Irene van Stiphout, Sjaak Kamerling

Examens in twee delen: een verkenning

Het gebruik van de grafische rekenmachine, onder andere bij een examen, staat al jaren onder druk. Een mogelijk alternatief is een examen in twee delen: een deel met en een deel zonder hulpmiddelen. Cito ontwikkelde twee prototypen van examens in twee delen, voor havo en vwo wiskunde B. Welke kansen en belemmeringen deden zich voor tijdens de constructie van de examens?

Inleiding

De grafische rekenmachine (GR) heeft al sinds de invoering van de Tweede Fase eind jaren '90 een plek in het Nederlandse wiskundeonderwijs. In de loop der jaren ontstonden er problemen met de GR. Dit heeft onder meer geleid tot een verplichte examenstand. In 2018 heeft CvTE een veldraadpleging gehouden waarbij scenario's over de toekomst van het gebruik van ict bij wiskunde-examens zijn voorgelegd aan wiskundedocenten. Het scenario van een examen in twee delen, een deel met en een deel zonder ict en/of technologie, had de voorkeur van de deelnemers aan de veldraadpleging.[1]

Een examen in twee delen komt ook voor in een aantal Duitse deelstaten, Scandinavische landen en in deelstaat Victoria in Australië. Uit eerder onderzoek van Cito is gebleken dat een examen in twee delen voor havo/vwo wiskunde A binnen de huidige syllabi geen haalbare kaart is, omdat in die vakken maar heel beperkt een beroep wordt gedaan op het handmatig uitvoeren van procedures. Dat betekent dat het deel zonder ict, waarin handmatige vaardigheden worden getoetst, wel heel klein zou zijn. Het ligt dus voor de hand om te kijken naar wiskunde B. Om deze weg verder te verkennen heeft Cito twee prototypen ontwikkeld van examens in twee delen: een voor havo wiskunde B en een voor vwo wiskunde B. Ook is nagegaan welke kansen en problemen er in de constructie van examens in deze vorm een rol spelen.

Achtergrond

Omdat een computeralgebrasysteem (CAS) veel meer opties heeft dan de GR, was de vraag op welke manier we gebruik wilden maken van die meerwaarde. Hiervoor bleek het model van Böhm et al.[2] zinvol. Zij onderscheiden vijf categorieën CAS-opgaven ten aanzien van de mate waarin CAS een rol speelt in (het vinden van) de oplossing. Later heeft Heugl[3] daar nog een zesde categorie C-1 aan toegevoegd (vertaling IvS/SK).

- C-1 CAS werkt belemmerend in het toetsen van de wiskundige vaardigheid. In plaats daarvan wordt omgang met CAS getoetst.
- C0 Traditionele vraag waar GR noch CAS behulpzaam zijn.
- C1 Traditionele vraag (ontwikkeld voor rekenmachine) die sneller kan worden opgelost of triviaal wordt door gebruik van grafische rekenmachine of spreadsheets.
- C2 Traditionele vraag (ontwikkeld voor rekenmachine) die sneller kan worden opgelost of triviaal wordt door het gebruikt van CAS.
- C3 Vraag die ontstaat door een traditionele vraag uit te breiden tot een CAS-vraag door bijvoorbeeld een parameter toe te voegen of realistische data te gebruiken.
- C4 Vraag die moeilijk of tijdrovend is op te lossen zonder CAS of die alleen maar is op te lossen met behulp van CAS.

De ambitie was om prototypen op te leveren met vragen uit categorie C4: daarin gaat het echt om de meerwaarde van het gebruik van CAS. De lat lag daarmee hoog. Onderzoek van Heugl[3] naar vragen over algebra en analyse in de examens van Australië, Denemarken, Duitsland, Noorwegen en Oostenrijk laat zien dat er maar weinig vragen zijn in categorie C4. De meeste opgaven van de onderzochte examens vallen in categorie C2.

De verkenning van mogelijkheden voor het gebruik van CAS deden we niet lichtzinnig. We beseffen dat het gebruik van CAS een grote verandering zou betekenen en een doordenking zou vragen van het hele curriculum. Het gebruik van CAS heeft immers consequenties voor opvattingen van leerlingen en docenten over waar wiskunde over gaat, wat het betekent om wiskunde te doen, op welke wijze leerlingen wiskunde leren en wat hiervoor nodig is en wat de rol van de docent hierin precies is. Al deze aspecten spelen een rol in de relatie tussen onderwijs, toetsing, de toegestane hulpmiddelen en de congruentie daarvan.

Constructie

Voor de constructie van de prototypen zijn zes constructeurs geworven. Iedere constructeur kreeg de opdracht om twee opgaven te maken van ieder ongeveer vier vragen. Daarnaast was de opdracht aan constructeurs om bij te houden waar ze tegenaan liepen in de constructie. Waar liggen kansen en mogelijkheden, waar is het lastig of moeilijk om vragen te bedenken?

Prototypen

De constructie heeft geleid tot twee prototypen van examens in twee delen: een voor havo wiskunde B en een voor vwo wiskunde B. Voor de herkenbaarheid is besloten om de prototypen wat betreft omvang, aantal scorepunten, opzet van een paar vragen binnen een bepaalde context, en onderwerpen aan te laten sluiten bij de huidige examens.
De prototypen zijn gemaakt met de computeralgebra-omgeving van GeoGebra. De reden hiervoor is pragmatisch: constructeurs en toetsdeskundigen waren bekend met GeoGebra. Het gaat hier niet om een principiële keuze; we willen geenszins andere CAS-mogelijkheden uitsluiten.
Het deel zonder CAS is echt zonder ict, dus ook geen gewone rekenmachine. De reden hiervoor is dat ook gewone rekenmachines (wat daar dan ook onder verstaan moet worden) steeds meer kunnen. Denk bijvoorbeeld aan meerregelige displays, het kunnen maken van tabellen, scrollen op het scherm et cetera waardoor het verschil tussen gewone rekenmachines en meer geavanceerde rekenmachines minder helder wordt.

Een van de vragen die we hadden was of het mogelijk is om CAS-vragen te stellen binnen ieder domein. Daarom zijn de opgaven in het CAS-deel verspreid over alle domeinen (uitgezonderd domein A Vaardigheden). Voor opgaven in het deel zonder CAS is om pragmatische redenen gebruikgemaakt van bestaande examenopgaven. Het opsplitsen van de examens wiskunde B in twee delen vraagt om een andere manier van organiseren van examens dan we tot nu toe gewend zijn, zowel praktisch als inhoudelijk. Mocht worden besloten om over te gaan naar examens in twee delen, dan ligt hier nog flink wat denk- en uitzoekwerk. Dat gaat bijvoorbeeld over de vraag of beide delen op één dag moeten worden afgenomen, hoe er dan gewisseld wordt, hoe het cijfer tot stand komt, hoe met herkansingen moet worden omgegaan, et cetera. Ook zijn er inhoudelijke vragen die in dit onderzoek onbeantwoord blijven. Een voorbeeld hiervan is wat er van leerlingen wordt verwacht over het vastleggen van het gebruik van CAS. Is een screenshot genoeg? Hoe wordt dat ingeleverd? Geplakt in een document? Deze vragen zijn **niet** meegenomen in het ontwerp van de prototypen.

Kansen en belemmeringen

Gedurende de constructie hebben de constructeurs de kansen en belemmeringen die ze tegen zijn gekomen in kaart gebracht.

Omgaan met CAS: het gebruik van CAS in GeoGebra is wennen en kost dus tijd (nu geldt dat, wellicht in mindere mate, voor leren omgaan met de GR). Daarnaast is het CAS-scherm van GeoGebra gebruiksonvriendelijk. Zo raakt bijvoorbeeld het beeldscherm gauw vol waardoor je moet scrollen. Ook is de syntax nu nog ingewikkeld, is het zoeken naar een geschikt commando, en is de output niet zoals leerlingen gewend zijn. Wel is het aantal commando's dat nodig is in CAS heel beperkt. Op de korte termijn is het leren werken met CAS een belemmering: het kost docenten en leerlingen tijd om hiermee om te leren gaan. Op de langere termijn zou de CAS-module wellicht meer ontwikkeld en vriendelijker kunnen worden. Het gebruik van CAS kan een kans zijn in het overzichtelijk noteren van uitwerkingen en in het houden van overzicht daarin.

Constructie van opgaven: vragen bedenken voor het CAS-deel vraagt meer van constructeurs. Dat komt omdat de grens tussen een knoppencursus CAS en een betekenisvolle vraag die met CAS kan worden opgelost een dun lijntje is. CAS kan rekenwerk uit handen nemen, maar het is oppassen dat het niet te veel invulwerk wordt.
Een voorbeeld van rekenwerk uit handen nemen is een afgeleide vragen die handmatig net boven de examenstof ligt of een limiet vragen die daar net boven ligt. Een belemmering kan zijn dat CAS technieken uit handen neemt, terwijl het huidige onderwijs wiskunde B juist grotendeels gaat over technieken.

Rekenwerk in deel zonder CAS: het deel zonder ict vraagt meer van leerlingen. In het domein meetkunde bijvoorbeeld >

moeten berekeningen mooi uitkomen zodat leerlingen deze zonder gebruik van een rekenmachine kunnen doen. Een andere mogelijkheid is dat wordt afgesproken genoegen te nemen met een antwoord voor een lengte van een zijde van de vorm 17 · sin(35°) zonder dat dit verder benaderd moet worden.

Algoritmisch denken: het gebruik van CAS vraagt van leerlingen om hun oplossingsstrategie te overzien. Zo biedt CAS een krachtige meerwaarde in het algoritmisch denken: je moet eerst goed nadenken hoe je een probleem aanpakt voor je het kunt uitbesteden aan de computer. Daarnaast zullen leerlingen moeten nadenken over welke invoer CAS dan precies nodig heeft.

Conclusie

De constructie van de examens in twee delen was pionieren: niet eerder zijn er in Nederland examens in deze vorm ontwikkeld. Van de constructeurs die aan dit project hebben meegewerkt, hebben we veel gevraagd. Zij moesten buiten de gebaande paden denken, zich verdiepen in de mogelijkheden van CAS en tegelijkertijd zicht houden op hun eigen leerproces door kansen en belemmeringen in beeld te brengen. De opbrengst mag er zijn, vinden we. Er liggen nu twee prototypen van examens in twee delen, passend bij de huidige vorm van examens van contexten met vragen. De vragen die we hebben ontwikkeld, categoriseren we veelal in categorie C4, vragen dus die moeilijk of tijdrovend zijn op te lossen zonder CAS of die alleen maar zijn op te lossen met behulp van CAS.
De inzet van CAS is hiermee veelal betekenisvol, zie het voorbeeld in figuur 1 (opgave) en 2 (correctievoorschrift).
In onze ogen vraagt de inzet van CAS van leerlingen dat ze zicht hebben op het oplossingsproces als geheel en dat ze helder moeten krijgen op welk punt in het proces ze CAS moeten inzetten. Van de constructeurs vraagt het bedenken van CAS-vragen een andere manier van naar wiskunde kijken. Juist omdat er meer mogelijkheden zijn wat betreft het rekenwerk kan dieper worden ingegaan op onderliggende wiskundige concepten.

Discussie

We beseffen dat de keuzes die zijn gemaakt, onderwerp kunnen zijn van kritiek. We noemen een paar discussiepunten.
Als eerste willen we opnieuw benadrukken dat het gebruik van CAS gevolgen heeft voor de hele leerlijn en verder gaat dan de keuze van toegestane hulpmiddelen bij de examens. De inzet van computeralgebra vraagt ook van leerlingen dat ze de beschikking hebben over een device waar een CAS op kan draaien. Dat geldt dan voor alle

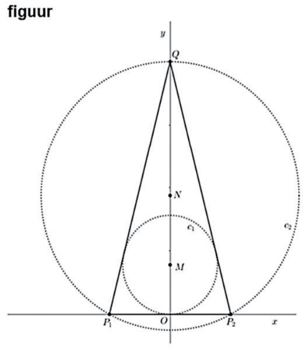
Driehoek met twee cirkels

Gegeven is driehoek P_1P_2Q met hoekpunten $P_1(-1,0)$, $P_2(1,0)$ en $Q(0,q)$, met $q>0$. De punten P_1 en P_2 liggen dus op de x-as en het punt Q ligt op de positieve y-as.
Cirkel c_1 raakt elke zijde van driehoek P_1P_2Q.
Cirkel c_2 gaat door elk hoekpunt van driehoek P_1P_2Q.
In de figuur zijn voor een waarde van q de driehoek en de twee cirkels weergegeven.

In deze figuur zijn ook de middelpunten $M(0,m)$ van c_1 en $N(0,n)$ van c_2 aangegeven.
Punt M heeft gelijke afstand tot elke zijde van de driehoek. Hieruit volgt:

$$m=\frac{-1+\sqrt{q^2+1}}{q}$$

figuur



5p **1** Toon aan met behulp van CAS dat inderdaad $m=\dfrac{-1+\sqrt{q^2+1}}{q}$.

Punt N heeft gelijke afstand heeft tot elk hoekpunt van de driehoek. Met behulp van deze eigenschap kan ook de y-coördinaat n van N in q worden uitgedrukt.

De posities van M en N zijn afhankelijk van de positie van Q. De oppervlakte van beide cirkels is dus afhankelijk van q. Er is één waarde van q waarvoor geldt dat de oppervlakte van c_2 twee keer zo groot is als de oppervlakte van c_1.

5p **2** Bereken met behulp van CAS deze waarde van q. Geef als eindantwoord de exacte waarde die CAS geeft.

figuur 1 Toelichting. Deze opgave is bedoeld voor vwo wiskunde B en heeft betrekking op domein E Meetkunde met coördinaten. In vraag 1 moet de y-coördinaat van punt M worden bepaald. Leerlingen zouden dit ook met de hand kunnen, maar dat dat is moeilijk en tijdrovend. De nadruk ligt nu op het proces van oplossen. De berekening in vraag 2 is voor leerlingen niet te doen zonder CAS. Beide vragen zijn geclassificeerd in de categorie C4. De CAS-activiteiten gaan over het berekenen van afstanden en het oplossen van vergelijkingen.

havo- en vwo-leerlingen met wiskunde B. Dit vraagt om een zorgvuldige inbedding om bijvoorbeeld kansenongelijkheid te voorkomen. De praktische organisatie van een examen in twee delen is niet meegenomen in dit onderzoek. De haalbaarheid van een examen in twee delen zal in belangrijke mate afhangen van de praktische organiseerbaarheid in scholen. Hierbij kan Nederland leren van de organisatie in onder meer de Scandinavische landen en Duitsland waar afname van examens in twee delen al jaren de praktijk is. De keuze om het deel zonder ict echt zonder enig hulpmiddel te doen, dus ook zonder een gewone rekenmachine, vraagt misschien wel te veel van leerlingen. Handmatig rekenen krijgt op deze manier wellicht een te groot aandeel in het centraal examen.
De vraag is ook of alle domeinen wel in beide delen aan de orde moeten komen. In de prototypen hebben we dit gedaan omdat we wilden onderzoeken of vragen in beide delen (CAS en deel zonder ict) kunnen voorkomen. Dat kan, dat laten we zien. Dan is vervolgens de vraag of, en zo ja in hoeverre, dat wenselijk is.

Driehoek met twee cirkels

1 maximumscore 5

- 1: y=q*x+q → $y = q\,x + q$ — 1
- 2: Afstand((0,m), y=-q*x+q) → $\sqrt{\frac{(-m+q)^2}{(-q)^2+1}}$ — 1
- Deze afstand moet gelijk zijn aan m — 1
- 3: Oplossen($2 = m, m) → $\left\{m = \frac{-\sqrt{q^2+1}-1}{q}, m = \frac{\sqrt{q^2+1}-1}{q}\right\}$ — 1
- Een toelichting waaruit volgt dat $m = \frac{-\sqrt{q^2+1}-1}{q}$ niet voldoet — 1

2 maximumscore 5

- $d(N,Q) = d(N,P_1)$ geeft $q - n = \sqrt{1+n^2}$ — 1
- 4: Oplossen(q-n=sqrt(1+n^2),n) → $\left\{n = \frac{q^2-1}{2\,q}\right\}$ — 1
- Er moet gelden: $n = \sqrt{2} \cdot m$ — 1

5: yM:=Rechterlid(Element($3, 2)) → $yM := \frac{\sqrt{q^2+1}-1}{q}$

6: yN:=Rechterlid(Element($4, 1)) → $yN := \frac{q^2-1}{2\,q}$

- 7: Oplossen(yN=sqrt(2)*yM) → $\left\{q = -\sqrt{4\sqrt{-\sqrt{2}+2} - 2\sqrt{2} + 5}, q = \sqrt{4\sqrt{-\sqrt{2}+2} - 2\sqrt{2} + 5}\right\}$ — 1
- Dus $q = \sqrt{4\sqrt{-\sqrt{2}+2} - 2\sqrt{2} + 5}$ — 1

figuur 2

Tot slot

Het complete onderzoeksverslag met de prototypen zijn te vinden op *https://cito.nl/centrale-toetsen-en-examens/ontwikkelingen/onderzoek-over-het-toekomstig-gebruik-van-ict-bij-wiskunde-examens.*
We zijn zeer geïnteresseerd in wat je vindt van deze prototypen en nodigen je dan ook van harte uit om je mening per mail met ons te delen.

Noten

[1] CvTE. (2018, 23 oktober). Geraadpleegd op 12 februari 2024, van Uitkomsten enquête 'ICT bij het centraal examen wiskunde havo/vwo' | Examenblad.nl

[2] Böhm, J., Forbes, I., Herweyers, G., Hugelshofer, R. & Schomacker, G. (2004). The case for CAS. T3 Europe.

[3] Heugl, H. (2017). The use of CAS in exams. A lecture at the T3 conference in Chicago.

Over de auteurs

Irene van Stiphout en Sjaak Kamerling zijn toetsdeskundigen bij Cito. E-mailadressen: *irene.vanstiphout@cito.nl, sjaak.kamerling@cito.nl.*

Witje: Ducci-rijtjes

Wiskunde in teams

WiTjes zijn korte modelleer- of onderzoeksopdrachten, bedoeld voor één les, gebaseerd op Alympiade, Wiskunde B-dag en Onderbouw Wiskundedag (Wiskunde in Teams).

Begin met een rijtje van vier gehele positieve getallen, bijvoorbeeld 3, 7, 2, 7. Maak een volgend rijtje door de absolute verschillen te nemen, bijvoorbeeld |3 – 7|, |7 – 2|, |2 – 7|, |7 – 3|, oftewel 4, 5, 5, 4. Je kunt dat nogmaals doen, dan krijg je 1, 0, 1, 0. Neem je nogmaals het verschil, dan krijg je 1, 1, 1, 1, gevolgd door 0, 0, 0, 0. In het algemeen, gaat een rijtje a_1, a_2, a_3, a_4 onder de *verschilstap* over in het rijtje $|a_1 - a_2|$, $|a_2 - a_3|$, $|a_3 - a_4|$, $|a_4 - a_1|$. Deze rijtjes heten *Ducci-rijtjes*, genoemd naar de Italiaanse wiskundige Enrico Ducci (1864 - 1940).

Onderzoek wat er gebeurt voor andere rijtjes van vier getallen bij het herhaald toepassen van de verschilstap, en formuleer een vermoeden. Het vermoeden in het algemeen bewijzen is best een uitdaging! Kijk eerst eens naar rijtjes met alleen nullen en enen.

Je kunt ook rijtjes van drie getallen bekijken:
4, 5, 8 → 1, 3, 4 → 2, 1, 3 → 1, 2, 1 → 1, 1, 0 → 0, 1, 1 → 1, 0, 1 → 1, 1, 0. Deze rijtjes geraken in een lus.

Onderzoek wanneer rijtjes uitdoven en wanneer ze in een lus raken.

Bron: Wiskunde B-dag 2023