

1. Welke van de volgende verzamelingen en operaties vormen een groep?
 - (a) $G = \{1, -1\}$ met vermenigvuldiging;
 - (b) $G = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$ met optellen;
 - (c) De even gehele getallen met optellen;
 - (d) De gehele getallen, met operatie $a \star b = a + b - 1$;
 - (e) De reële getallen met vermenigvuldiging;
 - (f) 3-dimensionale vectoren met het uitproduct.¹
2. Zij $(G, *)$ een groep, toon aan:
 - (a) $(g^{-1})^{-1} = g$;
 - (b) Als $g * h = h$, dan is g het identiteitselement.
 - (c) Als G eindig is, bestaat er voor elk element g in G een positief geheel getal n zodat $g^n = g * g * \dots * g$ gelijk is aan het identiteitselement. De kleinste n waarvoor dit geldt is de *orde* van g .
 - (d) Kun je een voorbeeld bedenken van een groep waarvoor elk element (behalve de identiteit) oneindige orde heeft?
3. We noemen een groep *Abels* als $g * h = h * g$ voor alle elementen g en h . Toon aan dat een groep met 4 elementen altijd Abels is.
4. Gegeven g en h in een groep G , hun *commutator* is het element $ghg^{-1}h^{-1}$. Bewijs dat G Abels is als en alleen als elke commutator gelijk is aan de identiteit.
5. We noemen de Rubik's kubus groep $\mathbb{G}$. Toon aan dat $\mathbb{G}$ niet Abels is.
6. Bepaal de orde van de elementen D , R^2 , $RUR'U'$ en RU in $\mathbb{G}$. Is er een element met oneindige orde?
7. Normaal gezien beschouwen we $\mathbb{G}$ als de groep gegenereerd door $\langle U, D, F, B, R, L \rangle$. Bewijs, door middel van het element $(RLF^2B^2R'L')U(RLF^2B^2R'L')$, dat we slechts vijf generatoren nodig hebben. (Moeilijk: zou de groep ook door vier elementen gegenereerd kunnen worden?)
8. De *conjugatie* van elementen g en h in een groep is het element $h^{-1}gh$. Bewijs dat de orde van dit element gelijk is aan die van g .
9. Gegeven is het element $X = R^2B^2RFR'B^2RF'R$.
 - (a) Wat is de drager van X ? (De *drager* van een element uit $\mathbb{G}$ is de verzameling stukjes dat van plek verandert).
 - (b) Wat is de drager van X^{-1} ?
 - (c) Zonder naar de kubus te kijken, kun je de drager bepalen van de conjugatie FXF' ?

¹Het uitproduct $\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} d \\ e \\ f \end{bmatrix}$ is gedefinieerd als $\begin{bmatrix} bf - ce \\ cd - af \\ ae - bd \end{bmatrix}$.

- (d) Vind een conjugatie van X zodat de drager hiervan alleen uit stukjes bestaat die *niet* in de drager van X zitten.
 - (e) is het mogelijk voor een conjugatie van X om zijstukjes (edges) in haar drager te hebben? Waarom?
10. Een deelverzameling H van een groep G is een *ondergroep* als het op zichzelf ook een groep is, met dezelfde operatie als die van G . Voorbeeld: de veelvouden van 3 vormen een ondergroep van de gehele getallen (met optellen).
- (a) Toon aan dat als g een element van G is, dan is $\langle g \rangle$ een ondergroep van G , met evenveel elementen als de orde van g . Iets algemener: bewijs dat elke groep van de vorm $\langle g_1, \dots, g_m \rangle$ een ondergroep van G is.
 - (b) Hoeveel elementen bevat de ondergroep $\langle RUR'U' \rangle$ van $\mathbb{G}$? Hoeveel in $\langle R^2, F^2 \rangle$
 - (c) Bewijs dat de verzameling elementen van $\mathbb{G}$ die het groen-rode zijstukje *niet* verplaatsen, een ondergroep is.
11. In een kubus-staat noemen we een zijstukje *georiënteerd* als we het kunnen oplossen met elementen uit $\langle U, D, F^2, B^2, R, L \rangle$.
- (a) Hussel de kubus door elkaar, en tel de niet-georiënteerde zijstukjes. Dit zou een even getal moeten zijn.
 - (b) Een opgeloste kubus heeft nul niet-georiënteerde zijstukjes. Hoeveel zijn dat er nadat we het element F toepassen?
 - (c) Vind een element wat precies twee zijstukjes van oriëntatie doet veranderen.
 - (d) Argumenteer waarom elke kubus-staat altijd een even aantal niet-georiënteerde zijstukjes heeft. Concludeer dat als je de oriëntatie van 11 zijstukjes weet, dan weet je ook die van de 12de.
 - (e) Moelijk: Bedenk een redelijke definitie voor de oriëntatie van hoekstukjes, en bewijs dat als je de oriëntatie van 7 hoekstukjes weet, dan weet je ook die van de laatste.

Oplossingen:

1. (a) Wel een groep.
(b) Niet een groep, 1 heeft geen inverse.
(c) Wel een groep, in feite een ondergroep van $\mathbb{Z}$.
(d) Wel een groep.
(e) Niet een groep, 0 heeft geen inverse. Als we alle reële getallen nemen, maar we laten 0 weg, dan is het wel een groep.
(f) Niet een groep, er is geen identiteitselement.
2. (a) Per definitie geldt dat $g^{-1} * g = g * g^{-1} = 1$. We zien hieruit dat de inverse van g^{-1} precies g is, dus $(g^{-1})^{-1} = g$.
(b) Vermenigvuldig beide kanten van $g * h = h$ met h^{-1} , en we krijgen $g = 1$.
(c) Maak een lijst $\{1, g, g^2, g^3, \dots\}$ van alle machten van g . De groep G is eindig, en dus zal er een k en n (positieve gehele getallen) zijn waarvoor geldt $g^k = g^{k+n} = g^k * g^n$. Deel (b) impliceert nu dat $g^n = 1$.
(d) Neem de gehele getallen $\mathbb{Z}$ met optellen. 0 heeft orde 1, maar elk ander getal heeft oneindige orde.
3. Neem een groep $G = \{1, a, b, c\}$ met vier elementen. Het product ab kan (door deel (b) van de vorige vraag) ofwel 1 ofwel c zijn. Als het 1 is, dan moet het geval zijn dat ba ook 1 is. c is hierbij zijn eigen inverse. We hebben ook dat $a^2 = c$, dus de hele groep wordt gegenereerd door a , ofwel $G = \langle a \rangle$. Die groep is zeker weten Abels.
Anderzijds, als $ab = c$, dan geldt ook $ac = b$ en $bc = a$. Hieruit krijgen we dat elk element zijn eigen inverse is. Overigens hebben we ook $abc = 1$, en $abab = abc = 1$, dus $ab = ba$.
4. Als G Abels is, dan hebben we $ghg^{-1}h^{-1} = gg^{-1}hh^{-1} = 1$. Anderzijds, voor elke g en h geldt dat $gh = hg$ als $ghg^{-1}h^{-1} = 1$ na vermenigvuldigen met $g^{-1}h^{-1}$.
5. $\mathbb{G}$ is niet Abels, omdat de commutator $RUR'U'$ niet de identiteit is. Bijvoorbeeld: de edge rechts-voor verandert van plek na deze commutator.
6. D heeft orde 4, R^2 heeft orde 2, $RUR'U'$ heeft orde 6, en RU heeft orde 105. Er is geen element met oneindige orde, omdat de groep $\mathbb{G}$ eindig is (zie vraag 2(c)).
7. Het element $(RLF^2B^2R'L')U(RLF^2B^2R'L')$ doet niks anders dan een D op de kubus. Neem een element $\mathbb{G}$, schrijf het door middel van de generatoren U, D, F, B, R, L . Vervang elke D voor $(RLF^2B^2R'L')U(RLF^2B^2R'L')$. Nu is het element geschreven met alleen maar U, F, B, R, L . Dit werkt voor elk element in $\mathbb{G}$, en dus heeft de groep maar 5 generatoren nodig.
Je kan niet *nog* een generator van hierboven weghalen. Bijvoorbeeld, als je alleen U, R, L, F gebruikt, is er geen mogelijkheid om iets te doen met

de edge die helemaal onderin aan de achterkant zit. Maar het blijkt dat je toch maar 2 generatoren nodig hebt (alleen zijn die generatoren niet zo simpel)! Namelijk

$$\mathbb{G} = \langle L^2 BRD'L', UFRUR'U'F' \rangle.$$

Zie hier voor meer informatie. Je kan combinaties van deze twee elementen gebruiken om elke move U, D, F, B, L, R te maken, en dus genereert het de groep.

8. Zij n de orde van g . Dan geldt

$$(h^{-1}gh)^n = (h^{-1}gh)(h^{-1}gh) \dots (h^{-1}gh) = h^{-1}g^nh = h^{-1}h = 1.$$

De orde kan ook niet kleiner worden.

9. (a) De drager zijn de drie hoekjes in de bovenste laag, behalve het hoekje links-voor.
- (b) De drager van X^{-1} is hetzelfde als die van X . Dit is omdat XX^{-1} precies niks moet doen op de kubus, maar als de drager van X^{-1} anders is dan die van X , zal er toch wat gebeuren met de stukjes die in maar één van de dragers zit.
- (c) F verplaatst het hoekje boven-links-voor naar boven-rechts-voor. Dus de nieuwe drager zijn de twee hoekjes boven-achter, en het hoekje boven-links-voor.
- (d) Zet $Y = FB^2$. De drager van YXY^{-1} zijn de twee achter-onder hoekjes, en het hoekje boven-links-voor.
- (e) Nee! X beïnvloedt alleen hoekjes, dus elke conjugatie van X ook.
10. (a) Elk element van $\langle g \rangle$ heeft de vorm g^k voor een geheel getal k (mag ook nul of negatief zijn). Het is een ondergroep omdat het $1 = g^0$ bevat, en als g^k, g^m in $\langle g \rangle$ zitten, dan geldt dat ook voor $g^k g^m = g^{k+m}$. De ondergroep bevat alle elementen $\{1, g, g^2, \dots, g^{n-1}\}$, waar n de orde is van g . Alle andere elementen van de ondergroep kun je herleiden tot iets in die lijst. Die lijst bevat n elementen, dus de ondergroep ook!
- (b) De orde van $RUR'U'$ is 6, dus de ondergroep bevat 6 elementen. De andere groep bevat er 24. Dit kun je zien door op te merken dat de ondergroep ook gegenereerd kan worden door $\langle R^2F^2 \rangle$, of $F^2\langle R^2F^2 \rangle$. Die twee verzamelingen hebben beide 12 elementen, dus de ondergroep heeft er 24.
- (c) De identiteit verplaatst het groen-rode edge niet. En als X en Y die edge niet verplaatsen, dan doet XY dat ook niet. Dus de verzameling van die elementen is een ondergroep.
11. (a) -
- (b) Dat zijn er 4.
- (c) Zo'n element is $R'FRF'$.

- (d) De moves U, D, R, L veranderen niks aan de oriëntatie, en F en B veranderen precies een even aantal. Elk element is een combinatie van deze zes moves, dus in totaal zal er telkens een even aantal oriëntaties veranderen. Ofwel, de kubus-staat heeft altijd een even aantal niet-georiënteerde edges.

Hussel de kubus door elkaar, en tel van 11 edges of ze georiënteerd zijn of niet. Als dit aantal even is, dan moet de 12de edge georiënteerd zijn, en als het aantal oneven is, dan moet de 12de juist niet georiënteerd zijn.

- (e) Er zijn veel manieren om dit te doen, maar hier is er één van: Elk hoekje heeft een gele of witte kant. Voor elk hoekje noemen we de oriëntatie ‘0’ als die gele of witte kant naar boven of onder wijst. We noemen de oriëntatie ‘1’ als we hem naar oriëntatie 0 kunnen krijgen met een twist van het hoekje met de klok mee. En ‘−1’ voor tegen de klok in.

Bijvoorbeeld: Neem een opgeloste kubus. De oriëntatie van alle hoekjes is 0 zolang je geel of wit boven houdt. Pas nu het element RUR' toe. Alle drie niet-georiënteerde hoekjes hebben oriëntatie 1.

De ‘totale’ oriëntatie is de som van de oriëntaties van de acht hoekjes. Door te kijken naar wat de elementen U, D, R, L, F, B doen met deze oriëntatie kom je snel uit op het feit dat de totale oriëntatie altijd een veelvoud van 3 is. Dus als je de totale oriëntatie van 7 hoekjes weet, dan moet die van de laatste 0, 1, −1 zijn, zodat de totale som een veelvoud van drie wordt.