

Opgave 1

De functie f wordt gegeven door $f(x) = 2\left(\frac{1}{3}x - 1\right)^3 - \frac{1}{2}x + 3$.

De afgeleide van f is $f'(x) = \frac{2}{9}x^2 - \frac{4}{3}x + 1\frac{1}{2}$.

4p 1 Bewijs dat inderdaad geldt $f'(x) = \frac{2}{9}x^2 - \frac{4}{3}x + 1\frac{1}{2}$.

1 maximumscore 4

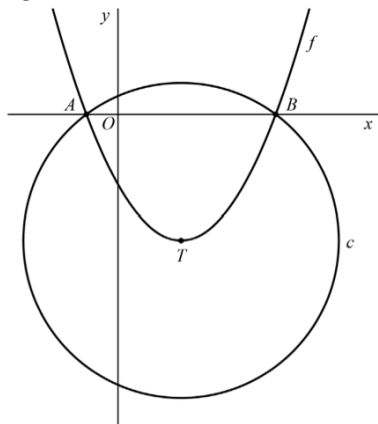
- De afgeleide van $2\left(\frac{1}{3}x - 1\right)^3$ is $3 \cdot \frac{1}{3} \cdot 2\left(\frac{1}{3}x - 1\right)^2$
- $f'(x) = 2\left(\frac{1}{3}x - 1\right)^2 - \frac{1}{2}$
- $\left(\frac{1}{3}x - 1\right)^2 = \frac{1}{9}x^2 - \frac{2}{3}x + 1$
- $f'(x) = \frac{2}{9}x^2 - \frac{4}{3}x + 2 - \frac{1}{2} = \frac{2}{9}x^2 - \frac{4}{3}x + 1\frac{1}{2}$

$$\begin{aligned}
 f(x) &= 2\left(\frac{1}{3}x - 1\right)^3 - \frac{1}{2}x + 3 \\
 f'(x) &= 6\left(\frac{1}{3}x - 1\right)^2 - \frac{1}{2} \\
 &= 6\left(\frac{1}{9}x^2 - \frac{2}{3}x + 1\right) - \frac{1}{2} \\
 &= \frac{6}{9}x^2 - 4x + 6 - \frac{1}{2} \\
 &= \frac{2}{9}x^2 - \frac{4}{3}x + 1\frac{1}{2}
 \end{aligned}$$

Opgave 7

De cirkel c snijdt de x -as in de punten A en B en heeft middelpunt T .
Zie figuur 2.

figuur 2



8p 7 Bereken exact de y -coördinaten van de snijpunten van c met de y -as.

7 maximumscore 8

- Beschrijven hoe de vergelijking $\frac{4}{9}x^2 - \frac{16}{9}x - \frac{20}{9} = 0$ exact opgelost kan worden
- Dit geeft $x_A = -1$ en $x_B = 5$
- Een exacte toelichting waaruit volgt $x_T = 2$
- $y_T = -4$
- Een vergelijking voor c is $(x-2)^2 + (y+4)^2 = \text{constante}$
- De constante is $(5-2)^2 + (0-4)^2 = 25$ (of $(-1-2)^2 + (0-4)^2 = 25$)
- ($x=0$ invullen geeft) $(0-2)^2 + (y+4)^2 = 25$
- Dit geeft $y = -4 - \sqrt{21}$ of $y = -4 + \sqrt{21}$

$$\begin{aligned} & \frac{4}{9}x^2 - \frac{16}{9}x - \frac{20}{9} = 0 \\ & D = \left(\frac{16}{9}\right)^2 - 4 \cdot \frac{4}{9} \cdot \frac{20}{9} = \frac{256}{81} - \frac{320}{81} = -\frac{64}{81} \\ & x = \frac{\frac{16}{9} \pm \sqrt{-\frac{64}{81}}}{2 \cdot \frac{4}{9}} \quad \vee \quad x = \frac{\frac{16}{9} \pm \frac{8i}{9}}{2 \cdot \frac{4}{9}} \\ & x = -1 \quad \vee \quad x = 5 \quad \text{dus } A(-1, 0) \text{ en } B(5, 0) \\ & \alpha'(x) = \frac{d}{dx} \left(\frac{4}{9}x^2 - \frac{16}{9}x - \frac{20}{9} \right) = \frac{8}{9}x - \frac{16}{9} \\ & \frac{8}{9}x - \frac{16}{9} = 0 \\ & \frac{8}{9}x = \frac{16}{9} \\ & x = \frac{16}{8} = 2 \\ & f(2) = \frac{4}{9}(2)^2 - \frac{16}{9}(2) - \frac{20}{9} = \frac{16}{9} - \frac{32}{9} - \frac{20}{9} = -\frac{36}{9} = -4 \\ & \text{dus } T(2, -4) \\ & BT = \sqrt{(5-2)^2 + (0-4)^2} = \sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5 \\ & \text{cirkel: } (x-2)^2 + (y+4)^2 = 25 \\ & \text{invullen } x=0: (0-2)^2 + (y+4)^2 = 25 \\ & 4 + (y+4)^2 = 25 \\ & (y+4)^2 = 21 \\ & y+4 = \pm \sqrt{21} \\ & y = -4 \pm \sqrt{21} \end{aligned}$$

Opgave 13

Voor kooktijden tussen 5 en 45 minuten is er bij benadering een exponentieel verband tussen de kooktijd t in minuten en het percentage alfazuren P dat is omgezet. Uit de gegevens volgt dat:

$$P = 4,5 \cdot 1,043^t \quad (1)$$

Hierbij staat $t = 0$ voor het moment dat het bier 5 minuten heeft gekookt. De groeifactor per minuut bij dit exponentiële verband is afgerond op drie decimalen gelijk aan 1,043.

Na 45 minuten koken geldt het exponentiële verband (1) niet meer. Het percentage alfazuren dat is omgezet neemt vanaf dat moment langzamer toe dan daarvoor. Na 60 minuten koken is meestal het maximumpercentage omgezette alfazuren bereikt. Bij een amateurbrouwer is dit maximumpercentage 27%.

De tijd die nodig is om de eerste helft, dus 13,5% alfazuren, om te zetten is niet gelijk aan de tijdsduur die nodig is om dit percentage daarna nog te verhogen tot 27%.

4p 13 Bereken hoeveel minuten verschil er tussen deze twee tijdsduren is. Geef je eindantwoord als geheel getal.

13 maximumscore 4

- Beschrijven hoe de vergelijking $4,5 \cdot 1,043^t = 13,5$ opgelost kan worden
- Dit geeft $t = 26,0\dots$
- Dus na $26,0\dots + 5 = 31,0\dots$ (minuten) is de eerste 13,5% omgezet
- De tweede 13,5% duurt dan $(60 - 31,0\dots) = 28,9\dots$ (minuten), dus het verschil is 2 (minuten)

Handwritten solution on grid paper:

$$13 \quad 13,5 = 4,5 \cdot 1,043^t$$

$$\frac{13,5}{4,5} = 1,043^t$$

$$\ln\left(\frac{13,5}{4,5}\right) = \ln(1,043^t)$$

$$\ln\left(\frac{13,5}{4,5}\right) = t \cdot \ln(1,043)$$

$$t = \frac{\ln\left(\frac{13,5}{4,5}\right)}{\ln(1,043)}$$

$$t = \frac{\ln(3)}{\ln(1,043)}$$

$$t \approx 26,07 \text{ min}$$

$$t = 26,07 \text{ min} + 5 = 31,07 \text{ min}$$

$$27 = 4,5 \cdot 1,043^t$$

$$t = \frac{\ln\left(\frac{27}{4,5}\right)}{\ln(1,043)}$$

$$t = \frac{\ln(6)}{\ln(1,043)}$$

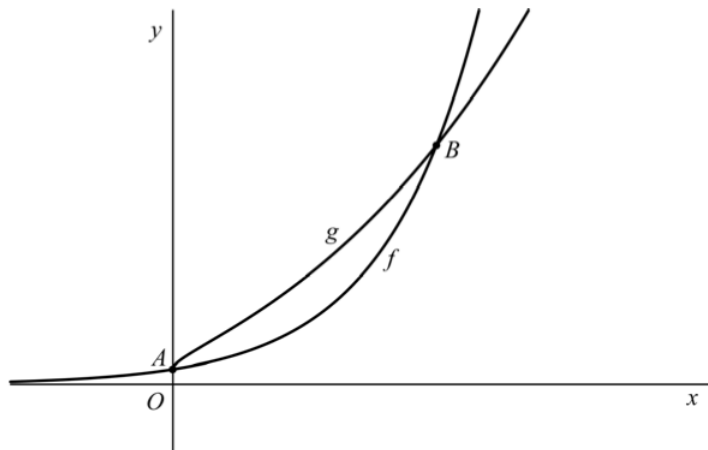
$$t \approx 51,14 \text{ min}$$

$$51,14 - 31,07 \approx 20,07 \approx 20 \text{ min}$$

Opgave 15

De functie f wordt gegeven door $f(x) = 2^{x+3}$ en de functie g wordt gegeven door $g(x) = 2^{3+2\sqrt{x}}$.
In figuur 1 zijn de grafieken van f en g weergegeven.

figuur 1



De grafieken van f en g snijden elkaar in de punten A en B . Punt A ligt op de y -as.

3p 15 Bereken exact de x -coördinaat van B .

15 maximumscore 3

- $2^{x+3} = 2^{3+2\sqrt{x}}$ geeft $x = 2\sqrt{x}$
- Dus $x^2 = 4x$
- (Dit geeft $x = 0$ of $x = 4$ dus) de x -coördinaat van B is 4

of

- $2^{x+3} = 2^{3+2\sqrt{x}}$ geeft $x = 2\sqrt{x}$
- (Uit $\sqrt{x} \cdot \sqrt{x} = 2\sqrt{x}$ volgt $\sqrt{x} = 0$ of) $\sqrt{x} = 2$
- (Dit geeft $x = 0$ of $x = 4$ dus) de x -coördinaat van B is 4

$$\begin{aligned}
 15 \quad & 2^{x+3} = \\
 & f(x) = g(x) \\
 & 2^{x+3} = 2^{3+2\sqrt{x}} \\
 & x+3 = 3+2\sqrt{x} \\
 & x = 2\sqrt{x} \\
 & x=0 \vee x=4
 \end{aligned}$$

De x coördinaat van $B = x=4$