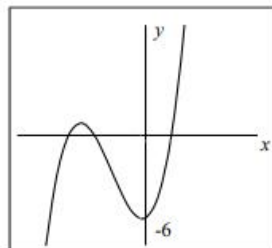
.....



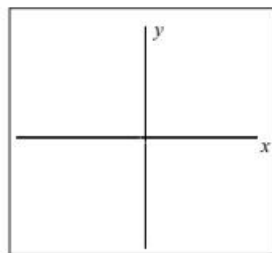
2. Write down an equation of a cubic function that would give a graph like the one shown here. It crosses the y -axis at $(0, -6)$.

.....

.....



3. On the axes, sketch a graph of the function $y = (x+1)(x-4)^2$.
You do not need to plot it accurately!
Show where the graph crosses the x - and y -axes.



4. Write down the equation of the graph you get after you:

(i) Reflect $y = (x+1)(x-4)^2$ over the x -axis:

.....

(ii) Reflect $y = (x+1)(x-4)^2$ over the y -axis:

.....

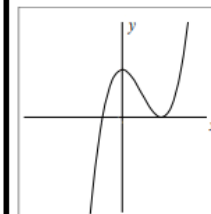
Statements to Discuss: True or False?

A1

$$f(x) = x^3 - 2x^2 - 9x + 18$$

$$f(2) = 0 \Rightarrow (x+2) \text{ is a factor of } f(x)$$

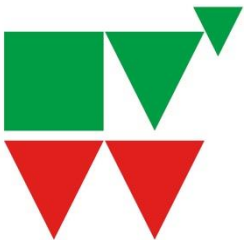
B1



A possible equation
for this graph is:
 $y = (x+1)(x-2)^2$

C1

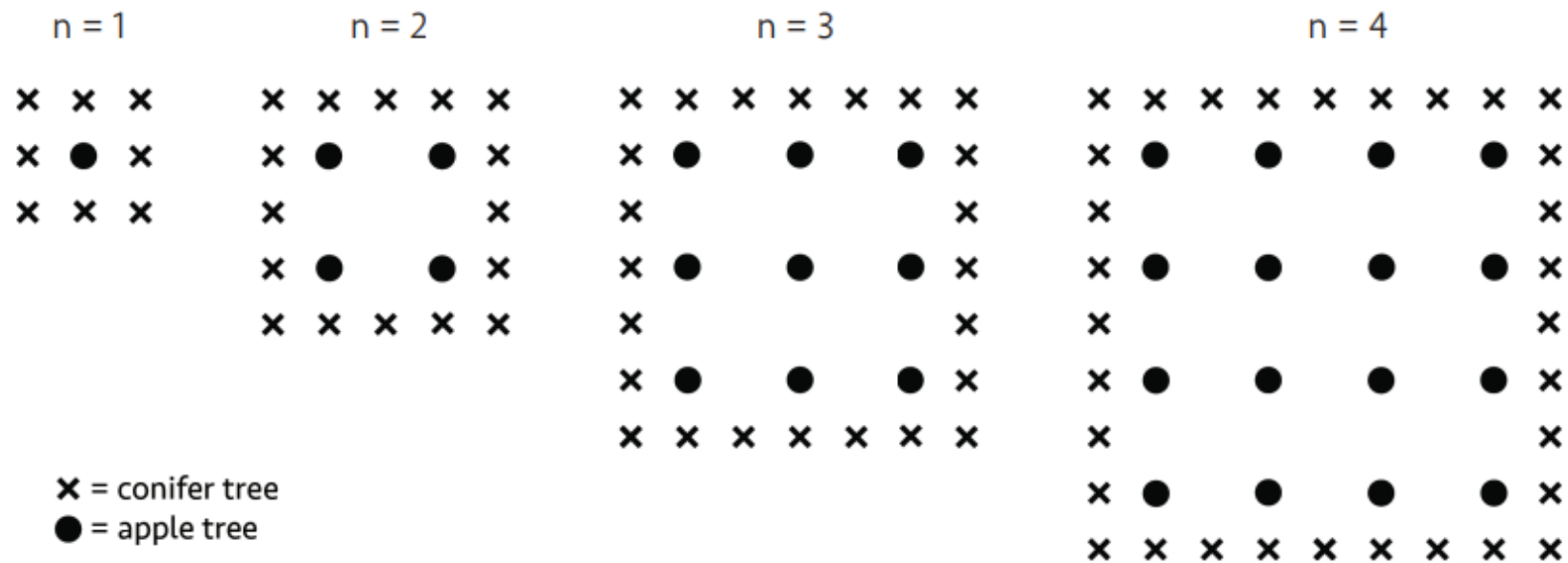
If $f(x)$ is a cubic function
and $f(1) = 0$, $f(3) = 0$ and
 $f(4) = 0$,
then $f(5) = 8$

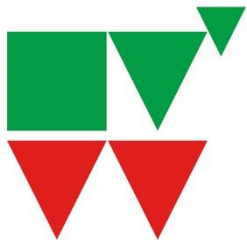


(2) Zoeken en aanpassen: (<https://www.youcubed.org/>)

Explore the pattern: **how many apple trees and how many conifer trees to protect apple trees against wind?**

Here is a diagram of the situation where you can see the pattern of apple trees and conifer trees for the first 4 cases:





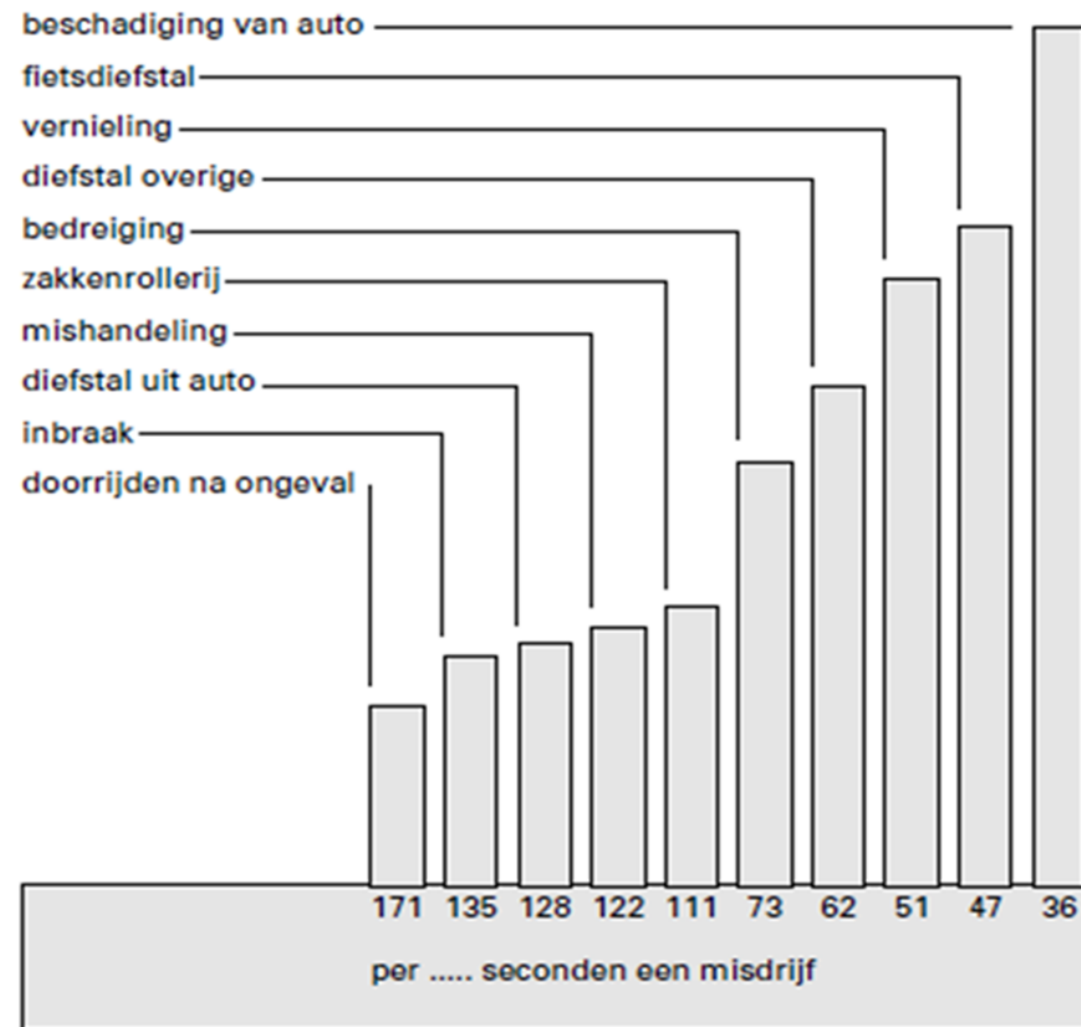
(2) Zoeken en aanpassen:

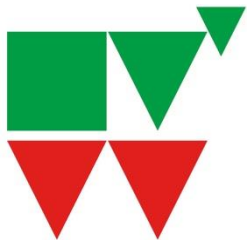
Uit CSE contexten

De waarde van een machine neemt ieder jaar af; anders gezegd: ieder jaar is er een afschrijving van de waarde (boekwaarde).

Die afschrijving kan op verschillende manieren gebeuren.

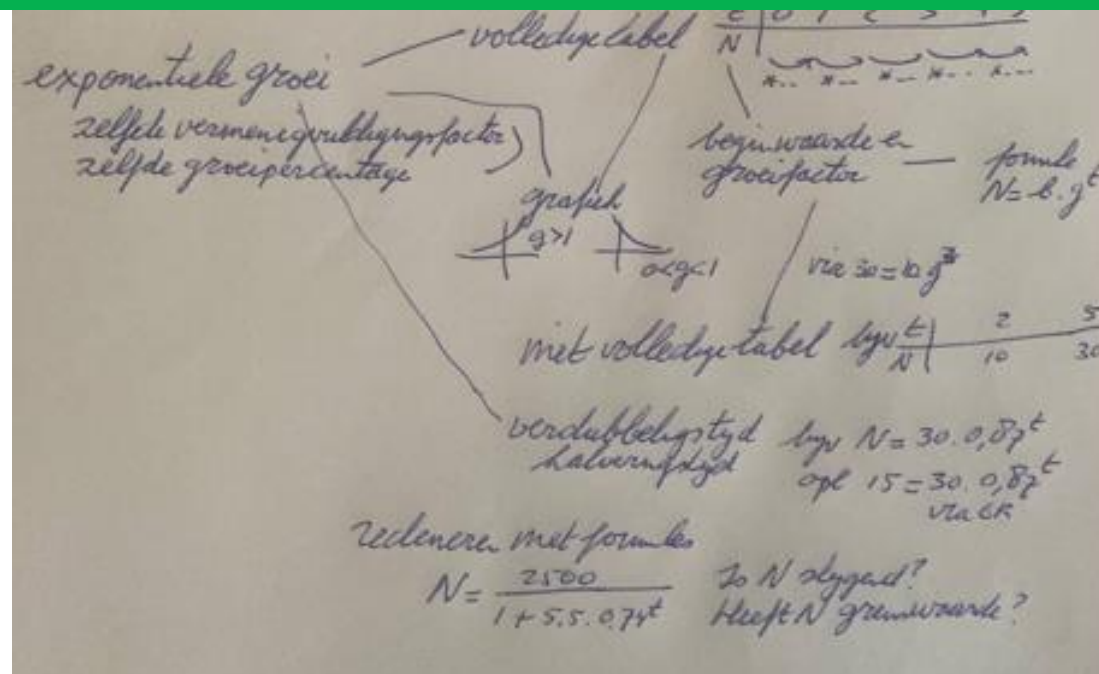
afschrijving en boekwaarde			
tijdstip t	Boekwaarde B		
	I	II	III
0	10 000	10 000	10 000
5	5500	3162	3455
10	1000	1000	1000





(3) Netwerk maken van hoofdstuk / onderwerp

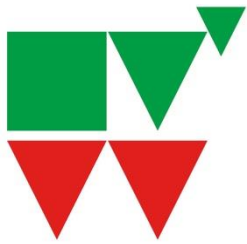
bijv. exponentiële functie



Maak centrale vragen a.d.h.v. dit netwerk en zorg voor 'leerlijntje'

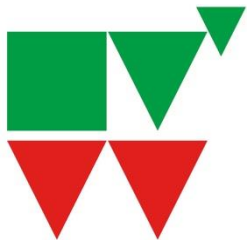
Bijv. leerlijntje:

- Formule volledige tabel,
- 'waarom de vorm $N = b \cdot g^t$?'
- Formule bij onvolledige tabel
- Grafieken?
- Linken groeifactor, groeipercentage, verdubbelings/halveringstijd



(4) Andere werkwoorden

- Schat; geef (kwalitatieve) redenering
- Formuleer een vermoeden
- Orden/categoriseer
- Geef voorbeelden van ...
- Soms waar, nooit waar, altijd waar
- Wat gaat fout? En waar?
- Bedenk verschillende manieren om ...
- Waarom is dit waar?



(5) *Thin slicing (van BTC)*

Ontbinden in factoren

Intro: deze formules zijn gelijkwaardig:

$$y = (x + 2)(x + 3) \text{ en } y = x^2 + 5x + 6$$

Hoe kun je dit controleren? En bij welke vorm kun je eenvoudig de nulpunten bepalen?

Centrale vragen: Schrijf in handige vorm om nulpunten te bepalen

$$y = x^2 + 7x + 6$$

$$y = x^2 + 7x + 12$$

$$y = x^2 - 7x + 12$$

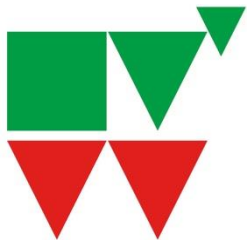
$$y = x^2 + 10x - 24$$

$$y = x^2 - 2x - 24$$

$$y = x^2 - 5x - 24$$

$$y = x^2 + 6x - 16$$

$$y = x^2 - 0x - 16$$



(5) *Thin slicing*

In onderstaande tabellen is er steeds sprake van exponentiële groei
Maak steeds een formule bij de tabel

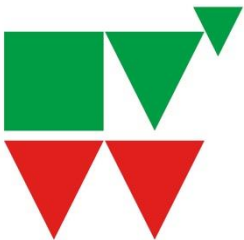
t	0	1	2	3	4	5	...
N	2	6	18	54	162	486	

t	0	1	2	3	4	5	...
N	400	320	256	204,8	163,8	131,1	

t	0	1	2	3	4	5	6
N	4		36		324		2916

t	0	1	2	3	4	5	6	
N	400			260			169	

t	0	1	2	3	4	5	6	
N			340				289	



Aandacht voor klassikale bespreking

.....

.....

.....

.....

.....

Klassikale
bespreking

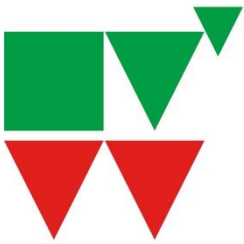
.....

.....

.....

Waarom↑

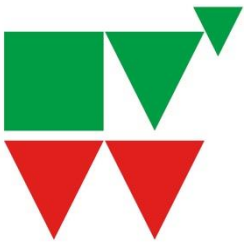
Hoe ↓
Vuistregels



Klassikale bespreking

Waarom? (doelen)

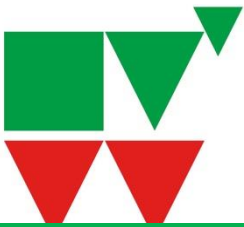
- Denken verhelderen en delen;
- Oriënteren op andermans denken
- Reflectie op aanpak (strategie)
- Expliciteren
- Levelling en gemeenschappelijke kennis
- Consolideren van geleerde (en status van geleerde)
- Integreren , verdiepen, generaliseren



Klassikale bespreking

Hoe doe je het? (vuistregels) (met dank aan C. Kooloos)

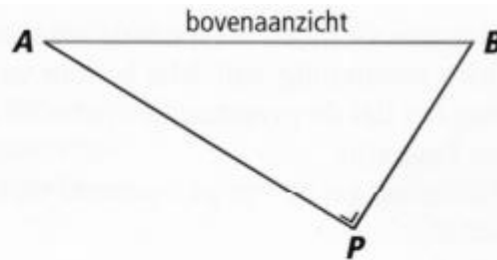
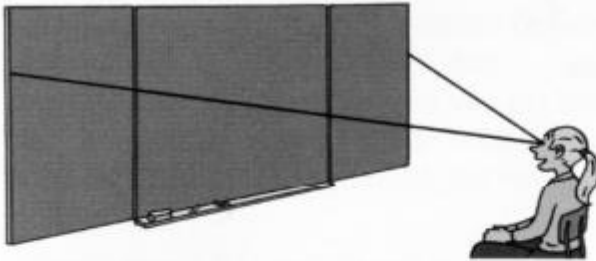
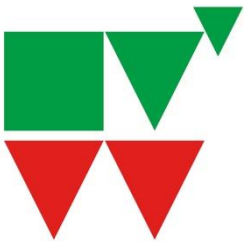
- Voorbereiding: formuleer verwachte en gewenste aanpakken
- Voorbereiding in les: anticiperen, selecteren, volgorde bepalen
- Wacht (geef denktijd)
- Interactieprincipes: deel, herhaal, vul aan, waarom (doorvragen), herzien
- Expliciteren van strategie, heuristieken, metacognitie als monitoren en controleren, houding (proberen, doorzetten, etc.)
- Consolideren en aantekening maken ("Wat leggen we vast?")
- Verdiepen "Wat als", "Hoe past dit bij ...", "Waar geldt dit nog meer?"



Centrale vragen maken nog steeds lastig

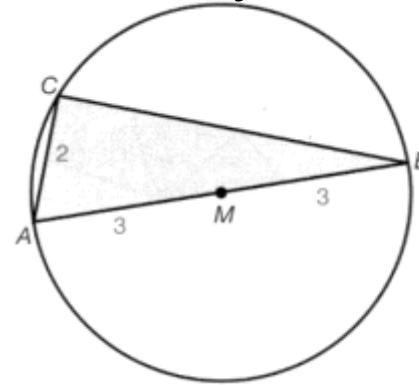
Vervolg:

- Op welke activiteiten richt een centrale vraag zich?
- Focus op lokale leerlijntjes (niet alles in centrale vraag):
combi van centrale vraag en klassikale bespreking moet het doen



- 12** In een lokaal hangt een schoolbord dat 4 meter breed is. Petra ziet het bord onder een hoek van 90° . Dit betekent dat de twee kijklijnen een hoek van 90° met elkaar maken. Rechtsboven is het bovenaanzicht van de situatie getekend. AB is het bord en punt P is de plaats waar Petra zit.
- a** Teken een lijnstuk AB van 4 cm en geef vijf plaatsen aan waar Petra (P) kan zitten.
- b** Vul het volgende vermoeden aan.
Alle punten P waarvoor $\angle APB = 90^\circ$ liggen ..

Bewijs bedenken

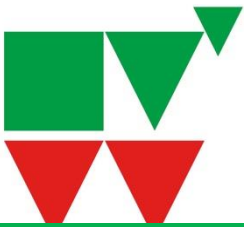


Oefening 5.2.1.1.h Even wat anders

Je hebt gevonden dat je bij een kwadratische formule in de ontbonden vorm snel de nulpunten van de bijbehorende grafiek kunt berekenen.

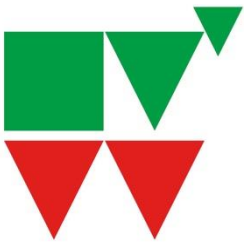
Dat geldt niet alleen voor kwadratische formules en parabolen.

- a.** Schets de grafiek bij de formule $y = (-x + 5)(x - 7)(x - 4)$. Bereken eerst de nulpunten en maak een tabel totdat je weet hoe die grafiek loopt.
- b.** Doe hetzelfde voor de formule $y = (-x + 4)(x - 3)(x - 1)(-x - 1)$.



Op welke activiteit richt de centrale vraag zich?

- Betekenisvolle omgeving voor ondersteuning
- Betekenis geven via toegankelijke wiskundige concepten
- Exploreren met voorbeelden
- Omdraaien/thin slicing
- Puzzelen
- Onderzoeken met vermoedens formuleren en bewijzen
- Generaliseren
-



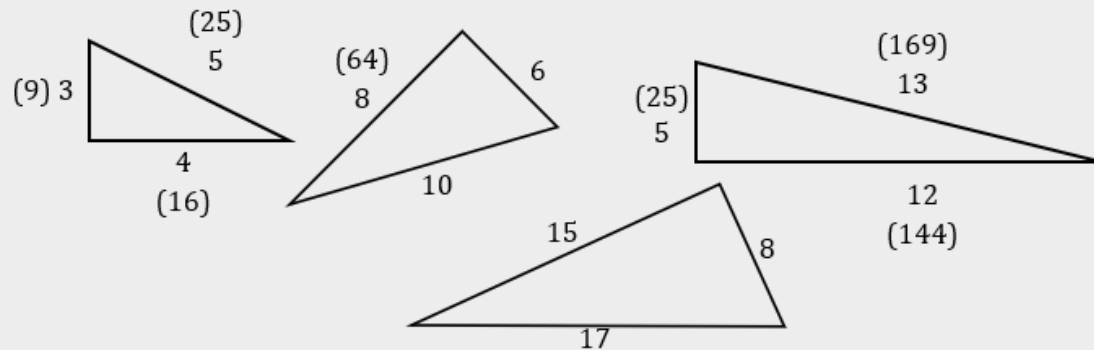
Kijken naar lokale leerlijntjes

Stelling van Pythagoras

<https://www.buildingthinkingclassrooms.nl/lesmateriaal/>

Introductie

VRAAG 1: 4 rechthoekige driehoeken op een bord met Pythagoras triples. Wat valt je op?



Klassikale bespreking: Benoemen stelling van Pythagoras:

in een rechthoekige driehoek is het kwadraat van de langste/schuine zijde altijd gelijk aan de som van de kwadraten van de rechthoekszijden.

Steeds over rechthoekige driehoeken Bij een zijde ? Soms tussen haakjes ook kwadraat van lengte erbij.

Zijden: 6 (36), 8 (64), ?

Zijden: 9 (81), 12 (144), ?

Zijden: 2,4 (5,76), 1 (1), ?

Zijden: 5,6, 10,5, ?

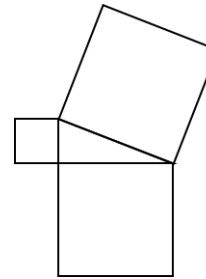
Zijden: 1,2, 1,6, met de schuine zijde aan de onderkant

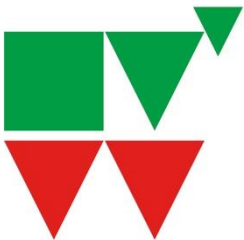
Zijden: 1,5, 3,6, ? met de schuine zijde aan de onderkant

Extra uitdaging:

Zijden: 5, 8, ?

Zijden: 3, ?, 5 (schuine zijde gegeven)





Kijken naar lokale leerlijntjes

Consolideren:

Drie vragen die door de leerlingen op volgorde van gemakkelijk naar moeilijk moeten worden gezet

Vraag 1: Zijden 4, (?), 8,5

Vraag 2: Zijden 15, 20, (?)

Vraag 3: Zijden 5, (?), 7

De gekozen opdracht uitwerken.

AANTEKENINGEN:

Voorbeeld 1:

Plaatje van een driehoek met zijden 12, 16 en onbekend.

Rechthoekszijde 1: $\square \rightarrow \square^2 = \square$

Rechthoekszijde 2: $\square \rightarrow \square^2 = \square$

Schuine zijde in het kwadraat: $\square + \square = \square$

Dus de lengte van de schuine zijde is $\square$

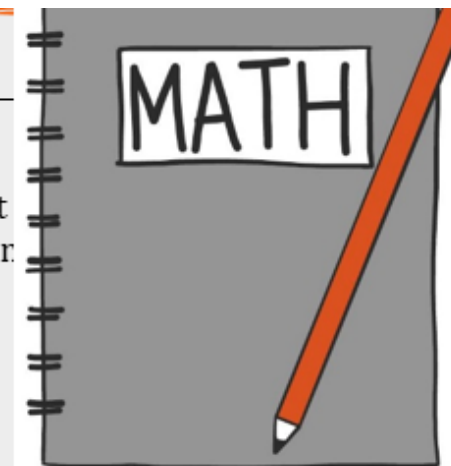
Voorbeeld 2:

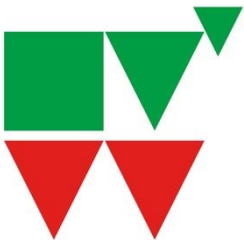
Driehoek met zijden 8, 15 en onbekend.

Dingen om te onthouden

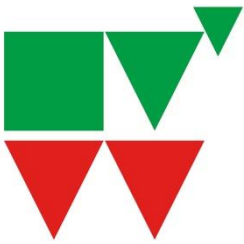
Voorbeeld 3:

Verzin hier zelf een voorbeeld





Producten in ontwikkeling
preview



Het probleem

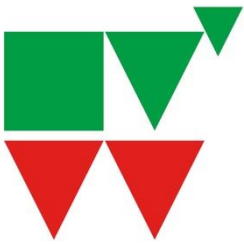
Het recept voor perfect paars water zegt: “Mix 11 mL blauw water met 5 mL rood water.”

Joost mixt 330 mL blauw water met 140 mL rood water.

Diana mixt 290 mL blauw water met 120 mL rood water.

Joost en Diana gooien hun mixen bij elkaar.

Hoeveel blauw en rood water moeten ze nog toevoegen voor precies één liter perfect paars water?

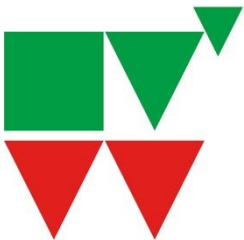


Afgeleide van product van twee functies

$p(x) =$	$f(x) *$	$g(x)$	$f'(x)$	$g'(x)$	$p'(x)$
$e^x \cdot (2x + 3)$	e^x	$2x + 3$	e^x	2	$(e^x)(2x + 3) + (e^x)(2)$
$(x^3 + 4x)(x^2 + 6x)$	$x^3 + 4x$	$x^2 + 6x$	$3x^2$	$2x + 6$	$(x^3 + 4x)(2x + 6) + (x^2 + 6x)(3x^2)$
$(x^5 + 8x)$	$x^5 + 8x$				
$x^4 \cdot 2^{x+1}$	x^2				
$f(x) \cdot g(x)$					

- 1) Bekijk de tabel om de afgeleide van $p(x)$ te berekenen en vul aan.
- 2) Beschrijf in woorden hoe je een afgeleide van een product $p(x) = f(x) \cdot g(x)$ berekent.

In klassikale bespreking onderbouwing van productregel



Het probleem

Bij autobedrijf "Speedy" wordt het huurbedrag voor een auto berekend met de formule **bedrag = $30n + 120$** . Hierin is n het aantal dagen dat je een auto huurt.

Bij "Speedy" hanteren ze een korting voor lange huurperiodes: Als je een auto langer dan twee weken huurt, betaal je na die twee weken vijf euro per dag minder.

Familie de Vries gaat op vakantie en huurt bij "Speedy" een auto. Bij terugkomst moeten ze 740 euro betalen. Hoeveel dagen heeft familie de Vries de auto gehuurd?

Uitbreidingsvraag

Bij autobedrijf "lekker snel" verhuren ze ook auto's. Zij hanteren de volgende formule:

Bedrag = $190 + 20n$. Hierbij is n het aantal dagen dat je een auto huurt.

Vanaf hoeveel dagen is het goedkoper om een auto te huren bij "lekker snel" in plaats van bij "Speedy"?

Uitwerking

$$30 \cdot \text{aantal dagen} + 120$$

$$\text{na 2 weken betaal je } 30 \cdot 14 + 120 = 540$$

$$140 : 5 = 28$$

16 dagen gehuurd

$$14 \text{ dagen kost } € 540$$

$$15 \text{ dagen kost } € 685$$

$$16 \text{ dagen kost } € 740$$

Uitwerking

euro	30	150	180	1500	750
dagen	1	2	10		

euro	0	150	180	210	240	270	300	330	360	390	420
dag											

Hoeveel dagen heeft familie de Vries de auto gehuurd? 22 dagen

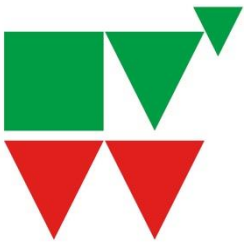
$$\begin{array}{r} 450 \\ 11 \end{array}$$

Uitwerking

$$30 \times 14 = 420 + 120 = 540$$

$$25 \cdot 7 = 175 + 540 = 715$$

$$25 \cdot 1 = 25 + 715 = 740$$



Het probleem

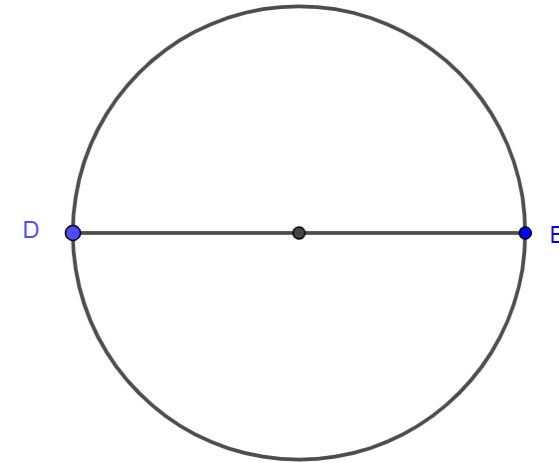
Teken een willekeurig punt F op één van de cirkels op het werkblad. Teken in de cirkel driehoek DEF.

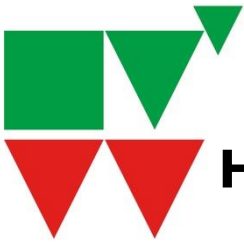
Hoe groot denk je dat hoek F is?

Teken in een andere cirkel een ander punt F en maak ook hier driehoek DEF. Schat nogmaals hoek F.

Welk vermoeden durf je uit te spreken over hoek F?

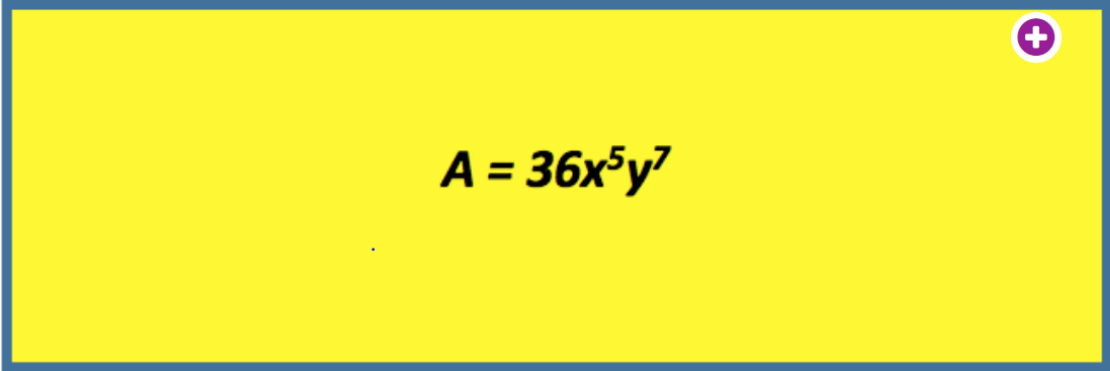
Bewijs dit vermoeden.





Het probleem

De oppervlakte van de rechthoek is $36x^5y^7$.
Wat kunnen de afmetingen van de zijden zijn?
Probeer zoveel mogelijke oplossingen te vinden.


$$A = 36x^5y^7$$



Bereken de hoogte van de grote piramide.

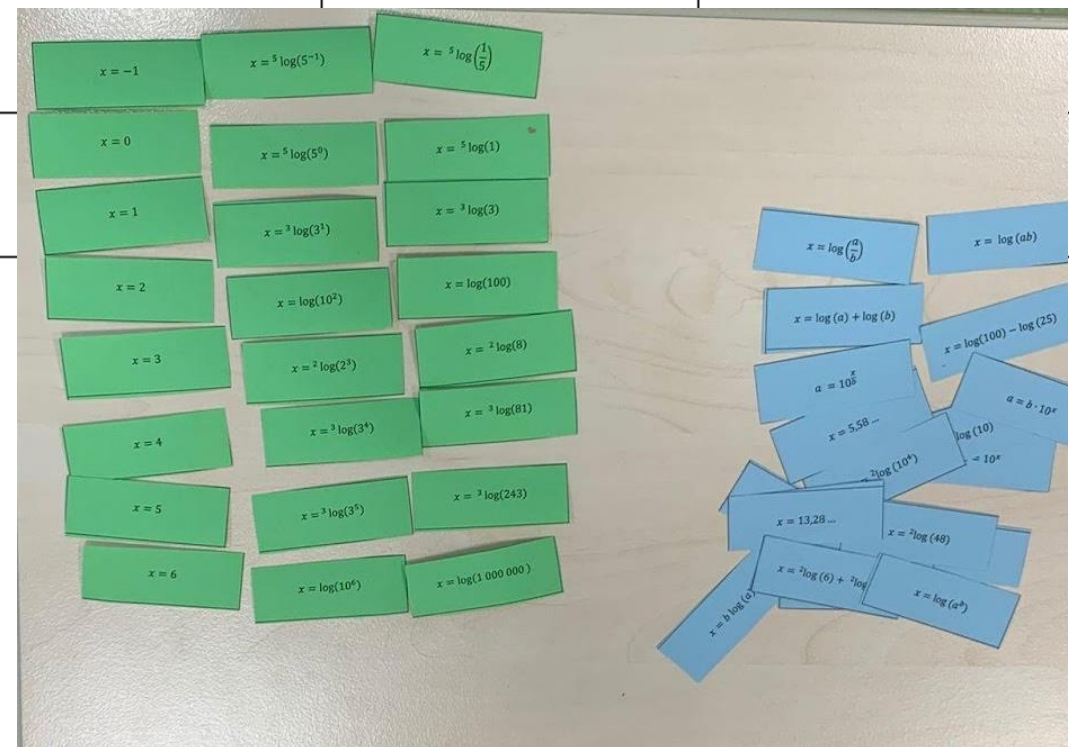
Bewerking		Voorbeeld van bewerking en inverse bewerking	
+	x plus ...	$x + 2 = 64$	$x = 64 - 2$
-	x min ...		
*	x keer ...	$x \cdot 2 = 64$	$x = \frac{64}{2}$
/	x gedeeld door ...		
kwadraat	x tot de macht ...	$x^2 = 64$	$x = \sqrt{64}$
wortel	de ... wortel van x	$x^3 = 27$	$x = \sqrt[3]{27}$
exponent	... tot de macht x	$2^x = 8$	$x = {}^2\log(8)$ $x = {}^2\log(2^3) = 3$
logaritme	... <u>log</u> van x		

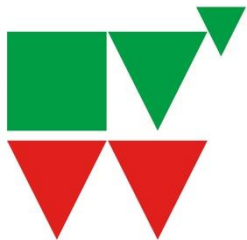
Opdracht

Je krijgt een set met verschillende kaartjes, het is de bedoeling dat je setjes van drie maakt van kaartjes die bij elkaar horen.

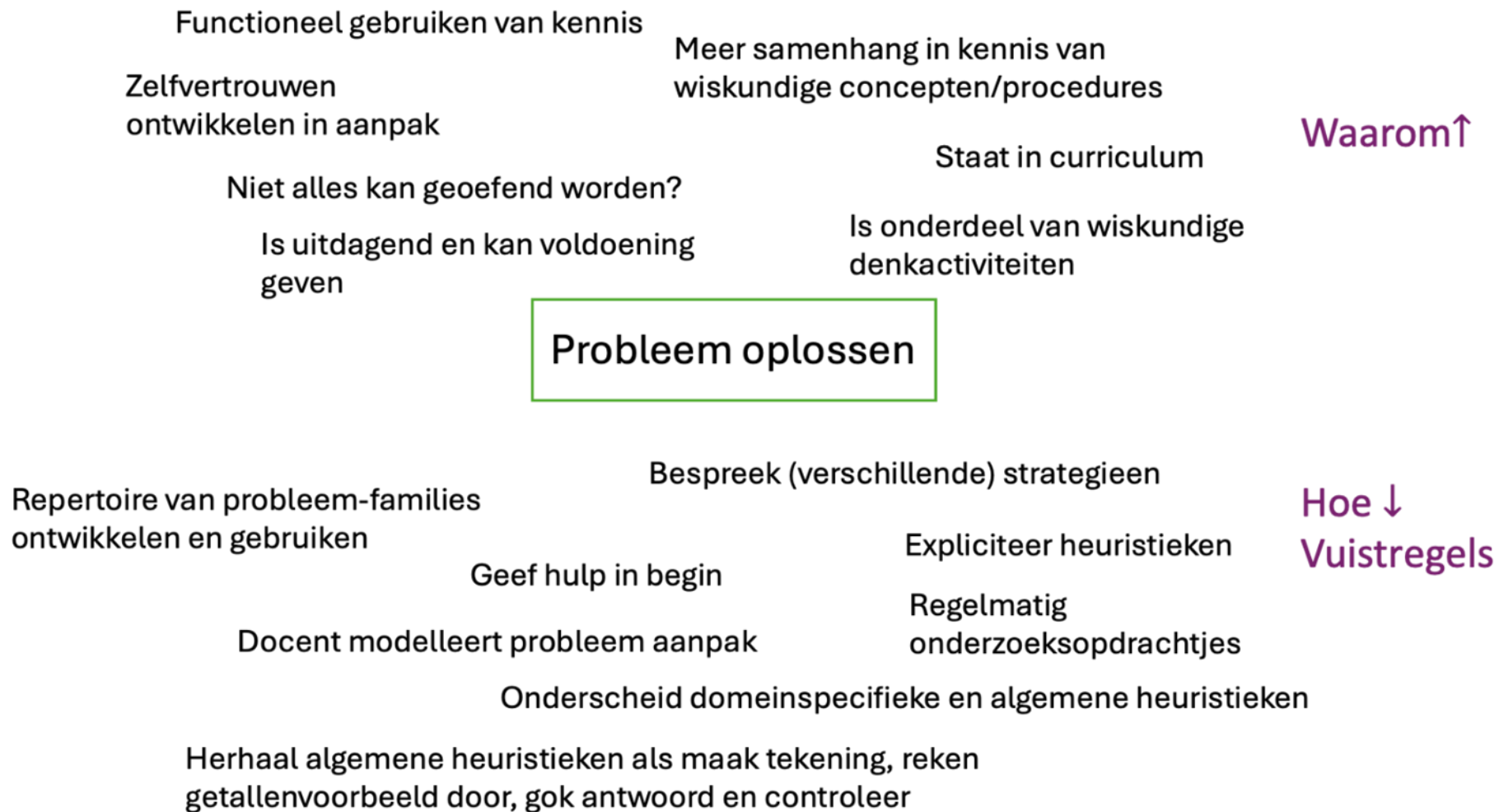
Je mag hierbij GEEN gebruik maken van je rekenmachine

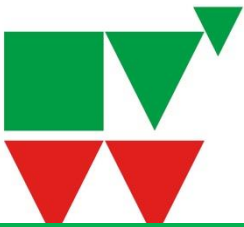
$x = 3$	$x = {}^2\log(8)$	$x = {}^2\log(2^3)$
$x = 2$	$x = \log(100)$	$x = \log(10^2)$
$x = 4$	$x = {}^3\log(81)$	$x = {}^3\log(3^4)$
$x = -1$	$x = {}^5\log\left(\frac{1}{5}\right)$	$x = {}^5\log(5^{-1})$





Afsluiten



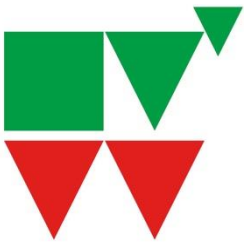


Afsluiting: Probleem oplossen in de les

Stellingen:

- kost extra tijd maar dat is een goede investering
- kan eenvoudig ingebouwd worden in lessen
- vraagt niet veel van docenten
-

En eigen vuistregels: wat is je opgevallen en wil je niet vergeten?



Het probleem

De exacte oplossing van $3^x = 10$ is $x = {}^3\log(10)$

a) Wat is dus de uitkomst van $3^{{}^3\log(10)}$? En dus in het algemeen van $g^{{}^g\log(a)}$?

De uitkomst van $3^{{}^3\log(5)+{}^3\log(2)}$ is een mooi getal, namelijk 10.

b) Toon dit aan door de rekenregel $a^p \cdot a^q = a^{p+q}$ te gebruiken.

Je kunt uit het vorige concluderen dat ${}^3\log(5) + {}^3\log(2) = {}^3\log(10)$

c) Leg dat uit.

d) Schrijf de conclusie van c) als een algemene regel met variabelen in plaats van getallen. Bewijs deze regel vervolgens op de manier van b) en c) (in het algemeen: niet met voorbeelden, maar met variabelen).

e) Hoe kun je de regel van d) gebruiken om aan te tonen dat geldt?:

$${}^2\log(60) - {}^2\log(4) = {}^2\log(15)$$

f) Hoe kun je de regel van d) gebruiken om aan te tonen dat geldt?:

$$4 \cdot {}^5\log(2) = {}^5\log(16)$$

g) Vul aan en maak algemene regels met variabelen van wat je bij e) gevonden hebt en wat je bij f) gevonden hebt:

$${}^g\log(a) - {}^g\log(b) = \dots$$

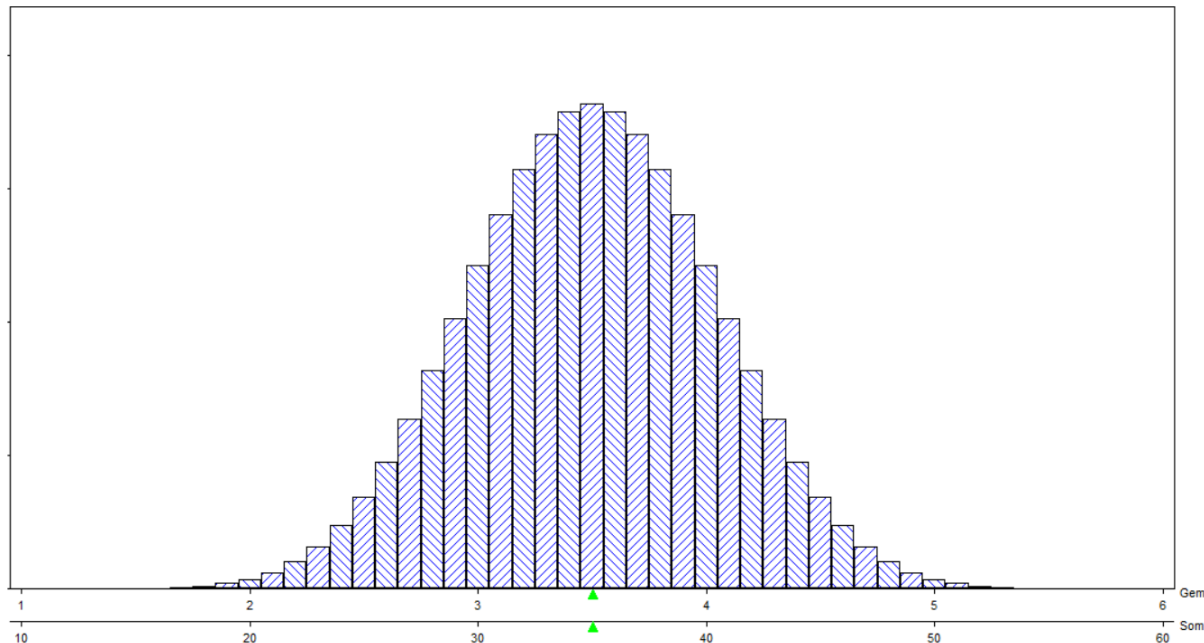
$$k \cdot {}^g\log(a) = \dots$$



Opdracht:

Gooi 10000x met dobbelsteen en tel het aantal ogen; hoe reëel is het dat je totaal 36.000 ogen of meer gooit?

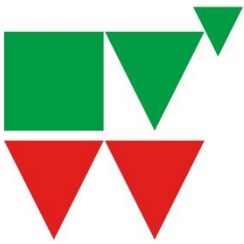
Wat is de verwachting van de som van het aantal ogen, de variantie en de standaard afwijking?



In de eerste drie kolommen zie je de verwachte waarde, de variantie en de standaard afwijking gemiddeld per worp en de laatste drie kolommen de verwachte waarde, de variantie en de standaard afwijking over de som van de ogen.

Wat valt je op? Kun je formules maken?

n	Verw. Gem.	Variantie Gem.	St.Afw Gem.	Verw. Som	Variantie Som	St.Afw Som
1	3,50	2,92	1,708	3,50	2,92	1,708
2	3,50	1,46	1,208	7,00	5,83	2,415
3	3,50	0,97	0,986	10,50	8,75	2,958
4	3,50	0,73	0,854	14,00	11,67	3,416
5	3,50	0,58	0,764	17,50	14,58	3,819
6	3,50	0,49	0,697	21,00	17,50	4,183
7	3,50	0,42	0,645	24,50	20,42	4,518
8	3,50	0,36	0,604	28,00	23,33	4,830
9	3,50	0,32	0,569	31,50	26,25	5,123
10	3,50	0,29	0,540	35,00	29,17	5,401

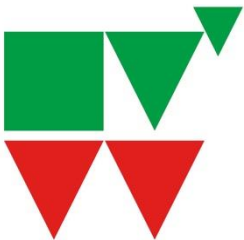


Het probleem

We hebben twee gelijkvormige pakken hagelslag. Een mini en een regulier pak. Voor een wereldrecordpoging willen we het grootste hagelslag pak ooit maken. We weten dat de bodem van het mini pak hagelslag 1 bij 3 centimeter is. Van het reguliere pak hagelslag weten we dat de lengte 12 centimeter is en de hoogte 20 centimeter.

De eis voor het grootste pak hagelslag is dat deze 11 meter hoog moet worden. Bereken de ontbrekende maten van het grootste pak.





Het probleem

Jullie krijgen 4 grafieken. Deze grafieken zijn de toetsresultaten van 4 verschillende atheneum 4 klassen. Rangschik de 4 klassen van het minst goede naar het beste resultaat. Onderbouw jouw conclusie met zo veel mogelijk verschillende wiskundige argumenten. Je kan hierbij onder andere centrummaten of de vijfgetallensamenvatting gebruiken.

