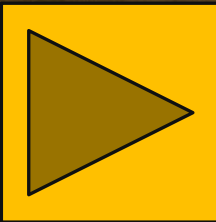


ChatGPT en co

AI-tools voor wiskunde



Ivan De Winne



1950 Alan Turing: imitation game
“Kunnen machines denken?”

Alan Turing
1912 geboren
1941 Enigma
1950 Turing test
1954 overleden

Turing test

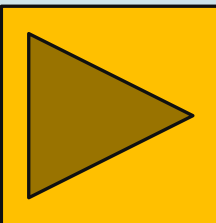
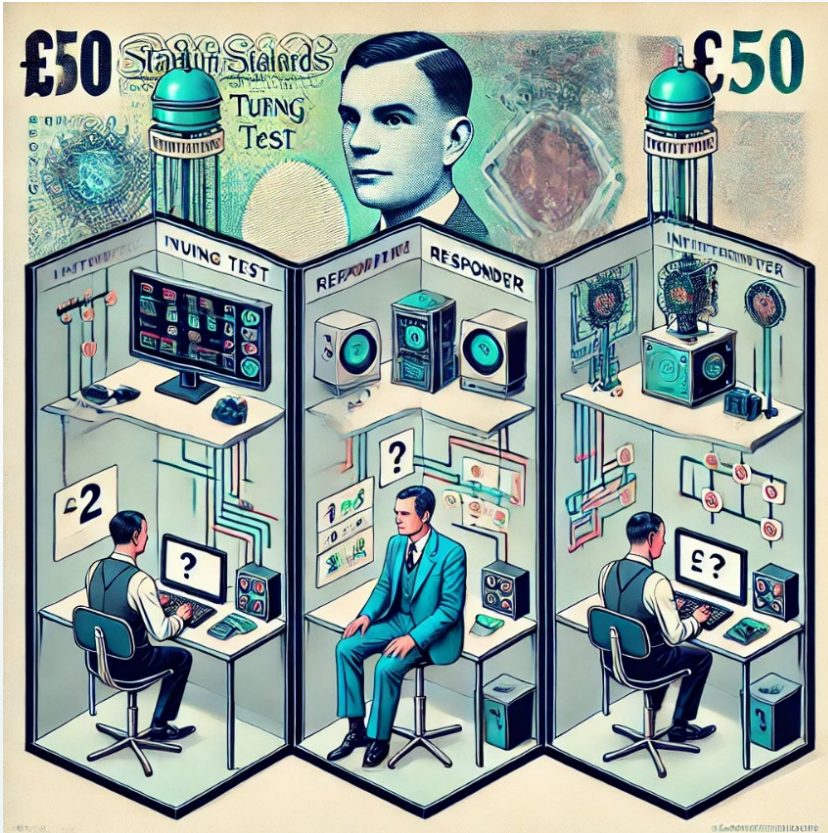
De machine (AI)

Een mens Y

Een ondervrager X (ook een mens)

De ondervrager X moet achterhalen of de antwoorden door een mens Y of een machine (computer) worden gegeven.

De machine slaagt voor de Turing test indien de ondervrager niet in staat zijn om met enige zekerheid te zeggen welke van de twee respondenten de machine is en welke de mens.

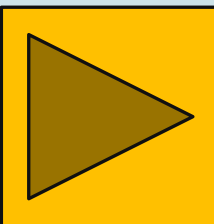


Eerste vermelding van het begrip AI in 1956



Marvin Minsky

“Ai is de wetenschap van het maken van machines die dingen doen die intelligentie zouden vereisen als ze door mensen zouden worden gedaan.”





Belangrijke mijlpalen

1997: IBM schaakcomputer Deep Blue

Analyse 200 miljoen zetten

15 zetten vooruitdenken

Beslissingsboom

Wereldkampioen Gary Kasparov verliest

Nog GEEN neuraal netwerk



2014 Deepmind en AlphaGO

GO spelbord 19 x 19 = 361 posities

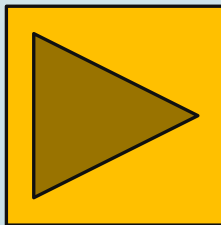
Totaal aantal mogelijkheden

$361 \times 360 \times 359 = 361!$

Wereldkampioen Lee Seedol

Verliest in 2016 van AlphaGO

Wel zelflerend neuraal netwerk



Maakt een computersysteem gebruik van AI ?

Twee belangrijke kenmerken

Autonomie (zelfstandigheid)

Je spreekt van AI als een systeem zelfstandig taken kan uitvoeren in complexe situaties en omgevingen, zonder constante supervisie en begeleiding van een mens.

Zelflerend (adaptiviteit)

Een AI-systeem is in staat om de eigen prestaties te verbeteren en slimmer te worden door te leren van ervaringen

Soorten AI

Artificial Narrow Intelligence (ANI) (zwakke AI)

Gespecialiseerd in 1 deelgebied.
Spamfilter, chatbots
Patroonherkenning

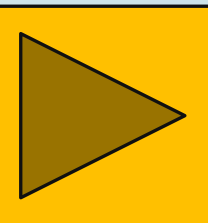
Artificial General Intelligence (sterke AI)

Mens-gelijke AI: alle gebieden

Artificial SuperIntelligence (sterke AI)

Overstijgt intelligentie van de mens

Chatbots generative AI





30 november 2022

Lancering ChatGPT 3.5 door OpenAI



Sam Altman ✓

@sama

today we launched ChatGPT. try talking with it here:

chat.openai.com

8:38 PM · Nov 30, 2022

Gemini

Google
December 2023



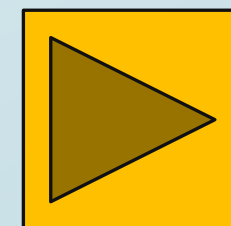
Microsoft Copilot
2023

 Claude

Anthropic
Perplexity



Deepseek
2025



Vershil GPT en ChatGPT

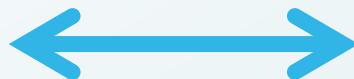
GPT is een taalmodel (LLM)

bedoeling menselijke taal te genereren

ChatGPT is app



GPT is het brein
achter de schermen
van deze applicatie



ChatGPT is
een web-applicatie,
interface...

Metafoor

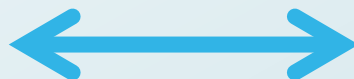
Intel processor

Samsung Computer

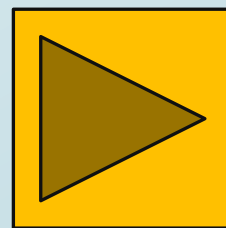
Motor

Auto

Encyclopedie



Bibliothecharis



Betekenis GPT

GPT is een AI-taalmodel dat in staat is om de structuur en patronen van taal te analyseren.

De technische term voor een taalmodel is LLM (Large Language Model).

G = Generative (GenAI)

Generatief betekent dat deze modellen zelf teksten kunnen creëren.

Ze zijn dus heel goed met woorden. Maakt niet uit of het om een gedicht gaat, een zakelijk e-mail of een essay. Zolang jij maar een opdracht geeft vult het model de rest wel aan.

P = Pre-trained

Je hoeft niet zelf het taalmodel te trainen. Dat heeft het bedrijf Open AI al voor je gedaan met enorm veel data uit verschillende bronnen, waaronder Wikipedia. Het trainen van het GPT-taalmodel heeft honderden miljoenen dollars gekost.

T = Transformer

De transformer-architectuur helpt het model om taalcontext en nuances te begrijpen, wat cruciaal is voor het nabootsen van natuurlijke gesprekken en het bieden van relevante antwoorden.

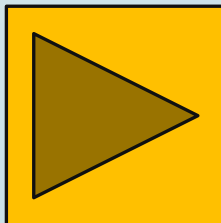
Dit betekent dat de Transformer er voor zorgt dat een bepaald woord betekenis krijgt door andere woorden die er mee verband houden.

Input (prompt)	Output
tekst	tekst
tekst	code
tekst	afbeelding
tekst	muziek
tekst	video

Apple



Apple



(Chat)GPT is een taalmodel

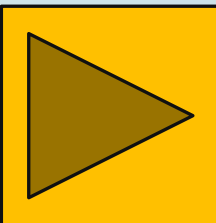
ChatGPT 3.5 is een
stochastische papegaai



Vraag aan ChatGPT 3.5

Vervolledig de volgende zin

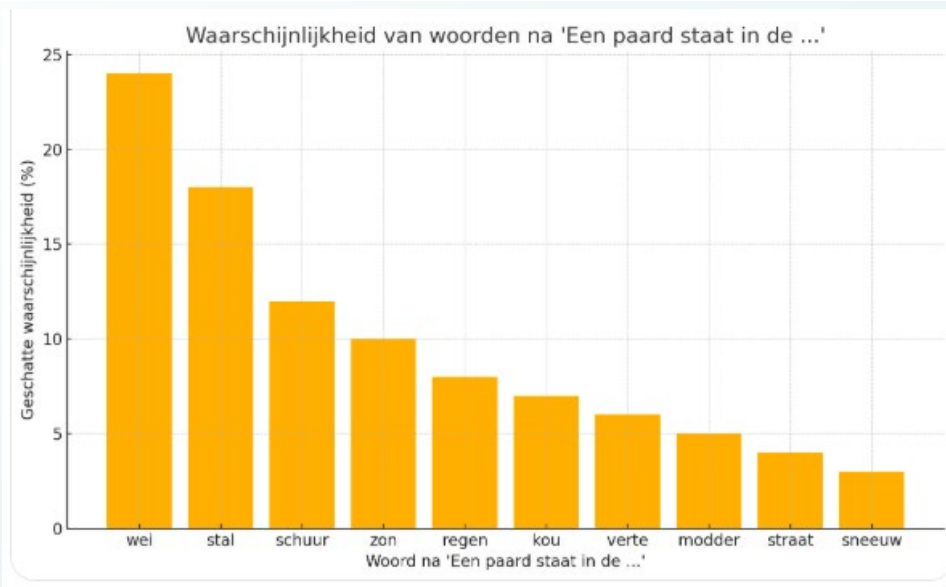
Een paard staat in de ...





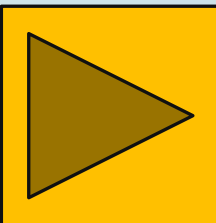
Vraag aan ChatGPT...

Geef 10 woorden waarvan de waarschijnlijkheid het grootst is om te volgen op de zin "Een paard staat in de ..." Maak ook een tabel met de waarschijnlijkheden.



Top 10 waarschijnlijke woorden + geschatte waarschijnlijkheid

Rang	Woord	Geschatte Waarschijnlijkheid
1	wei	24%
2	stal	18%
3	schuur	12%
4	zon	10%
5	regen	8%
6	kou	7%
7	verte	6%
8	modder	5%
9	straat	4%
10	sneeuw	3%

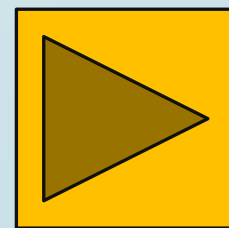




Geef een aantal antwoorden met een waarschijnlijkheid kleiner dan 1 procent

Zeker! Hier zijn een aantal woorden die grammaticaal wel passen op de zin "Een paard staat in de ...", maar waarvan de kans dat ze voorkomen **kleiner dan 1%** is — ze zijn dus **erg onwaarschijnlijk** in normale context:

Woord	Geschatte waarschijnlijkheid
rechtbank	< 1%
lift	< 1%
badkamer	< 1%
boekenkast	< 1%
vergadering	< 1%
supermarkt	< 1%
keuken	< 1%
auto	< 1%
disco	< 1%
raket	< 1%





ChatGPT ~~kan~~ kon niet rekenen!



ChatGPT kan fouten maken. Controleer belangrijke informatie.

ChatGPT 3.5



Open A I Gpt 3.5 ▾

3+5

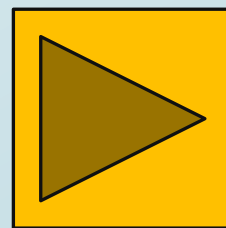
$3 + 5 = 8$

Open A I Gpt 3.5 ▾

$123,456 \times 654,321 = 80,881,574,976$

Correct antwoord met GeoGebra

$123456 \cdot 654321$
 $= 80779853376$



ChatGPT 4 taalmodel **ZONDER** geavanceerde data-analyse

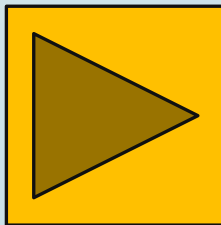


Geef 5 mogelijke antwoorden op de berekening $123456 \cdot 654321$ zonder deze vraag te analyseren door enkel en alleen het taalmodel GPT4 te gebruiken

Hier zijn vijf willekeurige mogelijke antwoorden op de berekening zonder enige analyse of berekening uit te voeren:

1. 80987263512
2. 75293146852
3. 123456789012
4. 580223344556
5. 876543210987

[Berekening versie 4 zonder code interpreter](#)

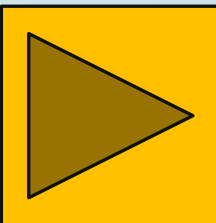




Recentere versie ChatGPT4
Met geavanceerde data-analyse

Geavanceerde data-analyse (voorheen code-interpreter genaamd)

- is een technologie binnen ChatGPT
 - analyseert de vragen (prompts) van de gebruiker
 - genereert (python) programmacode
- python™
- voert deze code uit
 - zet deze code omzet in leesbare tekst en eventuele afbeeldingen genereert.





Eenvoudig voorbeeld van data-analyse met ChatGPT 4o

Bereken het product 123456×654321



ChatGPT 4o ▾

Opslaan als PDF ▾

Deeln

123456*654321

Analyse weergeven

The result of 123456×654321 is 80,779,853,376. [↗]

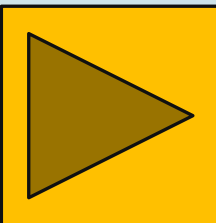
Analyse ×

python Altijd details weergeven ☐ Kopiëren

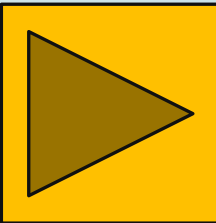
```
# Perform the multiplication
result = 123456 * 654321
result
```

Resultaat

80779853376



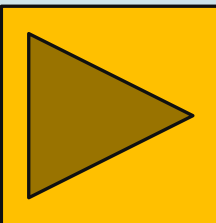
**Oplossen
vraagstukken**



Probleemoplossen met ChatGPT



Dit jaar is mijn vader precies drie keer zo oud als ik.
Binnen twee jaar is hij precies twee keer zo oud als mijn
zus. Mijn zus was 7 jaar oud wanneer ik ben geboren.
Wat is onze leeftijd?





Dit jaar is mijn vader precies drie keer zo oud als ik.
Binnen twee jaar is hij precies twee keer zo oud als mijn zus. Mijn zus was 7 jaar oud wanneer ik ben geboren.
Wat is onze leeftijd?

Laten we deze puzzel stap voor stap oplossen:

Gegeven informatie:

1. Dit jaar is je vader precies drie keer zo oud als jij.
 - Als jouw leeftijd x is, dan is de leeftijd van je vader $3x$.
2. Binnen twee jaar is hij precies twee keer zo oud als je zus.
 - Over twee jaar zal de leeftijd van je vader $3x + 2$ zijn.
 - De leeftijd van je zus nu is $x + 7$ (ze was 7 jaar oud toen jij geboren werd).
 - Over twee jaar is haar leeftijd $x + 7 + 2 = x + 9$.
 - Volgens de tweede voorwaarde geldt dan:

$$3x + 2 = 2(x + 9)$$

Vraagstuk leeftijden

Stap 1: Vind x

Van de tweede voorwaarde:

$$3x + 2 = 2(x + 9)$$

Werk dit uit:

$$3x + 2 = 2x + 18$$

$$3x - 2x = 18 - 2$$

$$x = 16$$

Stap 2: Bereken de leeftijden

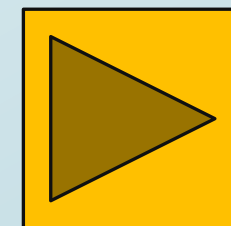
- Jij bent $x = 16$ jaar oud.
- Je vader is $3x = 3 \cdot 16 = 48$ jaar oud.
- Je zus is $x + 7 = 16 + 7 = 23$ jaar oud.

Controleer de voorwaarden:

1. Dit jaar is je vader drie keer zo oud als jij:
 - $48 = 3 \cdot 16$ klopt.
2. Binnen twee jaar is je vader twee keer zo oud als je zus:
 - Over twee jaar is je vader $48 + 2 = 50$.
 - Over twee jaar is je zus $23 + 2 = 25$.
 - $50 = 2 \cdot 25$ klopt.

Conclusie:

- Jij bent **16 jaar oud**.
- Je vader is **48 jaar oud**.
- Je zus is **23 jaar oud**.



Een vraag met een valkuil



Een orkest met 40 muzikanten speelt een symfonie in 60 minuten. Hoeveel tijd heeft een orkest met 80 muzikanten nodig om deze symfonie te spelen? Leg de oplossing stap voor stap uit.

Dit is een leuke vraag die vaak wordt gebruikt om logisch redeneren te testen. Laten we stap voor stap kijken wat hier aan de hand is.

Stap 1: Begrijp de situatie

- Er is een symfonie.
- Die symfonie duurt 60 minuten om te spelen.
- Het maakt niet uit hoeveel muzikanten er zijn, want ze spelen **samen** het **hele stuk**.

Stap 2: Wat verandert er bij meer muzikanten?

- De **lengte van de symfonie** verandert **niet**.
- Of je nu 40, 80 of 800 muzikanten hebt: de muziekstuk blijft 60 minuten lang.

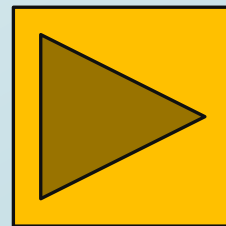
Stap 3: Wat is de truc?

De fout die mensen soms maken is om te denken dat meer muzikanten = sneller klaar. Maar dat geldt bij taken zoals "graan oogsten" of "stoelen in elkaar zetten". Muziek werkt anders: alle muzikanten spelen **tegelijkertijd**, en ze spelen het stuk gewoon samen.

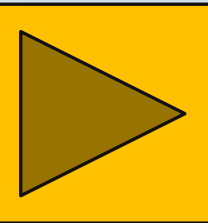
Antwoord:

Het orkest met 80 muzikanten heeft nog steeds 60 minuten nodig om de symfonie te spelen.

[Vraag met valkuil](#)



Prompts



Prompts en prompt engineering

Waar kan ik je mee helpen?

Prompt

Stel een vraag



Diepgaand onderzoeken

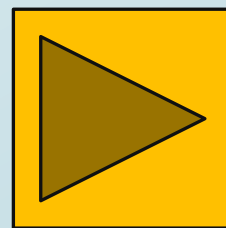


Ik ben een wiskundeleraar in het in het 4de jaar van het secundair onderwijs in Vlaanderen (leeftijd leerlingen 14 en 15 jaar; ik geef het vak meetkunde. Jij bent een expert in cartesische meetkunde.

Ik moet de bijzondere rechten in een driehoek uitleggen zijnde zwaartelijn, hoogtelijn, middelloodlijn en bissectrice.

Maak een les waarin deze begrippen worden gedefinieerd en geef het verband met de rechte van Euler.

verdeel dit in een aantal paragrafen waarin elk begrip wordt uitgelegd. Noteer de basisbegrippen in het vet en de uitleg in cursief.





Persona
Doelgroep

Jij bent een expert in cartesische meetkunde.

Taakomschrijving

Ik ben een wiskundeleraar in het voortgezet onderwijs in Nederland. (leeftijd leerlingen 14 en 15 jaar)
ik geef het vak meetkunde.

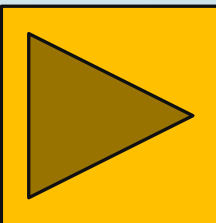
Opdracht

Ik moet de **bijzondere rechten in een driehoek** uitleggen, zijnde zwaartelijn, hoogtelijn, middelloodlijn en bissectrice uitleggen aan mijn leerlingen

Formaat
van resultaat

Maak een les waarin deze begrippen worden gedefinieerd en verduidelijkt.

Verdeel de **les** dit in een aantal paragrafen waarin elk begrip wordt uitgelegd.
Noteer de basisbegrippen in het vet en de uitleg in cursief.





ONTWERPEN VAN EEN LES

Bijzondere lijnen in driehoek

Les: Bijzondere rechten in een driehoek en de rechte van Euler

Inleiding

In deze les bestuderen we vier bijzondere rechten in een driehoek: **zwaartelijn**, **hoogtelijn**, **middelloodlijn** en **bissectrice**. We onderzoeken hun eigenschappen, hoe ze worden geconstrueerd en hun verband met de **rechte van Euler**. Deze concepten vormen een belangrijk deel van de **cartesiaanse meetkunde** en bieden inzicht in de symmetrie en structuur van driehoeken.

1. Zwaartelijn

Definitie:

Een **zwaartelijn** is een rechte die door een hoekpunt van een driehoek gaat en het midden van de overstaande zijde verbindt.

*De zwaartelijn verdeelt de driehoek in twee kleinere driehoeken met gelijke oppervlakken. Elke driehoek heeft drie zwaartelijnen, en deze snijden elkaar in één punt: het **zwaartepunt**. Het zwaartepunt verdeelt elke zwaartelijn in twee stukken in de verhouding 2:1, gemeten vanaf het hoekpunt.*

Constructie:

1. Teken de driehoek ABC .
2. Zoek het midden M van een zijde (bijvoorbeeld BC).
3. Trek een rechte lijn van hoekpunt A naar M .

2. Hoogtelijn

Definitie:

Een **hoogtelijn** is een rechte die door een hoekpunt van een driehoek gaat en loodrecht staat op de overstaande zijde (of de verlenging daarvan).

*De hoogtelijn geeft de kortste afstand van een hoekpunt tot de overstaande zijde. De drie hoogtelijnen van een driehoek snijden elkaar in één punt: het **hoogtepunt**.*

Constructie:

1. Teken de driehoek ABC .
2. Teken een loodlijn vanaf een hoekpunt (bijvoorbeeld A) naar de overstaande zijde BC (of de verlenging daarvan).

3. Middelloodlijn

Definitie:

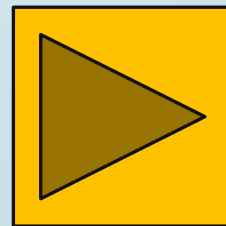
Een **middelloodlijn** is een rechte die loodrecht staat op een zijde van een driehoek en door het midden van die zijde gaat.

*Middelloodlijnen hebben de eigenschap dat elk punt op de middelloodlijn even ver ligt van de twee hoekpunten van de lijn waar ze op staan. De drie middelloodlijnen van een driehoek snijden elkaar in één punt: het **middelpunt van de omgeschreven cirkel**.*

Constructie:

1. Zoek het midden van een zijde (bijvoorbeeld BC).
2. Trek een loodlijn door dit midden.

Les lijnen in een driehoek



Rechte van Euler



5. De rechte van Euler

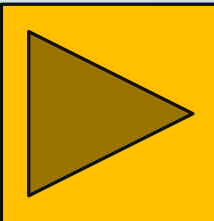
Definitie:

De **rechte van Euler** is een rechte lijn die drie belangrijke punten in een driehoek met elkaar verbindt: het **zwaartepunt**, het **hoogtepunt**, en het **middelpunt van de omgeschreven cirkel**.

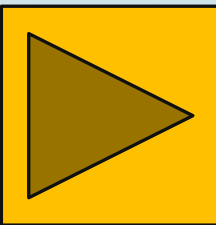
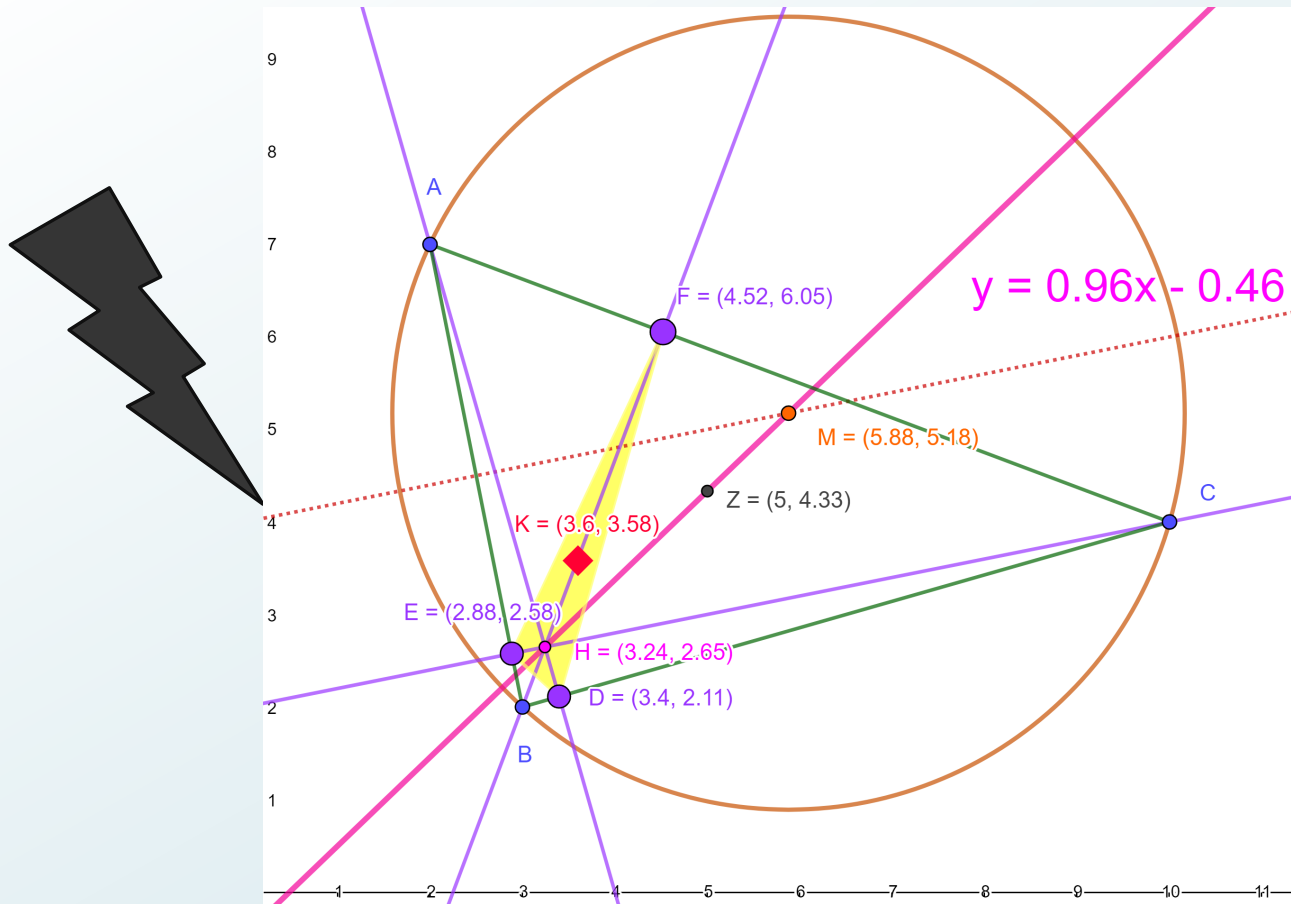
In elke niet-rechthoekige driehoek liggen deze drie punten op één lijn. Het zwaartepunt ligt op $\frac{2}{3}$ van de afstand tussen het hoogtepunt en het middelpunt van de omgeschreven cirkel.

Verband met bijzondere rechten:

- De **zwaartelij**n leidt naar het zwaartepunt.
- De **hoogtelij**n leidt naar het hoogtepunt.
- De **middelloodlij**n leidt naar het middelpunt van de omgeschreven cirkel.



CONTROLE met GeoGebra





ChatGPT herkent (soms) een fout in de opgave

Stel de vergelijking op van de raaklijn in het punt $P(2,3)$ aan de grafiek van de functie f met als voorschrift $f(x) = x^3 - 3x^2 + 1$

Stap 1: Controleer of $P(2,3)$ op de grafiek ligt

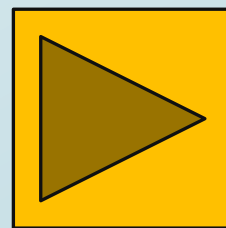
We controleren of $f(2) = 3$:

$$f(2) = 2^3 - 3 \cdot 2^2 + 1 = 8 - 12 + 1 = -3$$

● Foutje ontdekt: $f(2) = -3$, dus het punt $P(2,3)$ ligt niet op de grafiek van $f(x)$.

Waarschijnlijk is er een typefout in het punt gegeven.

[Foutje in de opgave](#)



Vergelijking raaklijn in punt $Q(-1, -3)$



Kies een ander punt $Q(-1, -3)$ en bepaal de vergelijking van de raaklijn in dit punt aan de grafiek.

Stel de cartesische vergelijking op van deze raaklijn.

✅ Stap 1: Controleer of Q op de grafiek ligt

We berekenen:

$$f(-1) = (-1)^3 - 3(-1)^2 + 1 = -1 - 3 + 1 = -3$$

✓ Klopt! $Q(-1, -3)$ ligt op de grafiek.

✎ Stap 2: Bereken de afgeleide $f'(x)$

$$f(x) = x^3 - 3x^2 + 1 \Rightarrow f'(x) = 3x^2 - 6x$$

📐 Stap 3: Bereken de helling van de raaklijn in $x = -1$

$$f'(-1) = 3(-1)^2 - 6(-1) = 3 + 6 = 9$$

Dus de helling van de raaklijn is 9.

📄 Stap 4: Stel de vergelijking van de raaklijn op

We gebruiken de formule van een rechte:

$$y - y_0 = m(x - x_0)$$

met $m = 9$, $x_0 = -1$, $y_0 = -3$:

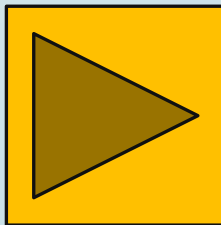
$$y - (-3) = 9(x - (-1)) \Rightarrow y + 3 = 9(x + 1)$$

$$\Rightarrow y = 9x + 9 - 3 = 9x + 6$$

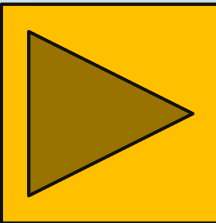
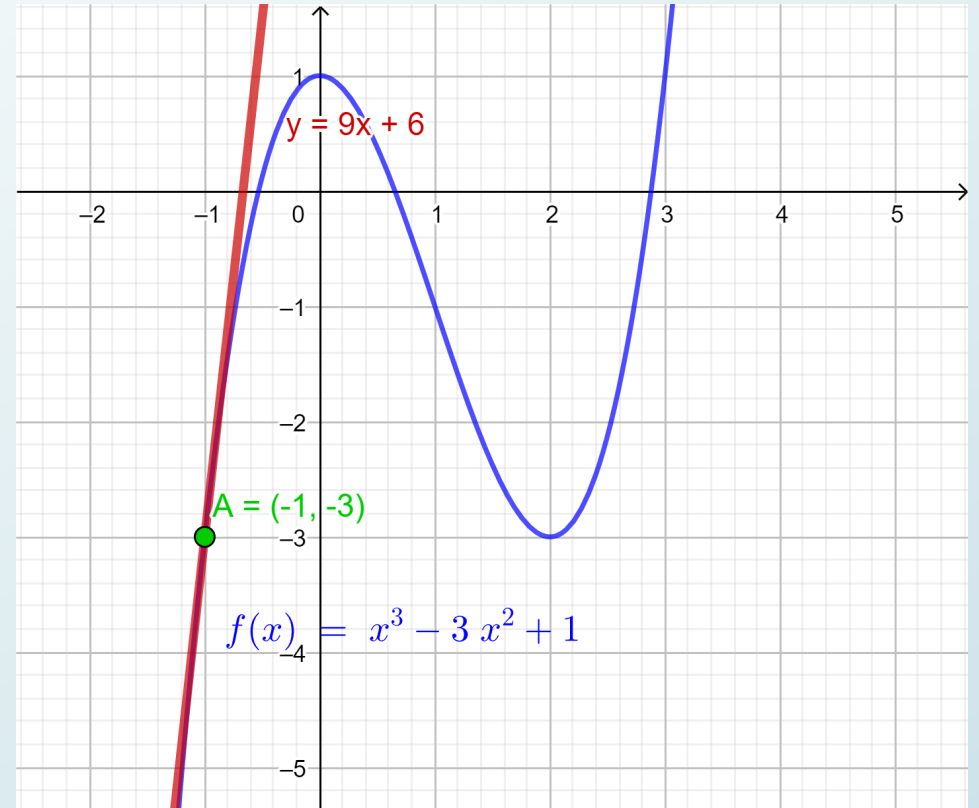
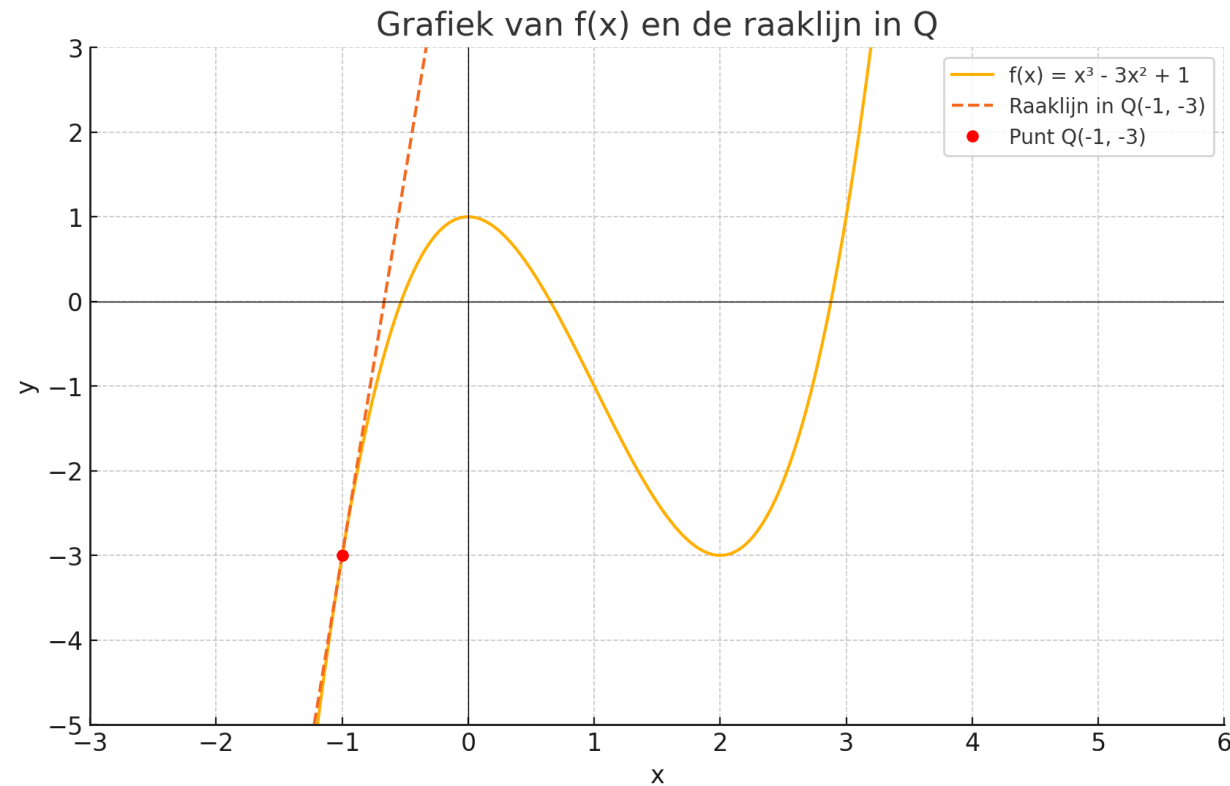
✅ Antwoord:

De vergelijking van de raaklijn aan de grafiek van $f(x) = x^3 - 3x^2 + 1$ in het punt $Q(-1, -3)$ is:

$$y = 9x + 6$$



Tip! Grafische voorstellingen
ChatGPT versus GeoGebra of Desmos





Tip! Stel duidelijke vragen

Geef de formules voor het oplossen van een tweedegraadsvergelijking $ax^2+bx+c=0$ met behulp van de discriminant

De **standaardformule** voor het oplossen van een **tweedegraadsvergelijking** van de vorm:

$$ax^2 + bx + c = 0$$

is gebaseerd op de **discriminant** D , die wordt gedefinieerd als:

$$D = b^2 - 4ac$$

Oplossingen afhankelijk van D :

1. Als $D > 0$ (twee verschillende reële oplossingen):

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a}, \quad x_2 = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a}$$

2. Als $D = 0$ (één dubbele reële oplossing):

$$x = \frac{-b}{2a}$$

3. Als $D < 0$ (geen reële oplossingen, maar twee complexe oplossingen):

$$x_1 = \frac{-b + i\sqrt{|D|}}{2a}, \quad x_2 = \frac{-b - i\sqrt{|D|}}{2a}$$

waarbij i de **imaginaire eenheid** is, gedefinieerd als $i = \sqrt{-1}$.



Graag enkel en alleen oplossingen die reële getallen zijn

Als we alleen reële oplossingen beschouwen, dan gelden de volgende formules op basis van de discriminant $D = b^2 - 4ac$:

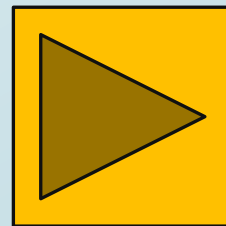
1. Als $D > 0$ (twee verschillende reële oplossingen):

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a}, \quad x_2 = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a}$$

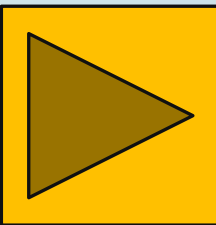
2. Als $D = 0$ (één reële oplossing, een dubbele wortel):

$$x = \frac{-b}{2a}$$

Voor $D < 0$ zijn er **geen reële oplossingen**.



Statistiek





Statistisch onderzoek: big data

Gegeven zijn de leeftijden van 714 passagiers van het gezonken schip de Titanic in 1912.

De data zijn opgenomen in een csv bestand.

Bereken ook de gemiddelde leeftijd van de passagiers, de jongste en ook oudste passagier, de mediaan, het eerste kwartiel en het derde kwartiel

Hier zijn de berekende statistieken voor de leeftijden van de passagiers:

- **Gemiddelde leeftijd:** 29,70 jaar
- **Jongste passagier:** 0,42 jaar
- **Oudste passagier:** 80,00 jaar
- **Mediaan leeftijd:** 28,00 jaar
- **Eerste kwartiel (Q1):** 20,13 jaar
- **Derde kwartiel (Q3):** 38,00 jaar

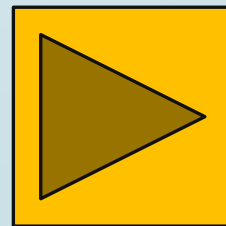
Bereken de standaardafwijking voor de populatie en ook de steekproefstandaardafwijking

Resultaat

(14.516321150817316, 14.526497332334042)

De berekende standaardafwijkingen zijn:

- **Standaardafwijking voor de populatie:** 14,52 jaar
- **Steekproefstandaardafwijking:** 14,53 jaar





Maak een frequentietabel van de data bij een indeling in 8 klassen.
Kleinste waarde 0 en grootste waarde 80

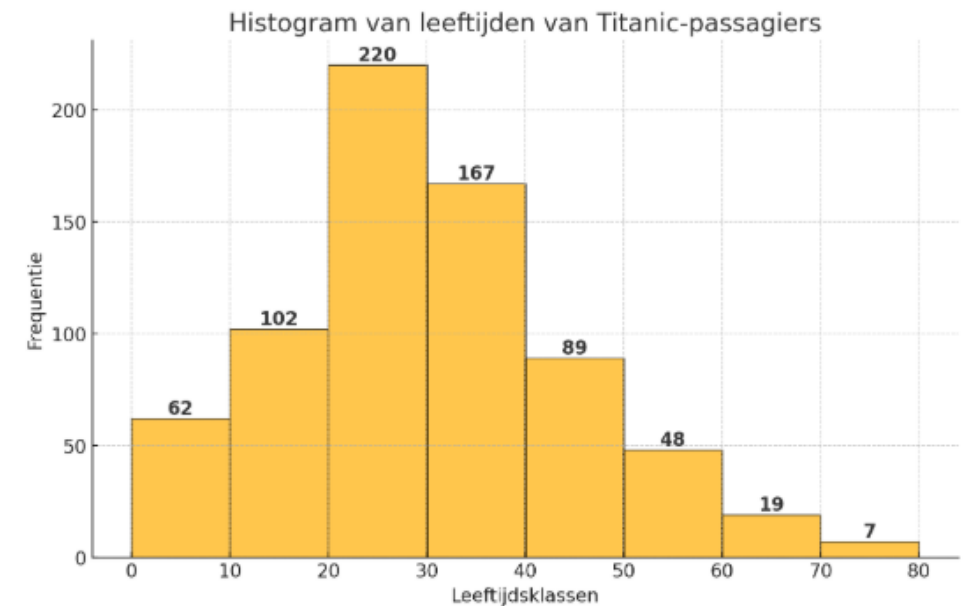
Frequentietabel Leeftijd Passagiers

	Klasse	Frequentie
1	[0, 10)	62
2	[10, 20)	102
3	[20, 30)	220
4	[30, 40)	167
5	[40, 50)	89
6	[50, 60)	48
7	[60, 70)	19
8	[70, 80)	7

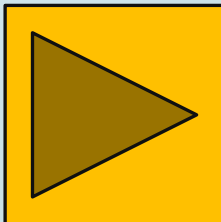
Teken het histogram van deze data onderverdeeld in 8 klassen,
breedte 10, kleinste grens 0 en grootste grens 80.

Plaats boven elke staaf het aantal in die bepaalde klasse.
Bijvoorbeeld klasse [0,10) is het aantal 62

Histogram Van Leeftijden Van Titanic-Passagiers



[Statistiek Titanic](#)

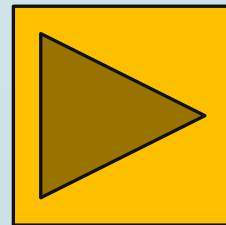
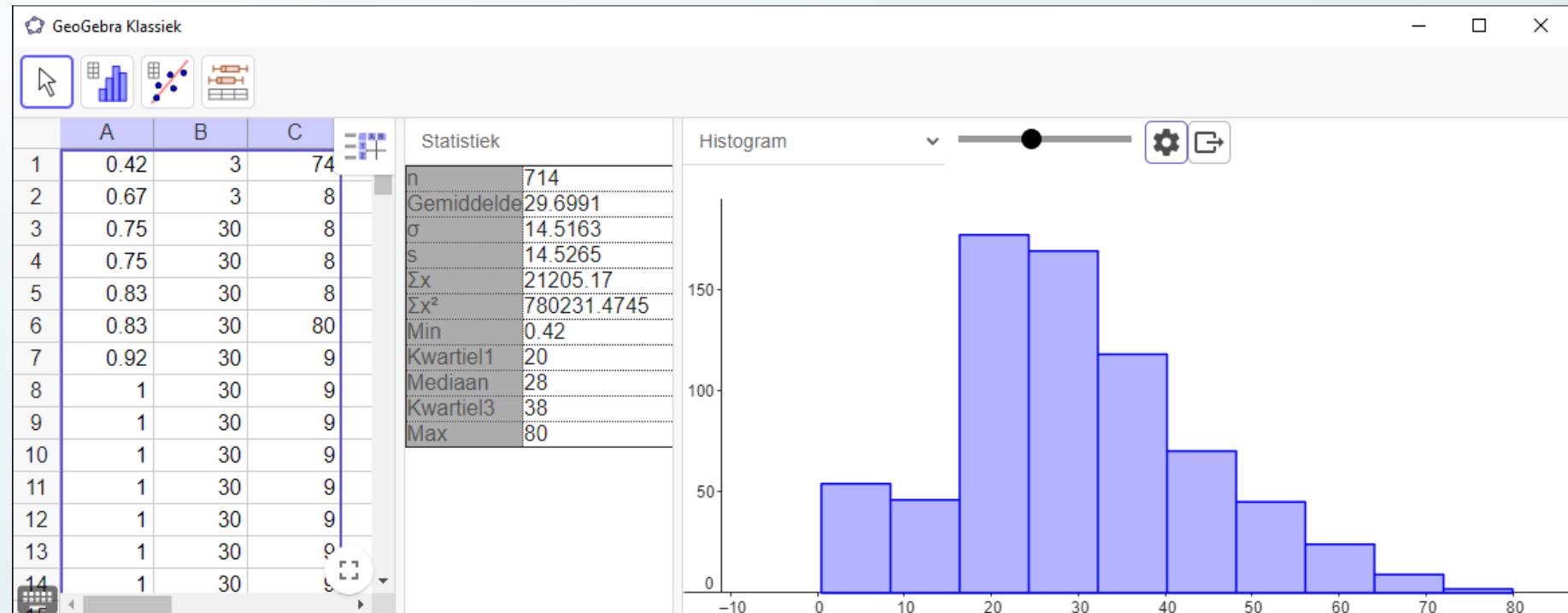




- Gemiddelde leeftijd: 29,70 jaar
- Jongste passagier: 0,42 jaar
- Oudste passagier: 80,00 jaar
- Mediaan leeftijd: 28,00 jaar
- Eerste kwartiel (Q1): 20,13 jaar
- Derde kwartiel (Q3): 38,00 jaar

Controle met GeoGebra

GeoGebra

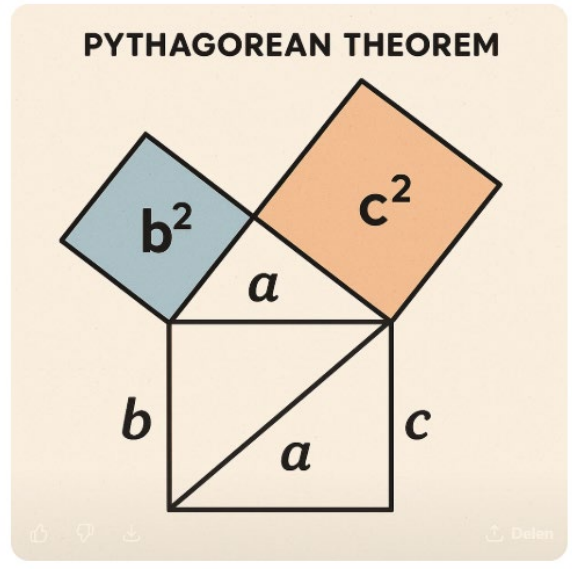


ChatGPT is **uitermate** slecht in klassieke meetkunde en bewijsvoering



Geef een meetkundig bewijs voor de stelling van pythagoras. Noem de schuine zijde a en de rechthoekszijden b en c . Verduidelijk met een tekening. Geef daarna een algebraïsch bewijs

maak een tekening in python



Illustratie

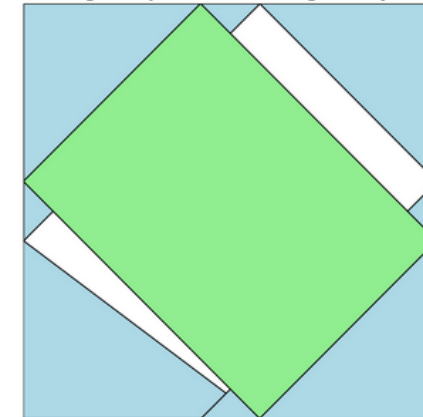
Hier is een ASCII-achtige schets van hoe het eruit ziet:

```
less
+-----+
| \      / |
|  \    /  |
|   \  /   |
|    X     |
|   /  \   |
|  /    \  |
| /      \ |
+-----+

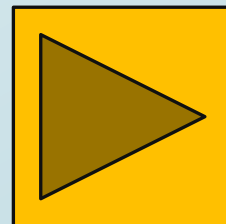
Buitenste vierkant
heeft zijde b + c
Binnenste vierkant
heeft zijde a
De driehoeken
hebben zijden b, c, a
```

Meetkundig Bewijs Van De Stelling Van Pythagoras

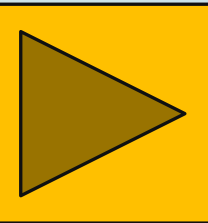
Meetkundig bewijs van de stelling van Pythagoras



Meetkunde bewijs Pythagoras



**AI tutor
leerlingen**



ChatGPT studiemodus AI-tutor voor leerlingen

Stel een vraag

+  **Bezig met nadenken** ▾

 Foto's en bestanden toevoe...

 Doe diepgaand onderzoek

 Maak een afbeelding

 Agentmodus

 **Studeren en leren**

... Meer

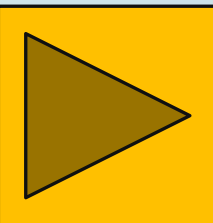


Voordelen van AI-tutor (t.o.v. docent)

- 1° 24/7 beschikbaar
- 2° Onbeperkt geduld
- 3° Directe feedback
- 4° Eigen tempo
- 5° Aanpasbaar aan niveau

Nadelen AI-tutor (t.o.v. docent)

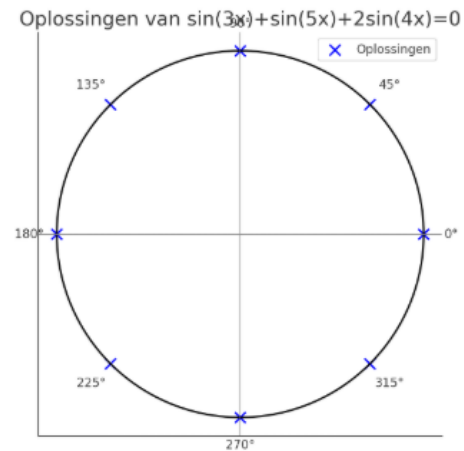
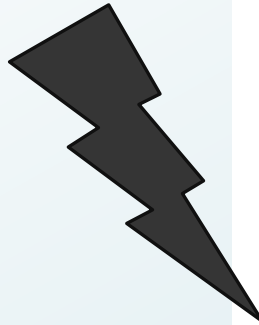
- 1° Gebrek aan empathie
- 2° Niet 100% betrouwbaar
- 3° Gebrek aan inzicht en redeneervermogen
- 4° Risico van Bias
- 5° Minder connectie en motivatie



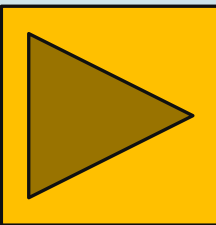
Voorbeeld: oplossen goniometrische vergelijking Socratische vraag-antwoord methode

Los de volgende goniometrische vergelijking op $\sin(3x) + \sin(x) = \sin(2x)$

Oplossingen Van $\sin(3x) + \sin(5x) + 2\sin(4x) = 0$



Voorbeeld: goniometrische vergelijking





Analyse

✓ Gegeven:

1. Gaat door de oorsprong:

$$f(0) = 0 \Rightarrow d = 0$$

2. Voor $x = 3$ is de richtingscoëfficiënt van de raaklijn -4:

$$\text{Dit betekent } f'(3) = -4$$

3. Voor $x = 5$ is er een relatief extremum met waarde 0:

Dit betekent:

- $f(5) = 0$
- $f'(5) = 0$

🔑 Stap 1: Algemeen voorschrift

Omdat f van de 3de graad is en $f(0) = 0$, stellen we:

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx$$

(dus zonder constante term d).

Bepaal het voorschrift van een veeltermfunctie van de 3de graad, waarvan de grafiek door de oorsprong $O(0,0)$ gaat, voor $x=3$ een raaklijn met richtingscoëfficiënt -4 heeft en voor $x=5$ een relatief extremum met waarde 0 heeft.

🔑 Stap 2: Afgeleide

We berekenen de afgeleide:

$$f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$$

🔑 Stap 3: Gebruik de voorwaarden

Voorwaarde 1: $f'(3) = -4$

$$3a(3)^2 + 2b(3) + c = -4 \Rightarrow 27a + 6b + c = -4$$

Voorwaarde 2: $f(5) = 0$

$$a(5)^3 + b(5)^2 + c(5) = 0 \Rightarrow 125a + 25b + 5c = 0$$

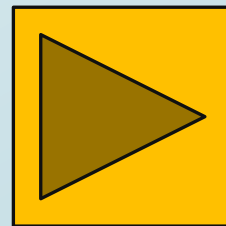
Voorwaarde 3: $f'(5) = 0$

$$3a(5)^2 + 2b(5) + c = 0 \Rightarrow 75a + 10b + c = 0$$

🔍 Stap 4: Stelsel oplossen

📄 Eindresultaat:

$$f(x) = \frac{1}{2}x^3 - 5x^2 + \frac{25}{2}x$$





TOEWIJZEN

AANMELDEN



Algebra



Tabel



Rekenblad

$$f(x) = a x^3 + b x^2 + c x + d$$

$$\text{vgl1 : } f(0) = 0$$

$$= d = 0$$

$$\text{vgl2 : } f'(3) = -4$$

$$= 27 a + 6 b + c = -4$$

$$\text{vgl3 : } f'(5) = 0$$

$$= 75 a + 10 b + c = 0$$

$$\text{vgl4 : } f(5) = 0$$

$$= 125 a + 25 b + 5 c + d = 0$$

$$V = \text{Oplossen}(\{\text{vgl1}, \text{vgl2}, \text{vgl3}, \text{vgl4}\}, \{a, b, c, d\})$$

$$= \left\{ \left\{ a = \frac{1}{2}, b = -5, c = \frac{25}{2}, d = 0 \right\} \right\}$$

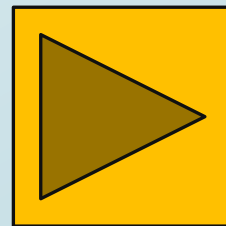
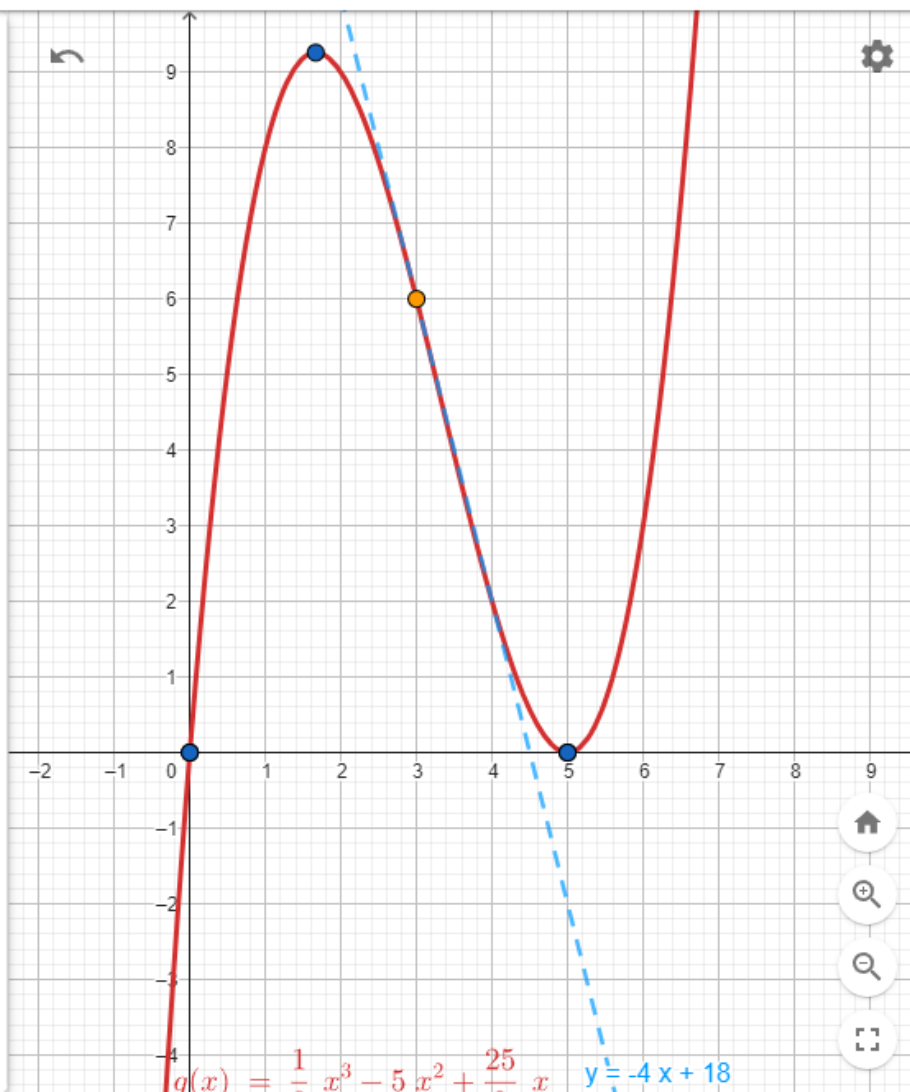


$$g(x) = \text{Vervangen}(f, V)$$

$$= \frac{1}{2} x^3 - 5 x^2 + \frac{25}{2} x$$

$$\text{Snijpunten}(g, \text{xAs})$$

$$= \{(0, 0), (5, 0)\}$$



los het stelsel van 3 vergelijkingen en 3 onbekenden op met de methode van Gauss-Jordan door rij-operaties

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 27 & 6 & 1 & -4 \\ 125 & 25 & 5 & 0 \\ 75 & 10 & 1 & 0 \end{array} \right]$$

Stap 1: Maak de eerste coëfficiënt in rij 1 gelijk aan 1

Deel rij 1 door 27:

$$R1 \leftarrow \frac{1}{27} R1 \Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{2}{9} & \frac{1}{27} & -\frac{4}{27} \\ 125 & 25 & 5 & 0 \\ 75 & 10 & 1 & 0 \end{array} \right]$$

Stap 2: Maak de eerste coëfficiënt van R2 en R3 nul met R1

$$R2 \leftarrow R2 - 125 \cdot R1$$

$$R3 \leftarrow R3 - 75 \cdot R1$$

Resultaat:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{2}{9} & \frac{1}{27} & -\frac{4}{27} \\ 0 & \frac{25}{9} & \frac{80}{27} & \frac{500}{27} \\ 0 & \frac{10}{3} & \frac{50}{27} & \frac{100}{9} \end{array} \right]$$

Stap 3: Maak pivot in R2 gelijk aan 1

Deel R2 door $\frac{25}{9}$:

$$R2 \leftarrow \frac{9}{25} R2 \Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{2}{9} & \frac{1}{27} & -\frac{4}{27} \\ 0 & 1 & \frac{32}{75} & \frac{20}{3} \\ 0 & \frac{10}{3} & \frac{50}{27} & \frac{100}{9} \end{array} \right]$$

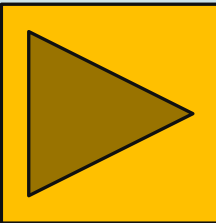
Stap 4: Maak de 2e kolom in R1 en R3 nul met behulp van R2

$$R1 \leftarrow R1 - \frac{2}{9} \cdot R2$$

$$R3 \leftarrow R3 - \frac{10}{3} \cdot R2$$

Rekenresultaat:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -\frac{1}{5} & -2 \\ 0 & 1 & \frac{32}{75} & \frac{20}{3} \\ 0 & 0 & -\frac{20}{9} & -\frac{100}{9} \end{array} \right]$$



 Stap 5: Maak pivot in R3 gelijk aan 1

Deel R3 door $-\frac{20}{9}$:

$$R3 \leftarrow -\frac{9}{20}R3 \Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -\frac{1}{5} & -2 \\ 0 & 1 & \frac{32}{75} & \frac{20}{3} \\ 0 & 0 & 1 & 5 \end{array} \right]$$

 Stap 6: Gebruik R3 om de 3e kolom in R1 en R2 nul te maken

$$\begin{aligned} R1 &\leftarrow R1 + \frac{1}{5} \cdot R3 \\ R2 &\leftarrow R2 - \frac{32}{75} \cdot R3 \end{aligned}$$

Resultaat:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -1.0 \\ 0 & 1 & 0 & -5.0 \\ 0 & 0 & 1 & 5.0 \end{array} \right]$$

 Stap 6: Gebruik R3 om de 3e kolom in R1 en R2 nul te maken

$$\begin{aligned} R1 &\leftarrow R1 + \frac{1}{5} \cdot R3 \\ R2 &\leftarrow R2 - \frac{32}{75} \cdot R3 \end{aligned}$$

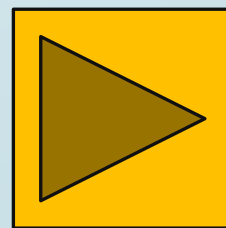
Resultaat:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -1.0 \\ 0 & 1 & 0 & -5.0 \\ 0 & 0 & 1 & 5.0 \end{array} \right]$$

FOUT

 Oplossing:

$$\begin{aligned} a &= \frac{1}{2} \\ b &= -5 \\ c &= \frac{25}{2} \end{aligned}$$





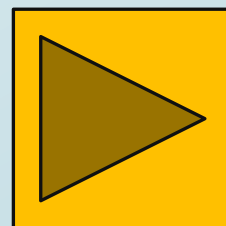
LES: Squareville

Het stadje "Squareville" heeft de vorm van een vierkant met zijde 10 (km).

In deze stad bevinden zich 3 broodjeszaken A en B en C

Hoe moet men de stad verdelen in drie gebieden zodanig dat bewoners zich op de kortste afstand van een broodjeszaak bevinden.

Ah, leuke vraag! 😊 We bevinden ons in het denkgebied van **Voronoi-diagrammen** — een manier om een vlak (zoals Squareville) te verdelen op basis van **dichtstbijzijnde punten**.



✓ Oplossing: **Voronoi-diagram**

De juiste manier om dat te doen, is:

1. **Plaats de drie broodjeszaken A, B en C op het vlak** (bijvoorbeeld: geef coördinaten aan elk).
2. Voor elk punt binnen Squareville, bepaal welke broodjeszaak het **dichtstbij** is.
3. Het vlak wordt dan verdeeld in **3 regio's**, waarbij elk gebied bestaat uit alle punten die het dichtst bij een bepaalde zaak liggen.

De grenzen tussen de gebieden zijn telkens de **middelloodlijnen** tussen twee zaken.

Voorbeeld (stel coördinaten vast):

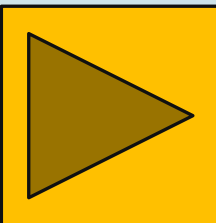
Stel:

- A ligt op (2, 3)
- B ligt op (7, 2)
- C ligt op (5, 8)

Dan:

- De lijn die A en B scheidt is de **middelloodlijn** van lijnstuk AB.
- Dezelfde geldt voor A–C en B–C.
- Deze lijnen snijden elkaar en verdelen het vlak in 3 gebieden.

Binnen elke regio: bewoners zijn **altijd het dichtst bij de zaak in dat gebied**.



Ontwerp lesactiviteit Squareville

Lesactiviteit: “Wat is jouw zone?” – Voronoi-diagrammen in de praktijk

 **Duur:** 1 lesuur (± 50 minuten)

Doelstellingen:

- Leerlingen begrijpen wat een Voronoi-diagram is.
- Ze kunnen zelf een eenvoudige Voronoi-diagram tekenen.
- Ze beseffen waar Voronoi-diagrammen in het echte leven voorkomen.

Benodigdheden:

- Ruitjespapier of blanco A4
- Kleurpotloden/stiften
- Liniaal en passer
- Kaart van een fictieve stad of speelplein (optioneel vooraf gedrukt)
- (Eventueel: laptops/tablets met GeoGebra)

Stap 2 – Zelf doen! (20-25 min)

Opdracht:

1. Zet 3 tot 5 punten op je blad (bijvoorbeeld broodjeszaken).
2. Gebruik een liniaal om de **middelloodlijnen** te tekenen tussen de punten.
3. Kleur elk gebied in een andere kleur.
4. Kies nu een paar “huizen” (punten op het blad) en bepaal welke broodjeszaak daar het dichtst bij ligt.

 Optioneel: gebruik een **echte kaart** of laat ze dit digitaal doen in **GeoGebra**.

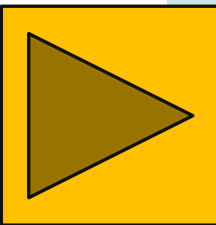
Stap 3 – Reflectie & toepassingen (10 min)

Laat leerlingen in duo's nadenken over:

- Waar kan je dit systeem nog gebruiken?
- Waarom is het handig?

Laat ze een paar voorbeelden noteren (winkels, Wi-Fi, postbodes...)

Bespreek nadien klassikaal en vul aan met enkele toepassingen.



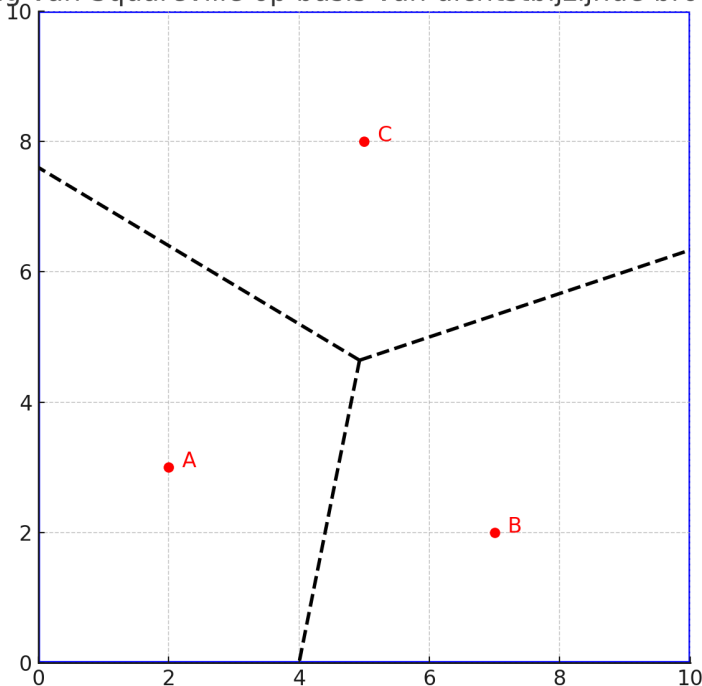


Visualisatie?

Wil je dat ik deze verdeling visueel voorstel voor een bepaald voorbeeld? Als je me coördinaten geeft voor de broodjeszaken (of gewoon zegt "kies er zelf"), dan kan ik een diagram maken van hoe Squareville verdeeld wordt!

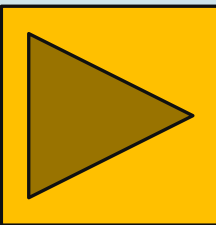
Of wil je weten hoe dit concept in een computerprogramma of GIS zou worden toegepast?

Verdeling van Squareville op basis van dichtstbijzijnde broodjeszaak



Hier zie je de verdeling van Squareville gebaseerd op de locatie van de drie broodjeszaken A (2,3), B (7,2), en C (5,8):

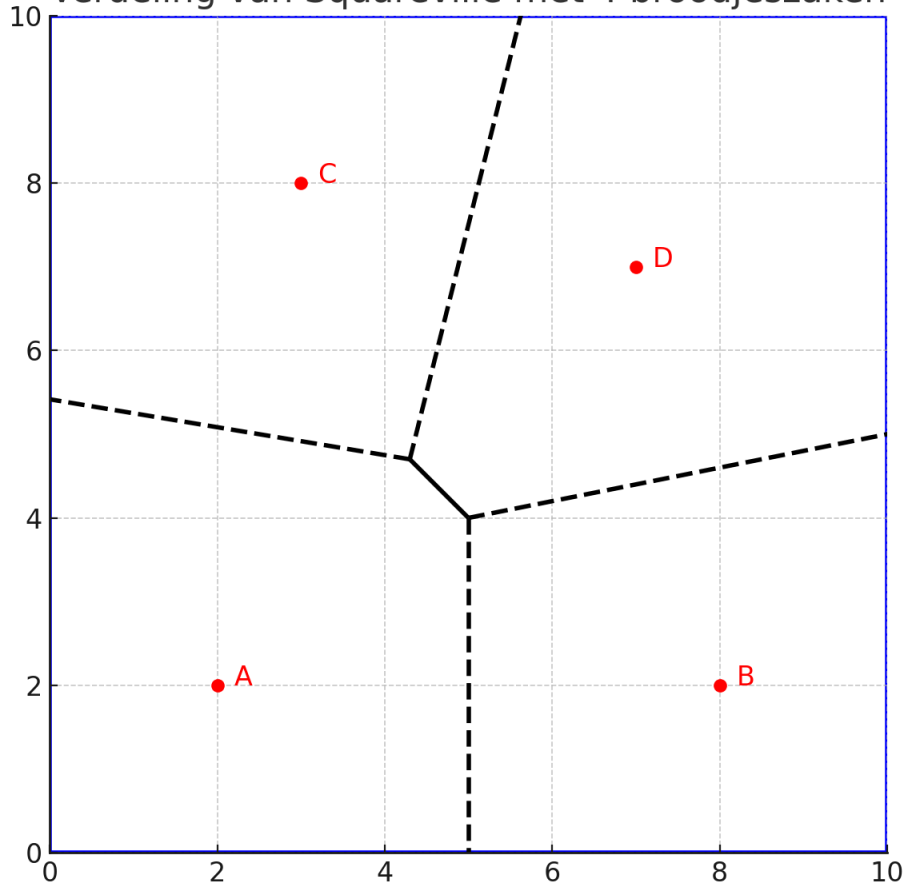
- Elke regio bevat de punten die **het dichtst bij** een bepaalde broodjeszaak liggen.
- De zwarte lijnen zijn de grenzen tussen de gebieden — dat zijn de **middelloodlijnen** tussen de zaken.
- Bewoners binnen een regio gaan dus altijd naar de broodjeszaak in dat gebied voor de kortste loopafstand.



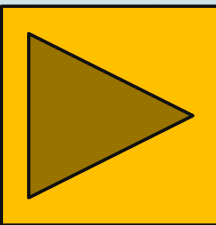
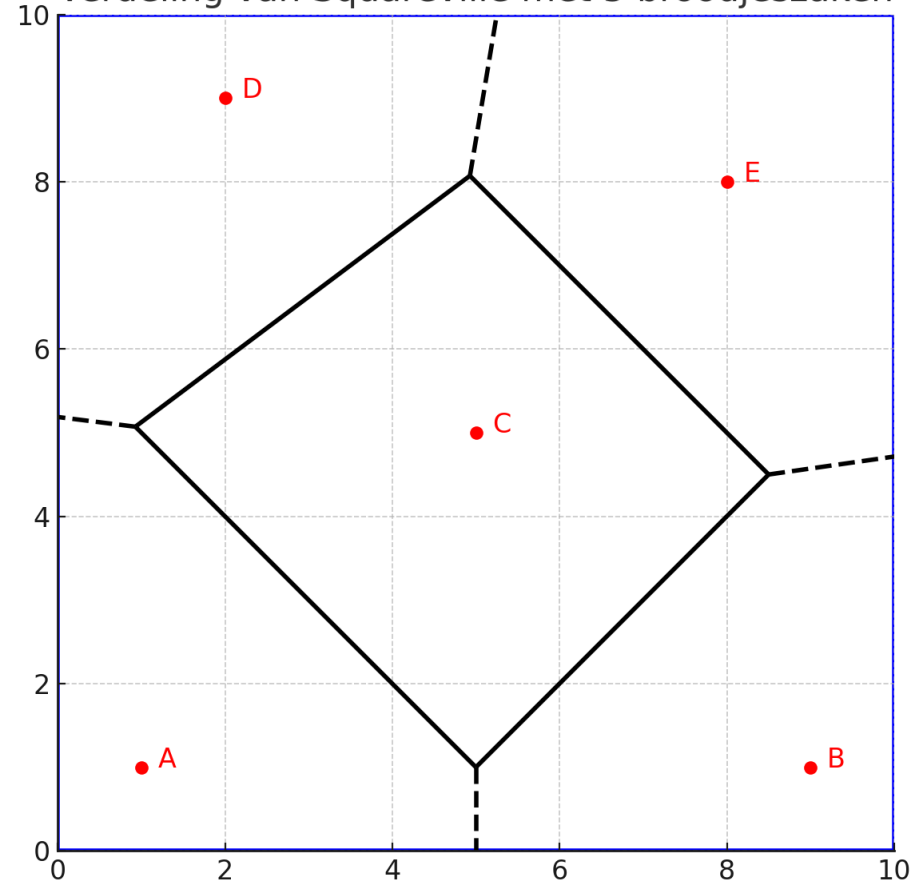


Veralgemening naar 4 en 5 zaken:

Verdeling van Squareville met 4 broodjeszaken



Verdeling van Squareville met 5 broodjeszaken



Stap 3 – Reflectie & toepassingen (10 min)

Laat leerlingen in duo's nadenken over:

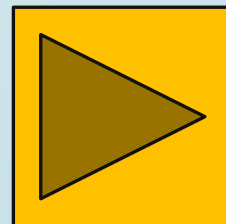
- Waar kan je dit systeem nog gebruiken?
- Waarom is het handig?

Laat ze een paar voorbeelden noteren (winkels, Wi-Fi, postbodes...)

Bespreek nadien klassikaal en vul aan met enkele toepassingen.

Bonus / uitbreiding:

- Laat hen een stad ontwerpen met 4-5 voorzieningen en de zones erbij tekenen.
- Geef een uitdaging: waar zou je een **zesde broodjeszaak** plaatsen zodat die een **groot mogelijk gebied** krijgt?



Toets Squareville + antwoorden

1. Hoe weet je welk gebied bij welke broodjeszaak hoort?

→ Elk gebied in een Voronoi-diagram hoort bij de broodjeszaak die **het dichtst bij ligt**.

Je tekent voor elk paar zaken een **middelloodlijn** en verdeelt zo het vlak. Het gebied rondom een broodjeszaak bestaat uit alle punten die dichterbij die zaak liggen dan bij de andere.

2. Waar zou een nieuwe broodjeszaak veel bereik hebben?

→ Een nieuwe broodjeszaak kan **veel bereik krijgen** als ze geplaatst wordt op een plek waar:

- de bestaande gebieden **groot zijn** (weinig concurrentie),
- of in een regio waar verschillende zones elkaar raken (bijv. **rond een snijpunt van drie gebieden**),
- of op een plek die momenteel **ver van alle zaken ligt** (bijvoorbeeld aan de rand of in het midden van een grote lege zone).

3. Noem minstens twee echte situaties waar Voronoi handig is

1. 📶 **Mobiele netwerken** – je gsm verbindt met de dichtstbijzijnde zendmast.
2. 📮 **Postbedeling** – elke postbode bedient het gebied dat het dichtst ligt bij zijn postkantoor.
3. 🍷 **Leveringsdiensten** – zoals Deliveroo of Uber Eats die bestellingen verdelen op basis van afstand.
4. 🧪 **Biologie** – celverdelingen lijken op Voronoi-diagrammen.
5. 🎮 **Games** – voor eerlijke startzones in strategie- of simulatiespellen.

4. Beschrijf wat je zelf getekend of onderzocht hebt

→ (voorbeeldantwoord)

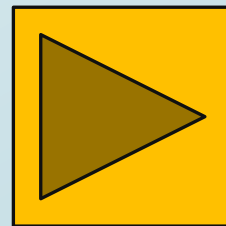
"Ik heb drie broodjeszaken gekozen op mijn blad. Daarna tekende ik de middelloodlijnen tussen de zaken en vond ik de grenslijnen tussen de gebieden. Daarna kleurde ik elk gebied in. Ik merkte dat sommige zaken een groter gebied hadden dan anderen. Dat hangt af van hoe dicht ze bij elkaar liggen."

5. Wat gebeurt er als je een broodjeszaak toevoegt of verwijdt?

→ **Als je een zaak toevoegt**: het gebied wordt herverdeeld. De nieuwe zaak krijgt een zone rond haar locatie, waardoor de omliggende zones **kleiner** worden.

→ **Als je een zaak verwijdt**: de omliggende zones **breiden uit** om het gat op te vullen. De grenzen veranderen, en sommige punten vallen nu onder een andere zaak.

<https://chatgpt.com/share/6807fbe2-e160-800b-af28-1d1c0abaa614>





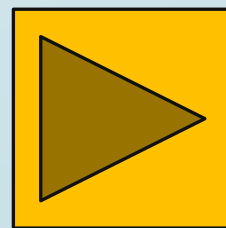
troopwuein

Zoek de plaatsnaam van 10 letters van een Vlaamse gemeente waarbij de volgende 10 letters voorkomen: troopwuein elke letter moet juist 1 keer gebruikt worden. De 10 letters mogen gepermuteerd worden



De plaatsnaam die voldoet aan jouw vraag is **Oostende**.

Oostende is een Vlaamse gemeente aan de kust en de letters "troopwuein" kunnen worden geherordend om deze naam te vormen, waarbij elke letter precies één keer gebruikt wordt.

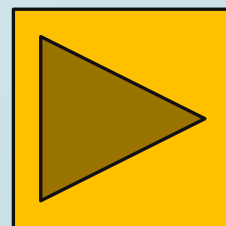




het is een gemeente aan de Vlaamse kust

Mijn excuses voor het misverstand. De gemeente die voldoet aan de vereisten is **Nieuwpoort**.

Deze gemeente ligt aan de Vlaamse kust en de letters "troopwuein" kunnen worden gepermuteerd om de naam "Nieuwpoort" te vormen, waarbij elke letter precies één keer gebruikt wordt.



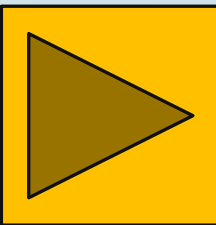
Denkproces tonen in Google Gemini



Denkproces tonen ^

1. *Identify the core task:* Find a 10-letter Flemish municipality name using the letters 't', 'r', 'o', 'o', 'p', 'w', 'u', 'e', 'i', 'n' exactly once.
2. *Analyze the letters:*
 - Letters: t, r, o, o, p, w, u, e, i, n
 - Count: 10 letters
 - Double letter: 'o' appears twice.
 - Vowels: o, o, u, e, i (5)
 - Consonants: t, r, p, w, n (5)
3. *Constraint Checklist & Confidence Score:*
 - Place name? Yes.
 - 10 letters? Yes.
 - Flemish municipality? Yes.
 - Uses exactly the given letters (t, r, o, o, p, w, u, e, i, n)? Yes.
 - Each letter used exactly once? Yes.
 - Letters can be rearranged (permuted)? Yes.

Confidence Score: 5/5 - I'm confident I understand the constraints.

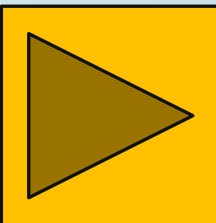


4. Strategy:

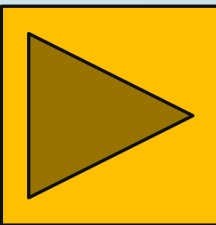
- *This is an anagram problem specifically constrained to Flemish municipalities.*
- *The most direct approach is to try and form words or parts of words from the letters.*
- *Since it's a specific geographic location, general anagram solvers might not be the best first step. A targeted search or knowledge of Flemish municipalities is better.*
- *Potential strategy: Search for Flemish municipalities with 10 letters and check if their letters match the given set.*
- *Alternative strategy: Try rearranging the letters into plausible names and then check if they are actual Flemish municipalities.*

5. Pre-computation/Analysis (Mental or Scratchpad):

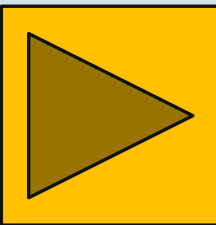
- *Letters: t, r, o, o, p, w, u, e, i, n*
- *Possible combinations: "ou", "oo", "oe", "ei", "ie", "ui", "tr", "pr", "st", "en", "er", "op", "ro" ...*
- *Look for common prefixes/suffixes in Flemish place names. "-hout", "-brugge", "-gem", "-zele", "-dorp", "-kerke"... None seem immediately obvious with the given letters, except maybe "-dorp", but the 'd' isn't available. "poorte"? No 'e'. "toren"? Missing 'n'. "putte"? No second 't'. "wouwe"? No second 'w'. "wuust"? No 's'.*
- *Let's try grouping: (tr) (oo) (p) (w) (u) (e) (i) (n).*
- *Try starting with common letters: W? Wou... Woop...? Wort...? No. T? Troo...? To...? P? Poor...? Po...? R? Roo...? E? Eu...? O? Oop...? Oo...? U? Uit...? N? Noo...? I? Ie...?*



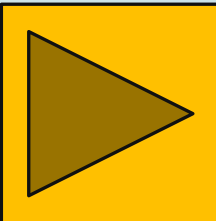
- Try starting with common letters: W? Wou... Woop...? Wort...? No. T? Troo...? To...? P? Poor...? Po...? R? Roo...? E? Eu...? O? Oop...? Oo...? U? Uit...? N? Noo...? I? Ie...?
- Consider the 'w' and 'p': 'Wou' is common, but no 'd'. 'Po' is common. 'Op' is common.
- The double 'o' is key. Maybe 'poort'? No 't'. 'boom'? No 'm'. 'oord'? No 'd'.
- Let's think about the structure: "**poort**"? No 't'. "___toren"? No second 'n'.
- How about combinations like "wou"? We have w, o, u. Left: t, r, o, p, e, i, n. "trop"? Left: o, e, i, n. "oien"? -> Woutropoien? Not a place.
- Try "Po" at the start: Po + (t, r, o, w, u, e, i, n). "Poorte"? No 'e'. "Polder"? No 'l', 'd'.
- Try "Op" at the start: Op + (t, r, o, o, w, u, e, i, n). "Optrooi"? Left: w, u, e, n. "weun"? Optrooiweun? No. "Opwijk"? No 'j', 'k'.
- Let's look at the less common letters 'w', 'p', 'u'.
- Maybe a name ending in "-en"? Left: t, r, o, o, p, w, u, i. "Trouwen"? Left: o, p, i. "poi"? Trouwenpoi? No. "Uit..."? Left: t, r, o, o, p, w, e, n. "twerven"? No 'a'.
- What if 'W' starts? W + (t, r, o, o, p, u, e, i, n). "Woon..."? Left: t, r, p, u, e, i, n. "putrein"? Woonputrein? No. "Wuustwezel"? Uses 's', 'z', 'l'.



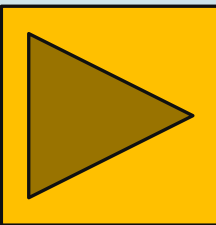
- *Think of 10-letter Flemish municipalities. Antwerpen (no 'p'), Brugge (too short), Gent (too short), Leuven (too short), Mechelen (too short), Oostende (no 'p', 'r', 'w', 'u', 'i'), Aalst (too short), Sint-Niklaas (too long, wrong letters), Kortrijk (too short), Hasselt (too short), Genk (too short), Roeselare (wrong letters), Beveren (too short), Dendermonde (too long, wrong letters), Turnhout (wrong letters), Vilvoorde (wrong letters), Waregem (wrong letters), Geel (too short), Ninove (too short), Brasschaat (wrong letters), Grimbergen (wrong letters), Schoten (wrong letters), Lier (too short), Knokke-Heist (too long, wrong letters), Mol (too short), Bilzen (too short), Heusden-Zolder (too long, wrong letters), Lommel (too short), Tienen (too short), Tongeren (wrong letters), Aarschot (wrong letters), Herentals (wrong letters), Hoogstraten (wrong letters), Mortsel (wrong letters), Zottegem (wrong letters), Oudenaarde (wrong letters), Izegem (too short), Poperinge (wrong letters), Ieper (too short), Menen (too short), Wervik (too short), Zaventem (wrong letters), Halle (too short), Sint-Truiden (wrong letters), Maaseik (wrong letters), Dilsen-Stokkem (too long, wrong letters), Beringen (wrong letters).*



- *Okay, listing known municipalities isn't working quickly. Let's rearrange the letters 't r o o p w u e i n'.*
- *Focus on the double 'o'. 'poort'? Needs 't'. 'toren'? Needs 'n'. 'woon'?*
- *Try "POORTUWEN"? Letters: p, o, o, r, t, u, w, e, n. Missing: i. Extra: none. This is 9 letters. Need 10. The given letters are t, r, o, o, p, w, u, e, i, n.*
- *Let's re-evaluate "POORTUWEN". Letters used: p, o, o, r, t, u, w, e, n. Target letters: t, r, o, o, p, w, u, e, i, n. The letters match except 'i' is missing from "POORTUWEN" and present in the target list. So "POORTUWEN" is not the answer.*
- *Consider the 'ie' or 'ei' combinations. 'ui'?*
- *How about "WOUTERPEN"? Letters: w, o, u, t, e, r, p, e, n. Uses 'e' twice, needs 'o', 'i'. No.*
- *How about "OPNIEUWTR..."? No.*



- "Toren"? We have t, o, r, e, n. Left: o, p, w, u, i. "opwui"? Torenopwui? No.
- "Poort"? We have p, o, o, r, t. Left: w, u, e, i, n. "uwen"? "wuien"? Poortwuien? No. "niewu"? Poortniewu? No.
- "Woon"? w, o, o, n. Left: t, r, p, u, e, i. "trupei"? Woontrupei? No. "putrei"? Woonputrei? No.
- Let's try structuring around 'W'. 'Wou'. w, o, u. Left: t, r, o, p, e, i, n. 'ter'. Left: o, p, i, n. 'opin'? Wouteropin? No.
- How about "NIEUWPOORT"? n, i, e, u, w, p, o, o, r, t. Letters: n, i, e, u, w, p, o, o, r, t. Target letters: t, r, o, o, p, w, u, e, i, n. **THEY MATCH!**
- Check if "NIEUWPOORT" is a Flemish municipality. Yes, Nieuwpoort is a coastal municipality in the province of West Flanders, Belgium.
- Is it 10 letters long? N-I-E-U-W-P-O-O-R-T. Yes, 10 letters.



Webcursus "ChatGPT en co; "Ai tools voor wiskunde"



[Infolder 1.pdf](#)

[Inhoudstafel handboek cursus](#)

[Inschrijvingsformulier 1](#)

Meer info: ivan@mathelo.net

