Boek V – het Eudoxos toegeschreven hoogtepunt der Elementen van Euclides

Rainer Kaenders

Werkgroep Geschiedenis

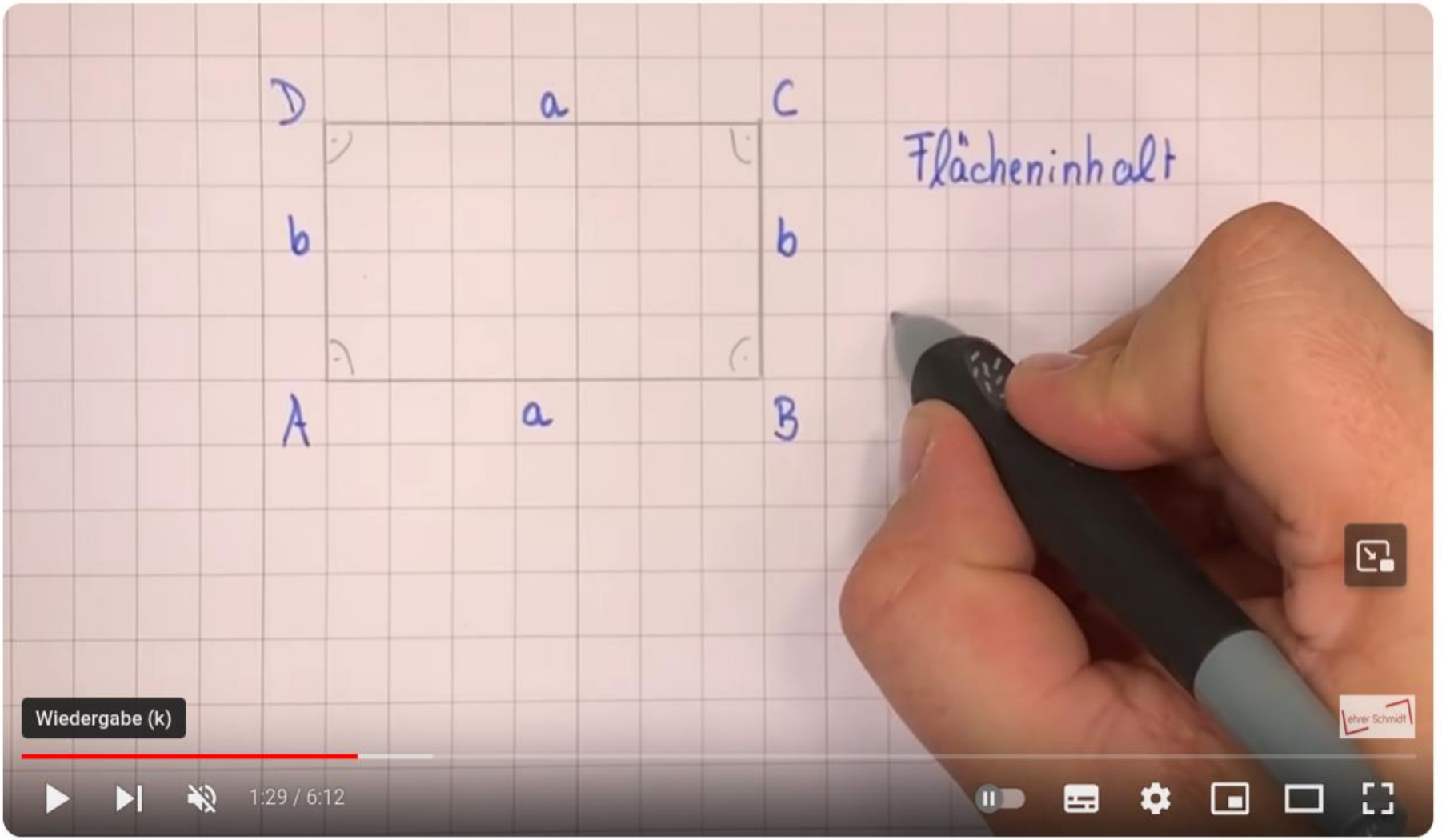
Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren

Symposium100 jaar Euclides

UNIVERSITÄT BONN

Programma

- Incommensurabiliteit
- Gelijkvormigheid van driehoeken
- Een stukje theorie van verhoudingen
- Gelijkvormigheid van driehoeken
- Bestaan van de vierde gelijkvormige
- Laat er getallen zijn!
- Meetkundige foefjes



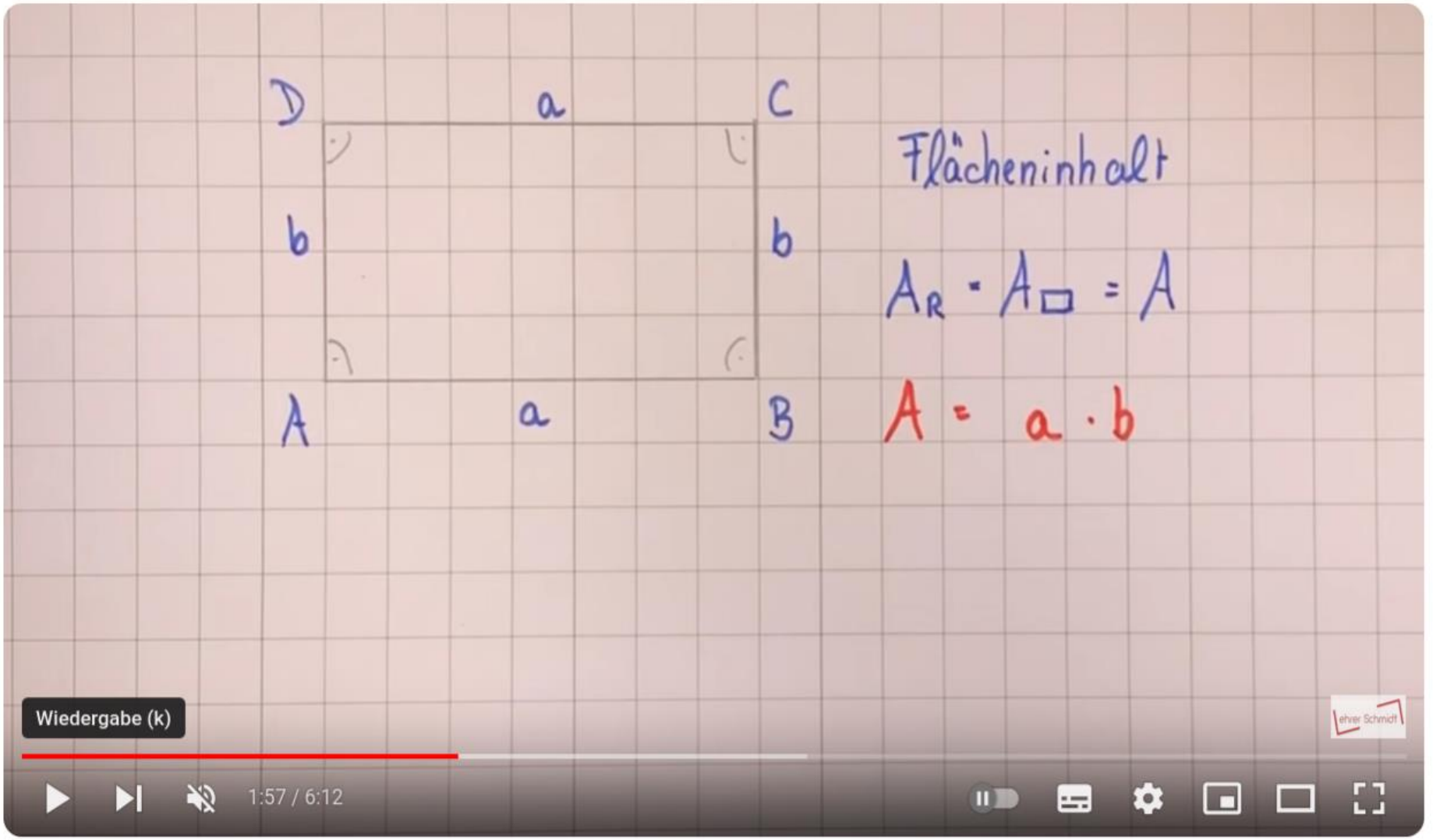
Rechteck - Flächeninhalt berechnen | Lehrerschmidt - einfach erklärt!

Lehrerschmidt
1,78 Mio. Abonnenten

Mitglied werden | Abonnieren | 1501 | Teilen | Thanks | ...

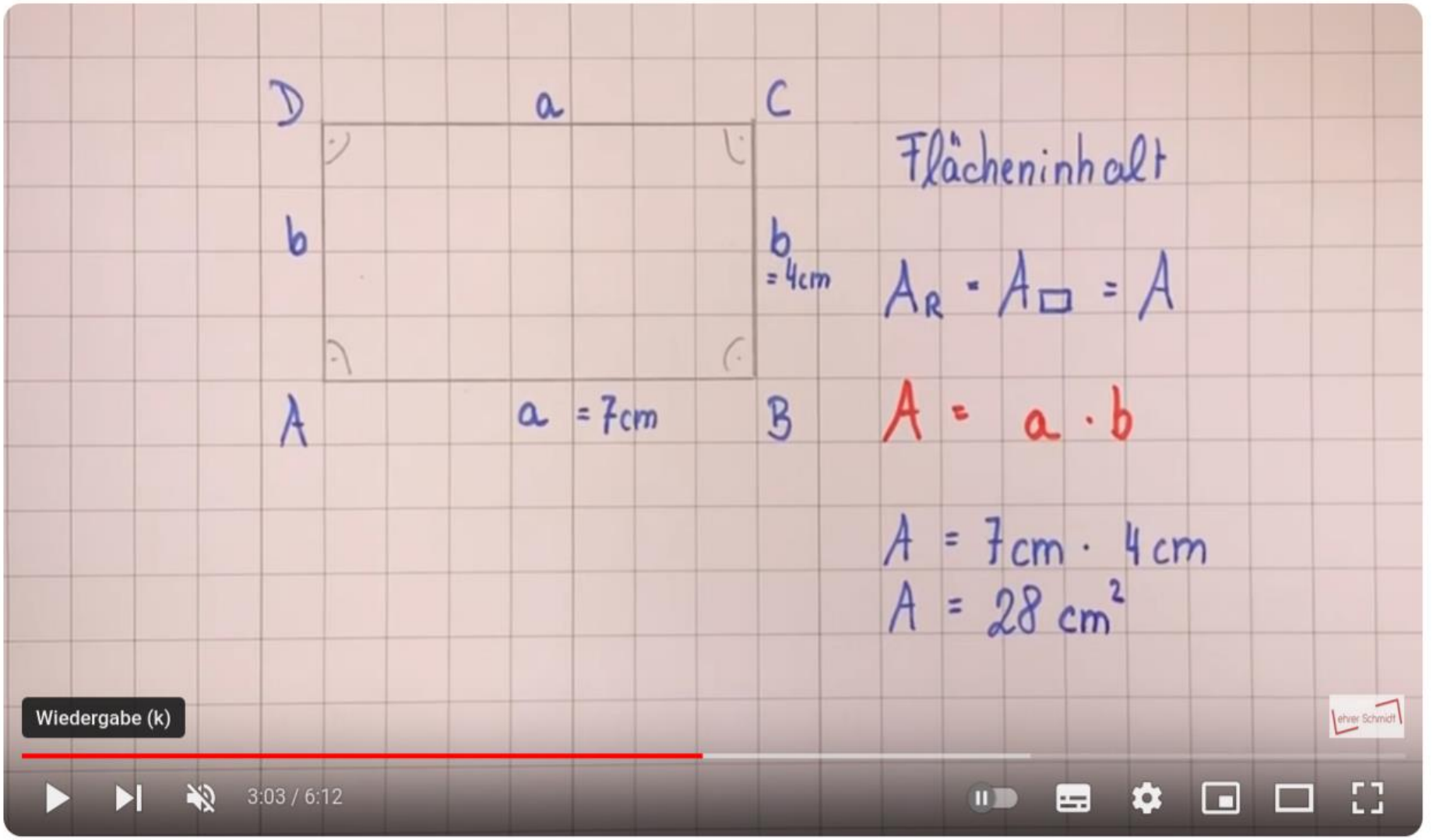
43.986 Aufrufe vor 4 Jahren Geometrie - Vierecke

Alle
Von
WURZELN SCH
Dreieck - Fläch berechnen Mathematik einfach erklärt
MAXIMALES F
MAßSTA BERECHNE



Rechteck - Flächeninhalt berechnen | Lehrerschmidt - einfach erklärt!

Lehrerschmidt
1,78 Mio. Abonnenten
Mitglied werden
Abonnieren
1501
Teilen
Thanks
43.986 Aufrufe vor 4 Jahren Geometrie - Vierecke
Alle
Von
WURZELN SCH
Dreieck - Fläch berechnen
Mathematik einfach erklärt
MAXIMALES F
MAßSTA BERECHNE



Rechteck - Flächeninhalt berechnen | Lehrerschmidt - einfach erklärt!

Lehrerschmidt
1,78 Mio. Abonnenten
Mitglied werden
Abonnieren
1501
Teilen
Thanks

43.986 Aufrufe vor 4 Jahren Geometrie - Vierecke

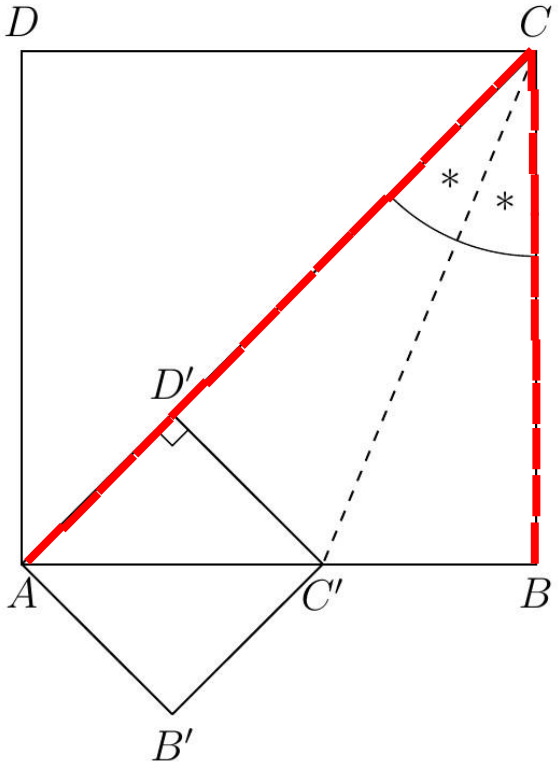
Alle
Von
WURZELN SCH
Dreieck - Fläch berechnen Mathematik einfach erklärt
MAXIMALES F
MAßSTA BERECHNE

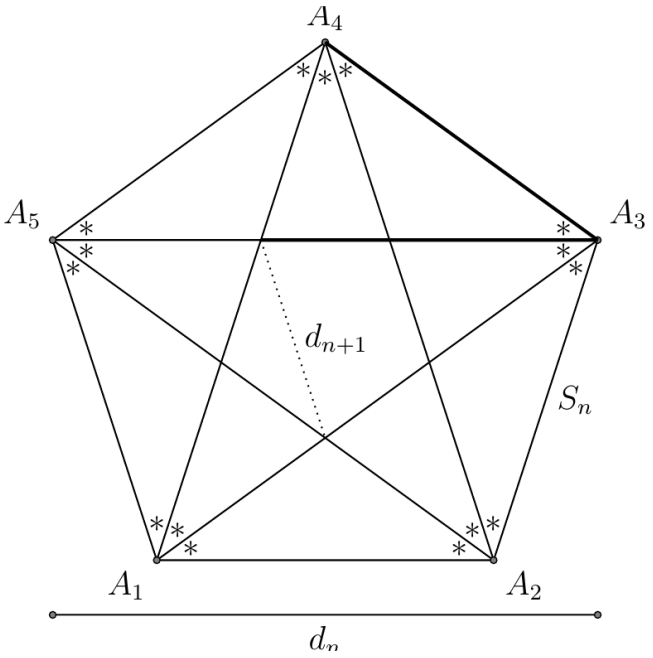
Incommensurabiliteit

Definitie: Twee grootheden van dezelfde soort a en b worden *commensurabel* genoemd als er een derde grootheid c bestaat van het soort van de andere twee, zodat er natuurlijke getallen m en n bestaan, zodat

$$b = mc \text{ en } \mathrm{a} = \mathrm{n}c.$$

Incommensurabiliteit

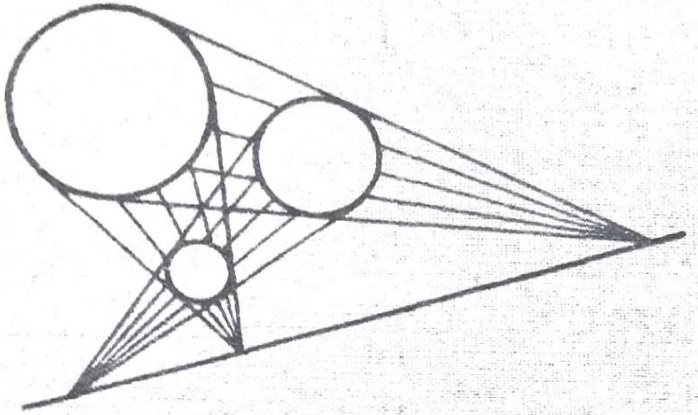




- Noodzakelijk voor het denken more geometrico (met Archimedisch axioma)
- Tegenspraak met ‘Alles is getal’.

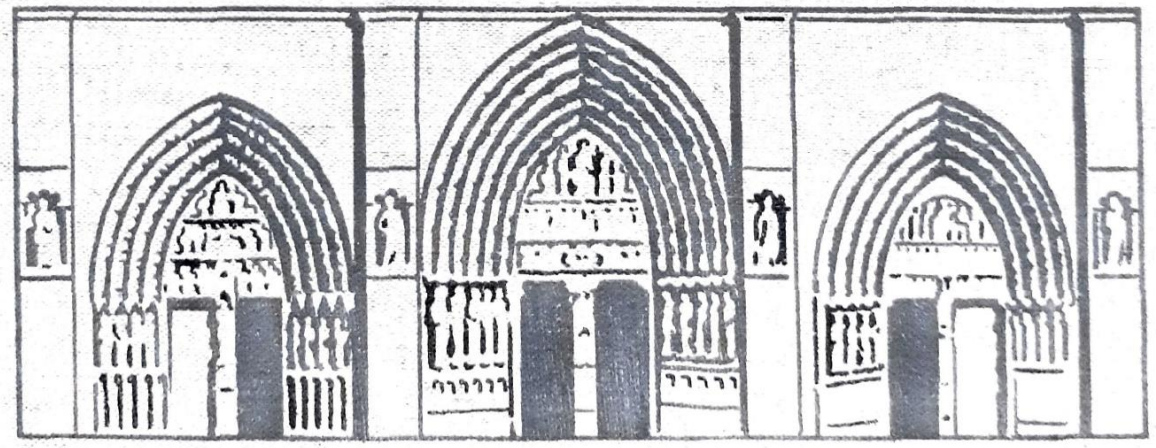
BEHREND-MORGENSTERN

LEHRBUCH DER MATHEMATIK

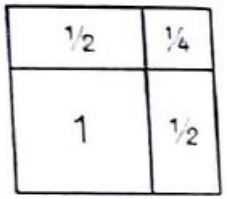


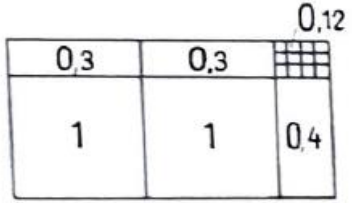
FELIX BEHREND

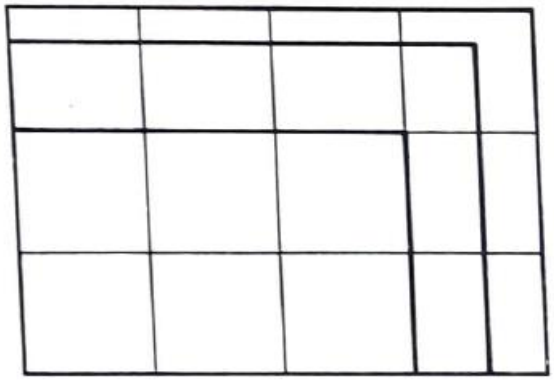
FORM UND ABBILDUNG

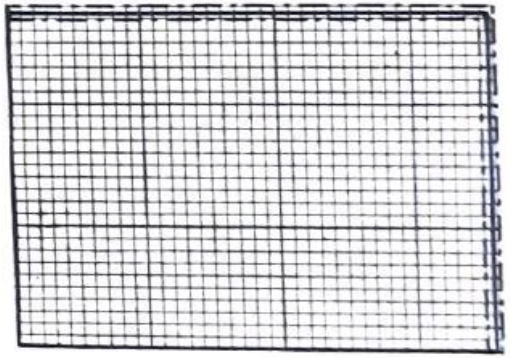


FERDINAND HIRT IN BRESLAU









Um allgemein zu beweisen, daß der Inhalt des Rechtecks $I = a \cdot b$ ist, auch wenn die Zahlen a, b keine ganzen Zahlen sind, nehme man ein Rechteck mit den Seiten $a = 3{,}56 \ldots$ cm, $b = 2{,}73 \ldots$ cm. Dann ergibt sich in erster Annäherung

$$3 \cdot 2 \text{ qcm} < I < 4 \cdot 3 \text{ qcm}$$

Mißt man die Seiten in mm, so ergibt sich

$$27 \cdot 35 \text{ qmm} < I < 28 \cdot 36 \text{ qmm}$$

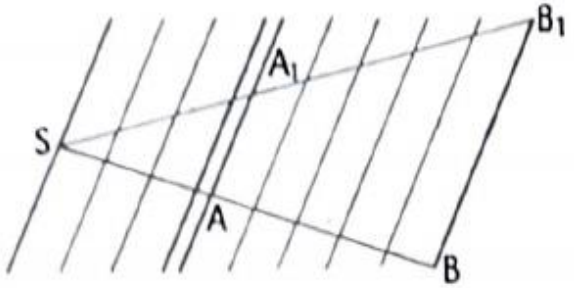
oder

$$2{,}7 \cdot 3{,}5 \text{ qcm} < I < 2{,}8 \cdot 3{,}6 \text{ qcm}$$

So kann man den Flächeninhalt in immer engere Grenzen einschließen; brechen die Dezimalbrüche $a = 2{,}73 \ldots$, $b = 3{,}56 \ldots$ an einer Stelle ab, ist also z. B. $a = 2{,}73$, $b = 3{,}56$, so wird der Flächeninhalt $I = 2{,}73 \cdot 3{,}56 = a \cdot b$.

Sind dagegen a und b Irrationalzahlen, so kann man offenbar den Flächeninhalt in zwei Grenzen einschließen, die dem Produkt $a \cdot b$ der beiden Irrationalzahlen beliebig nahe kommen. Es ergibt sich also auch in diesem Fall:

der Flächeninhalt des Rechtecks ist gleich dem Produkt zweier benachbarter Seiten.

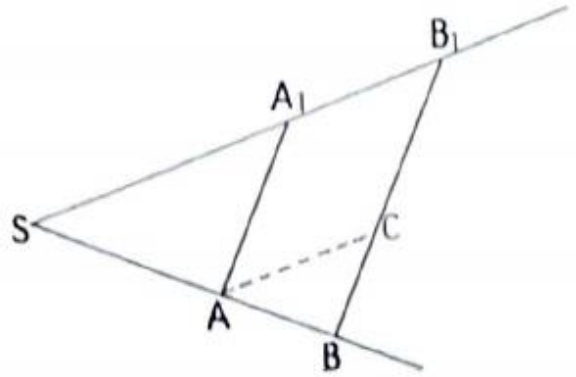


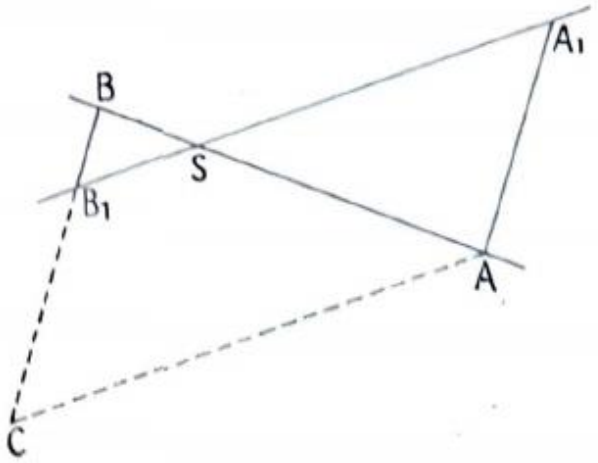
Haben die beiden Abschnitte kein gemeinsames Maß, so ist das Verhältnis eine Irrationalzahl. Teilt man in diesem Fall die Strecke AB in y Teile, und lassen sich diese Teile auf SA x mal auftragen, und zieht man durch die Teilpunkte die Parallelen zu AA_1, so bleibt zwischen den gleichen Streifen ein kleiner Reststreifen.

Es gilt dann $\frac{x+1}{y} > \frac{SA}{AB} > \frac{x}{y}$ und ebenso $\frac{x+1}{y} > \frac{SA_1}{A_1B_1} > \frac{x}{y}$.

Der Unterschied beider Grenzen ist $\frac{1}{y}$. Je kleiner die Einteilung gewählt, je größer also die Anzahl y der Teile, desto kleiner wird der Reststreifen, desto mehr nähert sich $\frac{1}{y}$ der Grenze 0, d. h. die Näherungswerte der Verhältnisse $SA : AB$ und $SA_1 : A_1B_1$ nähern sich derselben Irrationalzahl als Grenze. Der Strahlensatz gilt also auch für diesen Fall.

In der Strahlensatzfigur stehen auch die parallelen Stücke in bestimmtem Verhältnis.





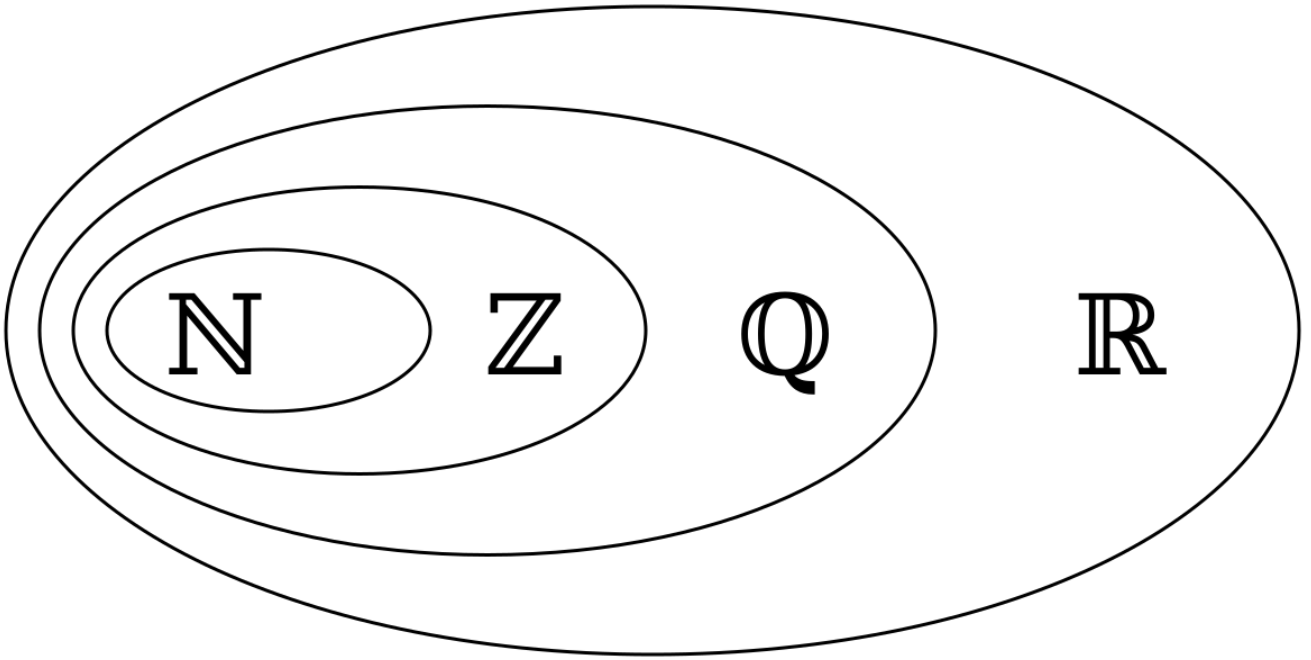
Zieht man nämlich die Hilfsparallele AC, so kann man auch B als Scheitel einer Strahlensatzfigur, BS und BB_1 als Strahlen, AC und SB_1 als Parallele auffassen. Dann ist

$$BS : AS = BB_1 : CB_1$$

und da $AA_1 = CB_1$ als Gegenseiten im Parallelogramm,

$$\mathbf{SB : SA = BB_1 : AA_1}.$$

Uitbreiding van getallensystemen



Dit is de “verkeerde” plaatje! Het zou zo moeten zijn:

De positieve reële getallen zijn niets anders dan alle denkbare verhoudingen.

Een stukje theorie over verhoudingen

Systematische ontwikkeling van de (positive) reële getallen

- Systematische (niet historische) theorie van verhoudingen gebaseerd op genetische principes geïnspireerd door Otto Toeplitz
- Vanuit zintuiglijke ervaringen worden de concepten logisch doorontwikkeld tot aan de moderne wiskunde.
- Cruciale problemen worden geproblematiseerd.
- Ontwikkeling van getallen en meetkunde hand in hand
- Conceptueel geconstrueerd, betekenisvol getalconcept zonder formalisme en niet via reeksen cijfers
- Perspectief in concrete onderwijssituaties

Otto Toeplitz (1949): Die Entwicklung der Infinitesimalrechnung – eine Einleitung in die Infinitesimalrechnung nach der genetischen Methode.

Wanner zijn verhoudingen gelijk?

Laat a en b hoeveelheden van hetzelfde type zijn en laat A en B hoeveelheden van hetzelfde, maar mogelijk van verschillende type als a en b zijn.

Definieer a:b = A:B, desda voor alle natuurlijke getallen p en q geldt:

$$\begin{aligned} qa > pb \quad &\leftrightarrow \quad qA > pB \\ qa = pb \quad &\leftrightarrow \quad qA = pB \\ qa < pb \quad &\leftrightarrow \quad qA < pB. \end{aligned}$$

Eudoxos [Euclides, Elementen Boek V, Definitie 5]

Wanner zijn verhoudingen gelijk?

Laat a en b hoeveelheden van hetzelfde type zijn en laat A en B hoeveelheden van hetzelfde, maar mogelijk van verschillende type als a en b zijn.

Definieer a:b = A:B, desda voor alle natuurlijke getallen p en q geldt:

$$\begin{aligned} a > \tfrac{p}{q} b \quad &\leftrightarrow \quad A > \tfrac{p}{q} B \\ a = \tfrac{p}{q} b \quad &\leftrightarrow \quad A = \tfrac{p}{q} B \\ a < \tfrac{p}{q} b \quad &\leftrightarrow \quad A < \tfrac{p}{q} B. \end{aligned}$$

Eudoxos [Euclides, Elements Boek V, Definitie 5]

Drie normatieve eisen

1) Axioma van Archimedes
2) Bestaan van de vierde gelijkvormige
3) Volledigheid

THE FIRST SIX BOOKS OF

THE ELEMENTS OF EUCLID

IN WHICH COLOURED DIAGRAMS AND SYMBOLS

ARE USED INSTEAD OF LETTERS FOR THE

GREATER EASE OF LEARNERS

BY OLIVER BYRNE

SURVEYOR OF HER MAJESTY'S SETTLEMENTS IN THE FALKLAND ISLANDS

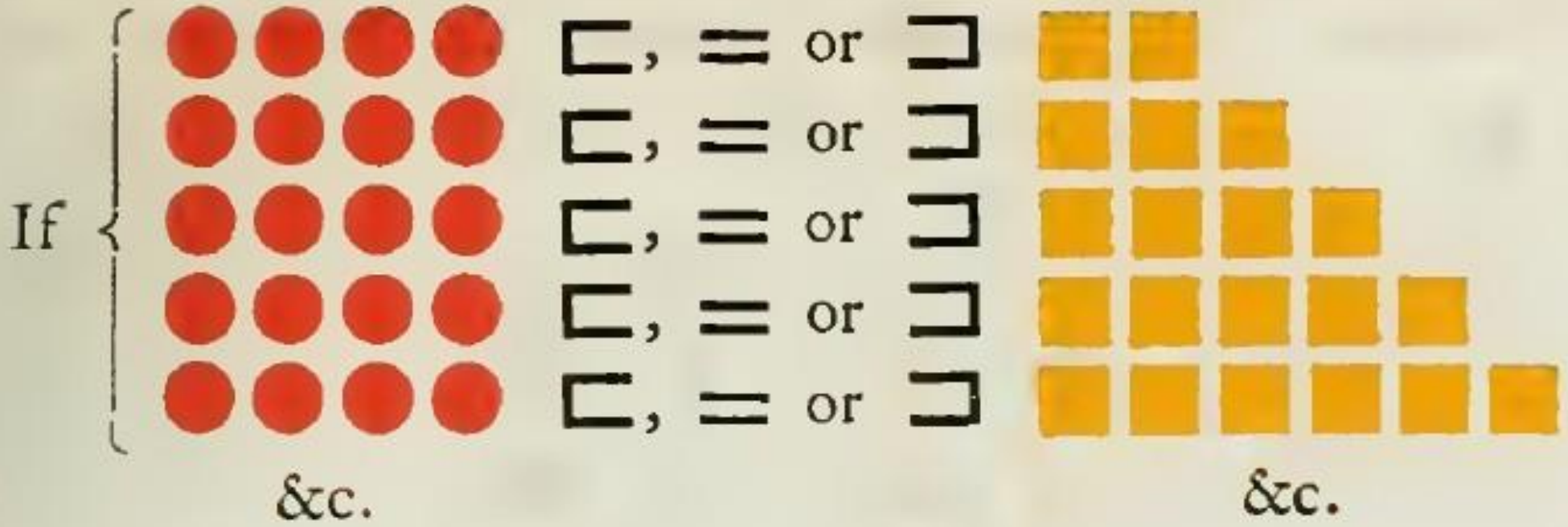
AND AUTHOR OF NUMEROUS MATHEMATICAL WORKS

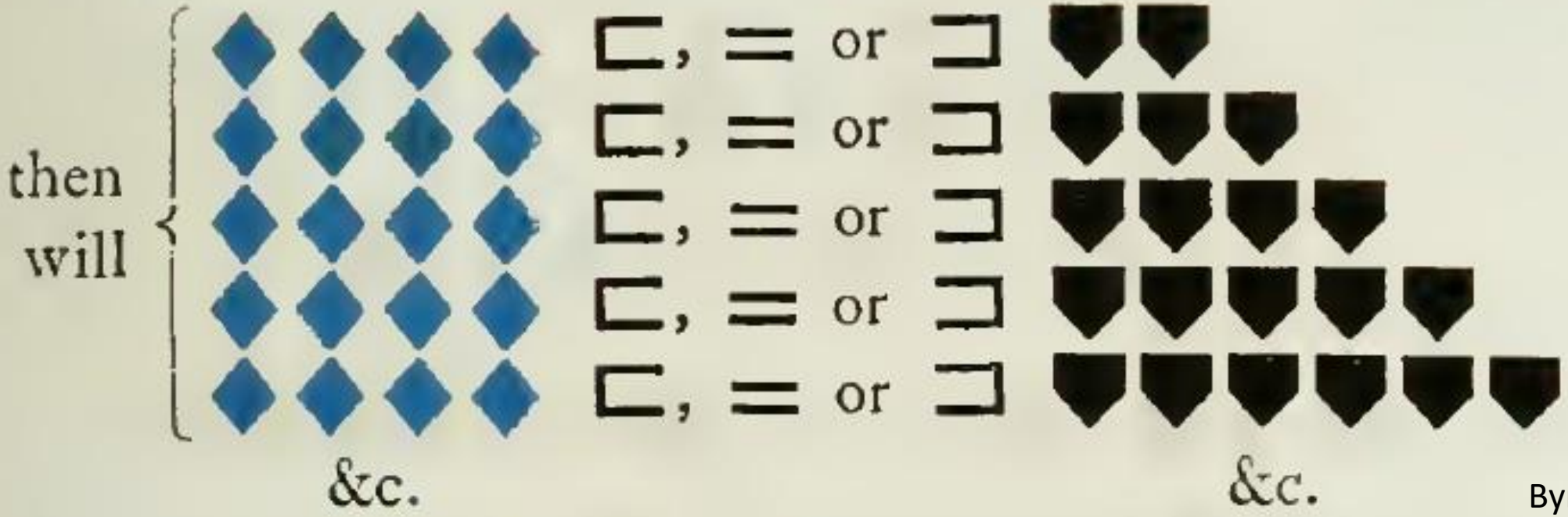


LONDON

WILLIAM PICKERING

1847



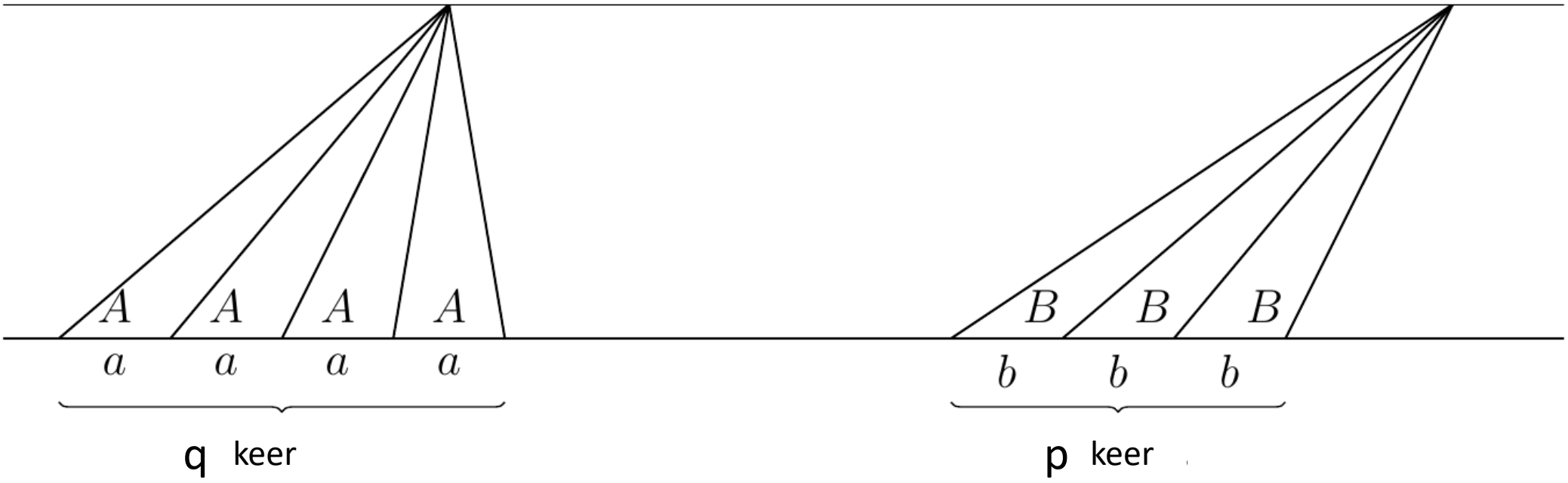


Byrne

Gelijkvormigheid van driehoeken

Cruciaal voorbeeld:

Stelling: Twee driehoeken of twee parallellogrammen van dezelfde hoogte verhouden zich tot elkaar op Dezelfde manier als hun basissen zich tot elkaar verhouden.



(Boek VI, Propositie 1)

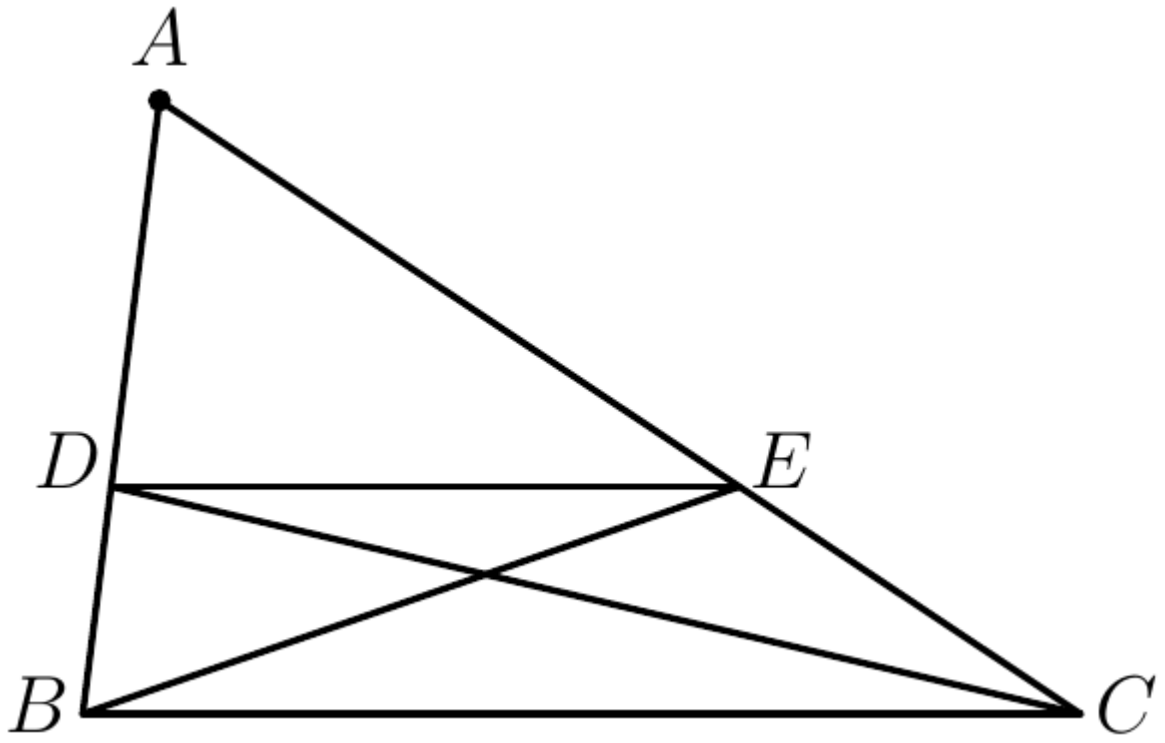


TRIANGLES *and parallelograms having the ſame altitude are to one another as their baſes.*

Let the triangles  and  have a common vertex, and their baſes —— and —— in the ſame ſtraight line.

Gelijkvormigheid

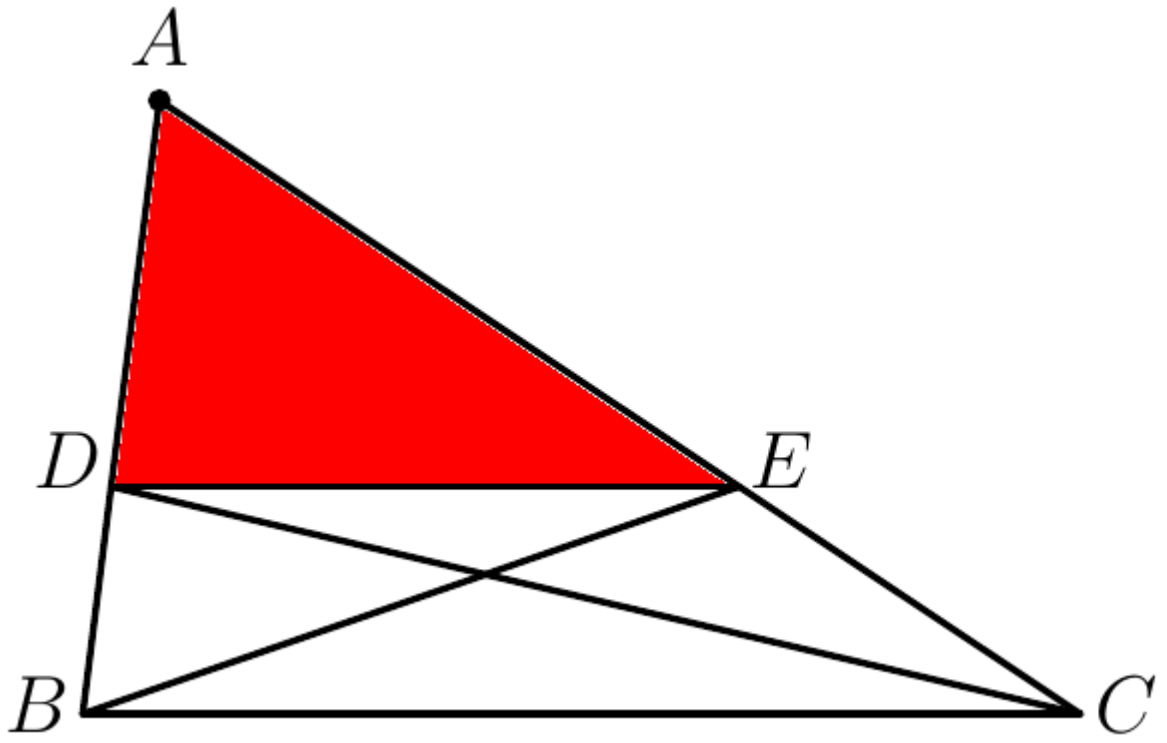
Stelling: De hoeken van twee driehoeken zijn gelijk desda de overeenkomstige zijdeverhoudingen hetzelfde zijn.



(Boek VI, Propositie 2)

Gelijkvormigheid

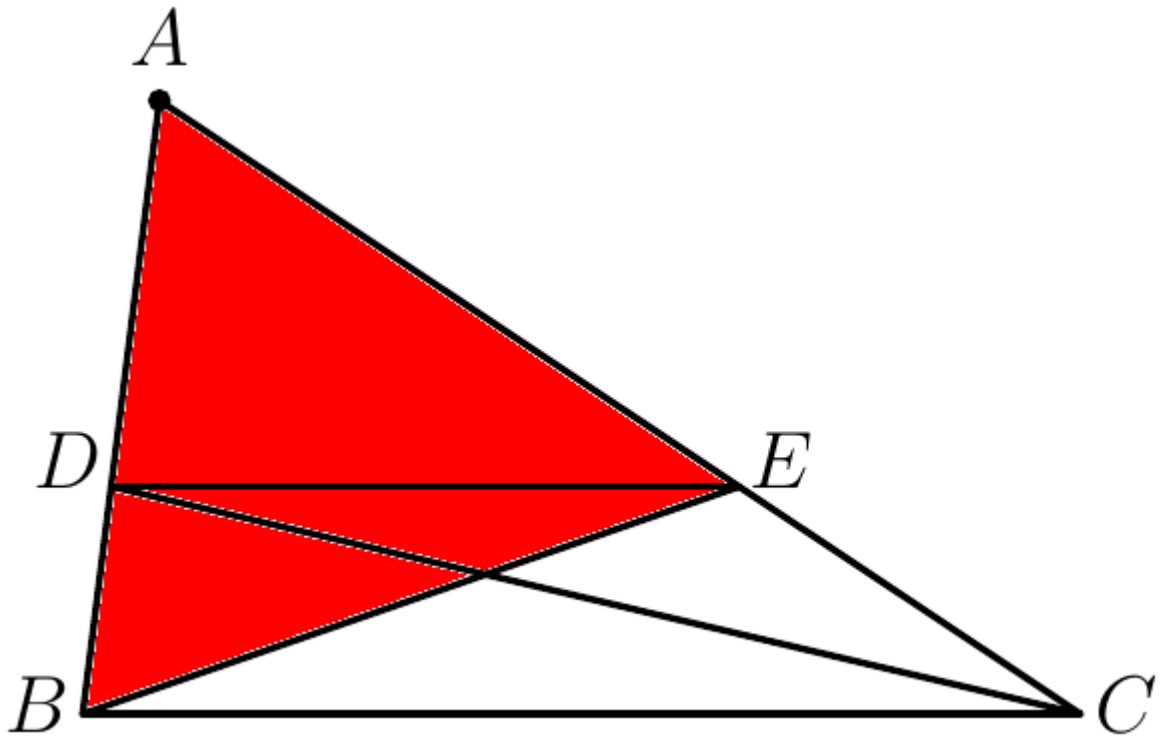
Stelling: De hoeken van twee driehoeken zijn gelijk desda de overeenkomstige zijdeverhoudingen hetzelfde zijn.



(Boek VI, Propositie 2)

Gelijkvormigheid

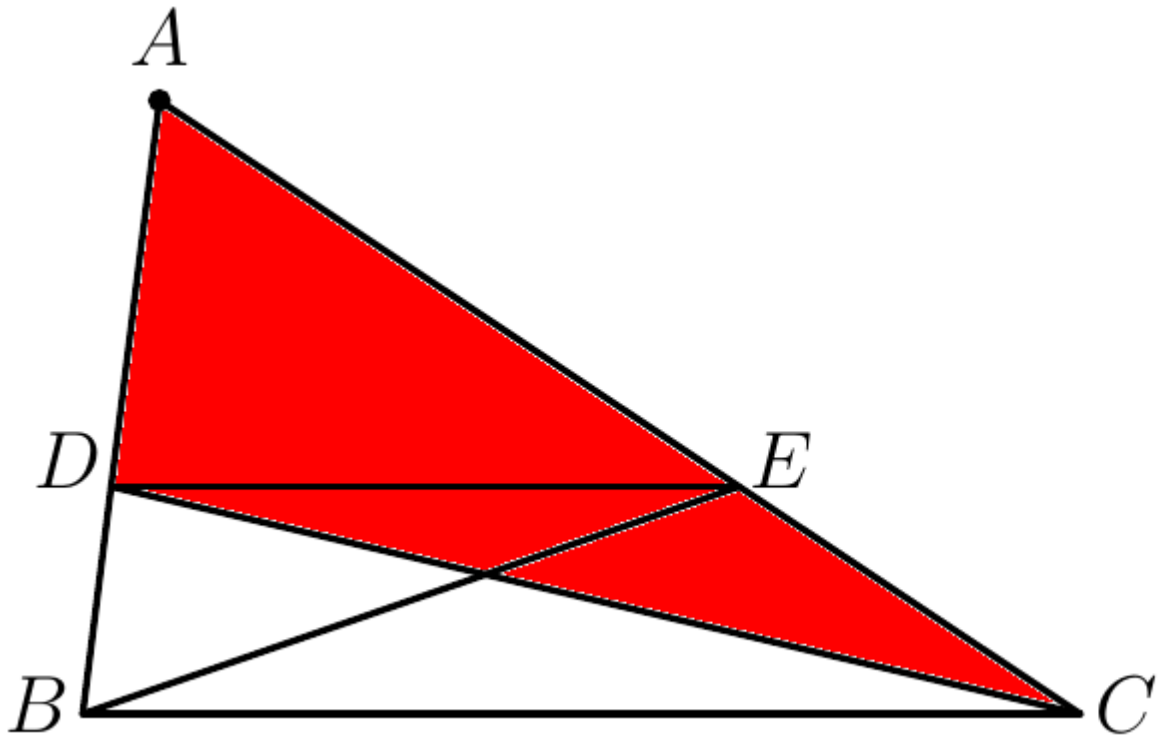
Stelling: De hoeken van twee driehoeken zijn gelijk desda de overeenkomstige zijdeverhoudingen hetzelfde zijn.



(Boek VI, Propositie 2)

Gelijkvormigheid

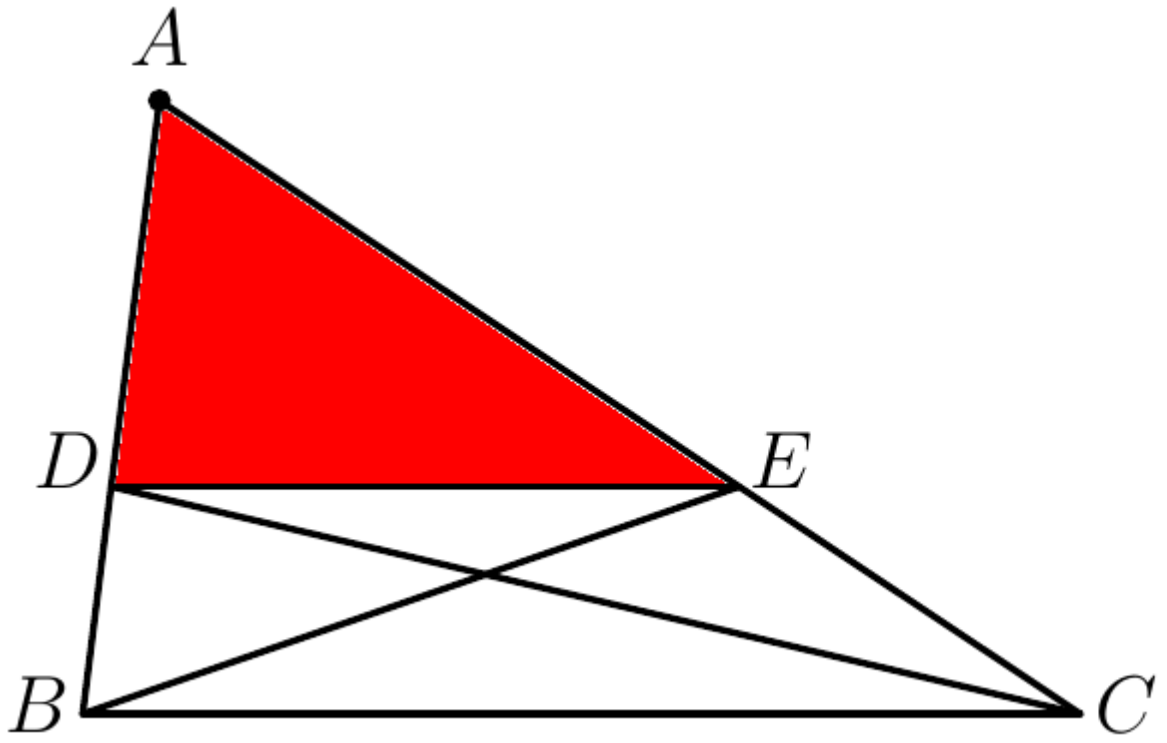
Stelling: De hoeken van twee driehoeken zijn gelijk desda de overeenkomstige zijdeverhoudingen hetzelfde zijn.



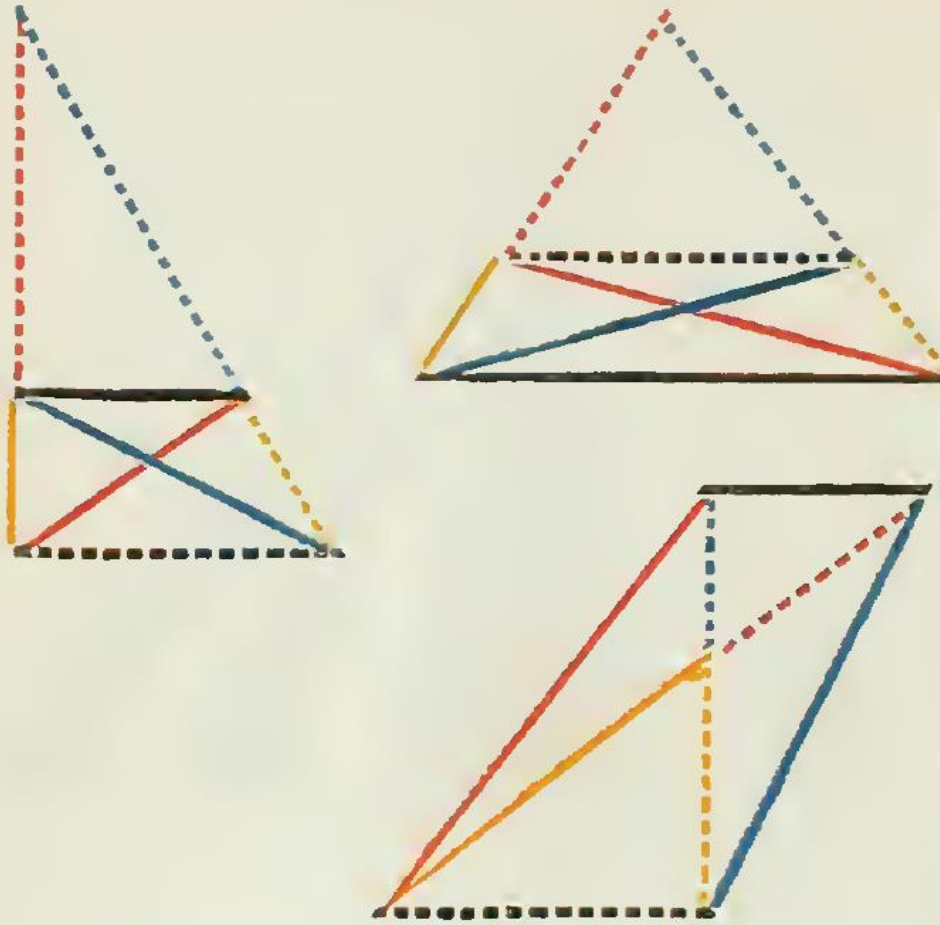
(Boek VI, Propositie 2)

Gelijkvormigheid

Stelling: De hoeken van twee driehoeken zijn gelijk desda de overeenkomstige zijdeverhoudingen hetzelfde zijn.



(Boek VI, Propositie 2)



IF *a ſtraight line* ——— *be drawn parallel to any ſide* ..... *of a triangle, it ſhall cut the other ſides, or thoſe ſides produced, into proportional ſegments.*

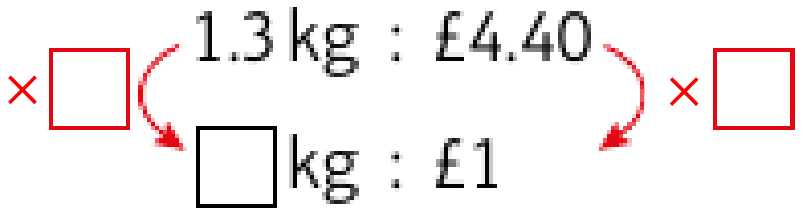
And if any ſtraight line ——— *divide the ſides of a triangle, or thoſe ſides produced, into proportional ſegments, it is parallel to the remaining ſide* .....

Bestaan van de vierde gelijkvormige

De vierde gelijkvormige

Gegeven een verhouding van grootheden (van dezelfde soort) a en b en een willekeurige grootheid C.

De *vierde gelijkvormige* is de grootheid X zodanig dat de verhouding X:C gelijk is aan de verhouding a:b.

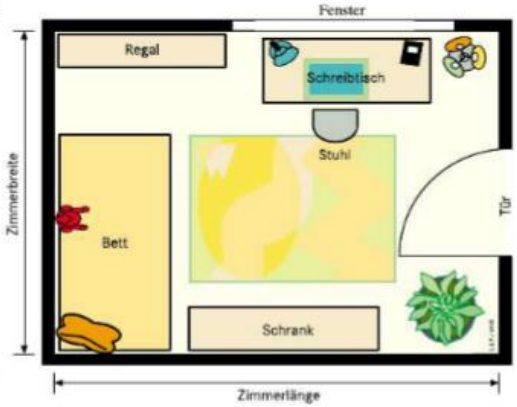


- Axioma van Archimedes: X is uniek.
- Geen verschil meer tussen bereiken van grootheden.
- Opdelen van grootheden in een n-de deel.


BIZERBA
2
Kilogramm

b) 1 cm in der Zeichnung sind 50 cm in der Wirklichkeit. 5 cm in der Zeichnung sind dann 5 · 50 cm, also 250 cm = 2,50 m in der Wirklichkeit. Entsprechend erhält man die anderen Längen.

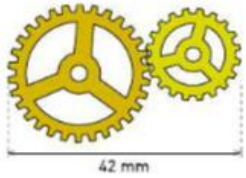
Zeichnung	Wirklichkeit
1 cm	50 cm
2 cm	1 m
8 cm	4 m
6 cm	3 m
4 cm	2 m
3 cm	1,5 m



Weiterführende Aufgabe

Vergrößerte Darstellung

2. Man kann einen Maßstab auch benutzen, um Gegenstände vergrößert darzustellen. Im Bild rechts siehst du die Zahnräder einer Armbanduhr im Maßstab 3 : 1 (dreifach vergrößert). Die Abmessung auf dem Bild beträgt 42 mm.
Wie groß ist sie in der Wirklichkeit?



Information

Maßstab

Gegenstände werden oft verkleinert (oder vergrößert) dargestellt.

Der **Maßstab** einer Zeichnung gibt an, wievielmal größer (oder kleiner) eine Strecke in Wirklichkeit als in der Zeichnung ist.

1 : 300 (gelesen: *eins zu dreihundert*) bedeutet: Jede Strecke ist in Wirklichkeit 300-mal größer als in der Zeichnung, d. h. 1 cm in der Zeichnung entspricht 300 cm in der Wirklichkeit.

5 : 1 (gelesen: *fünf zu eins*) bedeutet: Jede Strecke ist in Wirklichkeit 5-mal kleiner als in der Zeichnung, d. h. 5 cm in der Zeichnung entspricht 1 cm in der Wirklichkeit bzw. 1 cm in der Zeichnung entspricht 1 cm : 5 = 10 mm : 5 = 2 mm in der Wirklichkeit.

Übungsaufgaben

3. Von einem Ortsteil soll ein verkleinertes Modell für eine Ausstellung aufgebaut werden. Als Maßstab ist 1 : 200 gewählt worden, d. h. 1 cm am Modell sind 200 cm in der Wirklichkeit.
Bestimme die Abmessungen für das Modell des Flachdachbungalows.

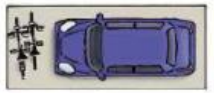


4. Bestimme **(1)** die Länge, **(2)** die Breite des wirklichen Rechtecks.

a) Maßstab 1 : 50



b) Maßstab 1 : 200



5. **a)** Ein Rechteck ist 8 m lang und 5 m breit. Zeichne es im angegebenen Maßstab: **(1)** 1 : 50 **(2)** 1 : 100 **(3)** 1 : 200

b) Ein Rechteck ist 4 cm lang und 1,5 cm breit. Zeichne es im angegebenen Maßstab. **(1)** 2 : 1 **(2)** 3 : 1 **(3)** 4 : 1

6. Das Modell eines Pkw hat im Maßstab 1 : 8 eine Länge von 56 cm.
Wie lang ist der Pkw in der Wirklichkeit?



7. Tim misst die Länge seines Modellautos: 25 cm. Er weiß, dass dieses Fahrzeug in Wirklichkeit 4,50 m lang ist. In welchem Maßstab ist das Modellauto hergestellt?

Klicken oder Ziehen zum Vergrößern

Ein Stadtplan hat einen Maßstab von 1 : 25 000, eine Wanderkarte 1 : 50 000 und eine Straßenkarte 1 : 200 000. Übertrage die Tabelle in dein Heft und fülle sie aus.

a) Stadtplan

Karte	Wirklichkeit
1 cm	250 m
5 cm	
8 cm	
	750 m
	4 km
	5 km

b) Wanderkarte

Karte	Wirklichkeit
1 cm	
4 cm	
6 cm	
	2 500 m
	5 km
	8 km

c) Straßenkarte

Karte	Wirklichkeit
1 cm	
8 cm	
20 cm	
	10 km
	18 km
	25 km

9. Rechts siehst du das Bild eines Wasserflohs.
Wie lang ist die eingezeichnete Strecke in Wirklichkeit?

10. Besorgt euch eine Karte eures Ortes. Welchen Maßstab hat sie?
Wählt markante „Punkte" (z. B. Rathaus, Schwimmbad) eures Ortes. Bestimmt jeweils die Entfernung von eurer Schule.

Wasserflöhe

sind kleine Krebstiere, von denen es 400 Arten gibt, die sowohl im Süßwasser als auch im Meerwasser vorkommen.



Maßstab 20 : 1
d. h. zwanzigfach vergrößert

6. Das Modell eines Pkw hat im Maßstab 1:8 eine Länge von 56 cm.
Wie lang ist der Pkw in der Wirklichkeit?

7. Tim misst die Länge seines Modellautos: 25 cm. Er weiß, dass dieses Fahrzeug in Wirklichkeit 4,50 m lang ist. In welchem Maßstab ist das Modellauto hergestellt?



6. Som:

d mit [8e:1e] = [d:56 cm]

7. Som:

[4,5 m:25 cm] = [18m:1m]=18:1

Laat er getallen zijn!

De vierde gelijkvormige

Voor a en b, evenals voor c, is er een x zodanig dat

$$a{:}b{=}x{:}c.$$

Dit is een vermenigvuldiging!

Het antwoord is $x = \frac{a}{b} \cdot c$.

Een verhouding kan worden vermenigvuldigd met een grootheid.

Verhouding keer grootheid.

$$[a : b] \cdot e := x, \quad \text{where} \quad [a : b] = [x : e]$$



Strekken door het bestaan van de vierde gelijkvormige

Basisrekenkundige bewerkingen zijn geïnduceerd en goed gedefinieerd

Gegeven $[a:b]$ en $[c:d]$.

Schrijf $[a:b] = [x:e]$ en $[c:d] = [y:e]$.

$[a:b] + [c:d] \coloneqq [x + y:e]$ (Optelling)

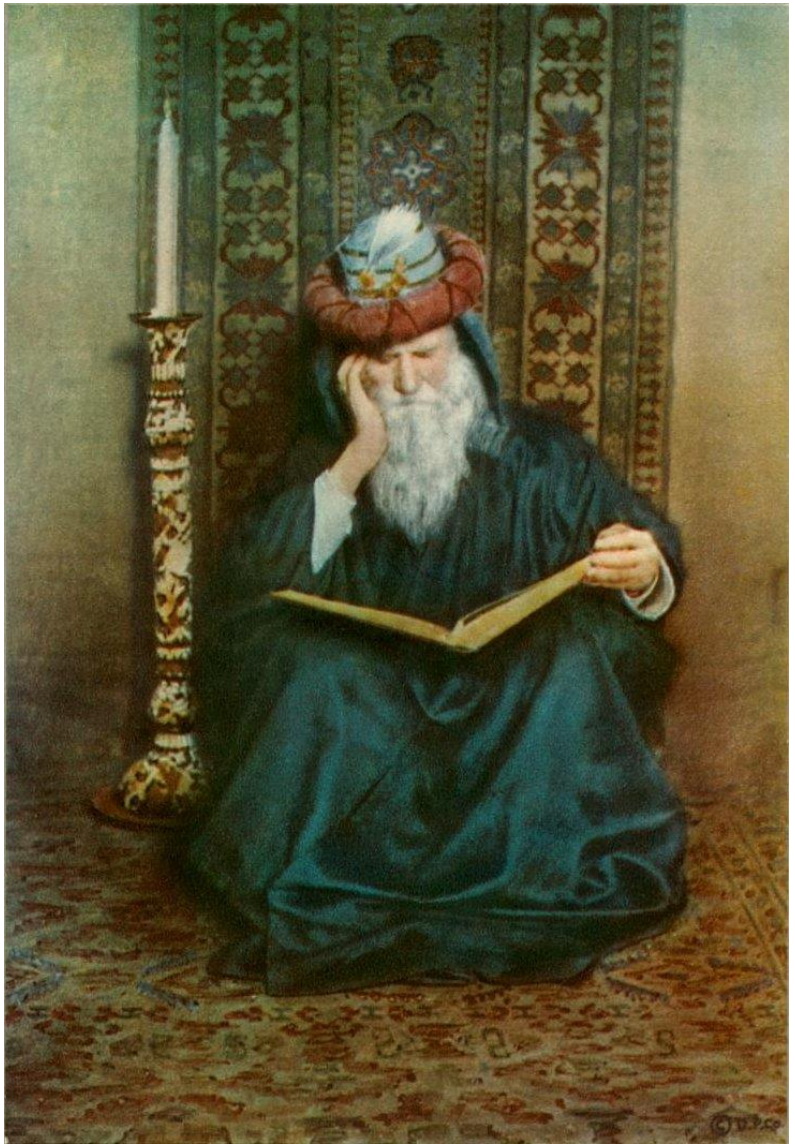
$[a:b] \cdot [c:d] \coloneqq [[a:b] \cdot c:d]]$ (Vermenigvuldiging).

Conclusie: Bij alle getallen – en vooral de irrationale – kunnen we de wetten van de breuken gebruiken.

Omar Chayyām (1048-1131)

Omar Khayyam (Perzisch) ʿOmar-e Ḫayyām of ʿUmar-i Ḫayyām; Arabisch ʿUmar al-Ḫayyām ‘Umar de Tentenmaker’

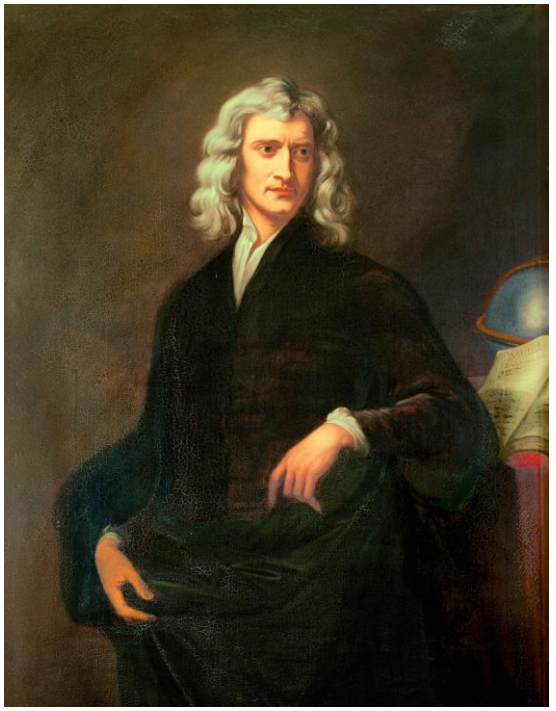
… begreep verhoudingen als getallen en gebruikte expliciet het bestaan van de vierde gelijkvormige.



GESCHICHTE DER MATHEMATIK IM MITTELALTER
VON PROFESSOR A.P. JUSCHKEWITSCH
INSTITUT FÜR GESCHICHTE DER NATURWISSENSCHAFTEN UND TECHNIK
AN DER AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN DER UdSSR

Adelaide Hanscom Leeson
(1905, 1912)

NEWTON'S CONCEPTION OF CALCULATING WITH PROPORTIONS



"By *number* we understand, not so much a Multitude of Unities, as the abstracted Ratio of any Quantity, to another Quantity of the same Kind, which we take for Unity.

And this is threefold; integer, fracted, *and* surd: An *Integer* is what is measured by Unity; a Fraction, that which a submultiple Part of Unity measures; and a Surd, to which Unity is incommensurable."

(1769, p. 2, emphasis in the original; Whiston's original Latin edition of Newton's lecture notes stem from 1707)

Isaac Newton

"*Multiplication*, properly so called, is that which is made by Integer, as seeking a new Quantity, so many Times greater than the Multiplicand, as the Multiplier is greater than Unity.

But, for want of a better Word, that is also called *Multiplication*, which is made use of in Fractions and Surds, to find a new Quantity in the same *Ratio*, (whatever it be) to the Multiplicand, as the Multiplier has to Unity.

Nor is Multiplication made *only by abstract Numbers, but also* by concrete Quantities*, as by Lines, Surfaces, Local Motion, Weights,* etc. as far as these being related to some known Quantity of their Kind, as to Unity, may express the Ratios of Numbers, and supply their Place."

Key point 14

A **surd** is a number that cannot be simplified by removing the square root sign.
For example, $\sqrt{5}$ is a surd, but $\sqrt{4}$ is not a surd, because $\sqrt{4} = 2$.
All surds are irrational numbers.

5 Simplify these surds.

a $\sqrt{20}$ **b** $\sqrt{300}$ **c** $\sqrt{44}$

d $\sqrt{250}$ **e** $4\sqrt{50}$ **f** $6\sqrt{56}$

Q5 hint Find a factor that is also a square number.

6 **Reasoning / Problem-solving** Trish types $\sqrt{72}$ into her calculator. Her display shows $6\sqrt{2}$.

a Show how the calculator worked this out.

Q6a hint 'Show' means show your working.

Trish presses the S⇔D button on her calculator. The display shows 8.485281374.

b What does the S⇔D button do?

c Louie types $\sqrt{90}$ into his calculator.

i What number will be shown on the calculator display?

ii Estimate the number that will be shown when Louie presses the S⇔D button.

iii Use a calculator to check your answers to parts **i** and **ii**.

7 **a** A surd simplifies to $4\sqrt{5}$. What is the original surd?

b **Reflect** How did you find the surd?

Bewijs van de rekenregels

Bewijs de volgende wetten voor vermenigvuldiging:

$$[a\colon b] \cdot b = a$$

$$[a\colon b] \cdot [b\colon c] = [a\colon c].$$

Oplossing:

Bereken als volgt:

$$[a:b] \cdot b = x, \text{ waar}$$

$x:b = a:b$. Dus $x = a$ en $[a:b] \cdot b = a$.

Bereken als volgt:

$$[a:b] \cdot [b:c] = \big[[a:b] \cdot b:c\big] = [x:c], \text{ waar}$$

$x:b = a:b$. Dus $x = a$ en $[a:b] \cdot b = a$.

Deze bewijzen hebben axioma van Archimedes nodig

$$[a:b] \cdot c = [c:b] \cdot a$$

oftewel:

$$[a:b] = [d:c] \Leftrightarrow [a:d] = [b:c]$$

en

$$[a:b] \cdot ([c+d]) = [a:b] \cdot c + [a:b] \cdot d \ .$$

Naṣīr al-Dīn al-Ṭūsī (1201 – 1274)

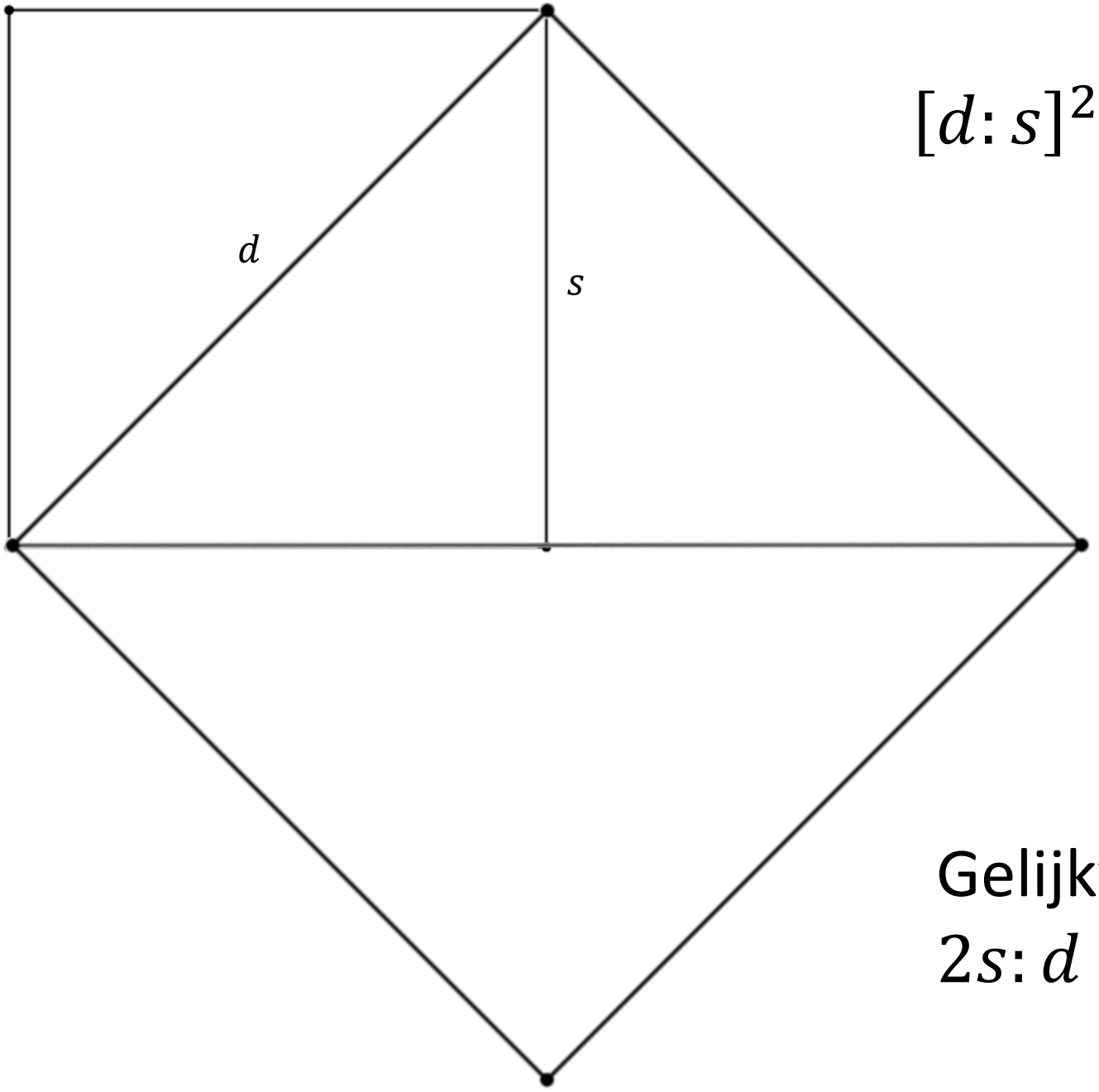
Beschouwde de verhoudingen als getallen.

Bewees de commutativiteit van vermenigvuldiging (“Euclides uitgave”)



GESCHICHTE DER MATHEMATIK IM MITTELALTER
VON PROFESSOR A.P. JUSCHKEWITSCH
INSTITUT FÜR GESCHICHTE DER NATURWISSENSCHAFTEN UND TECHNIK
AN DER AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN DER UdSSR

Meetkundige foefjes



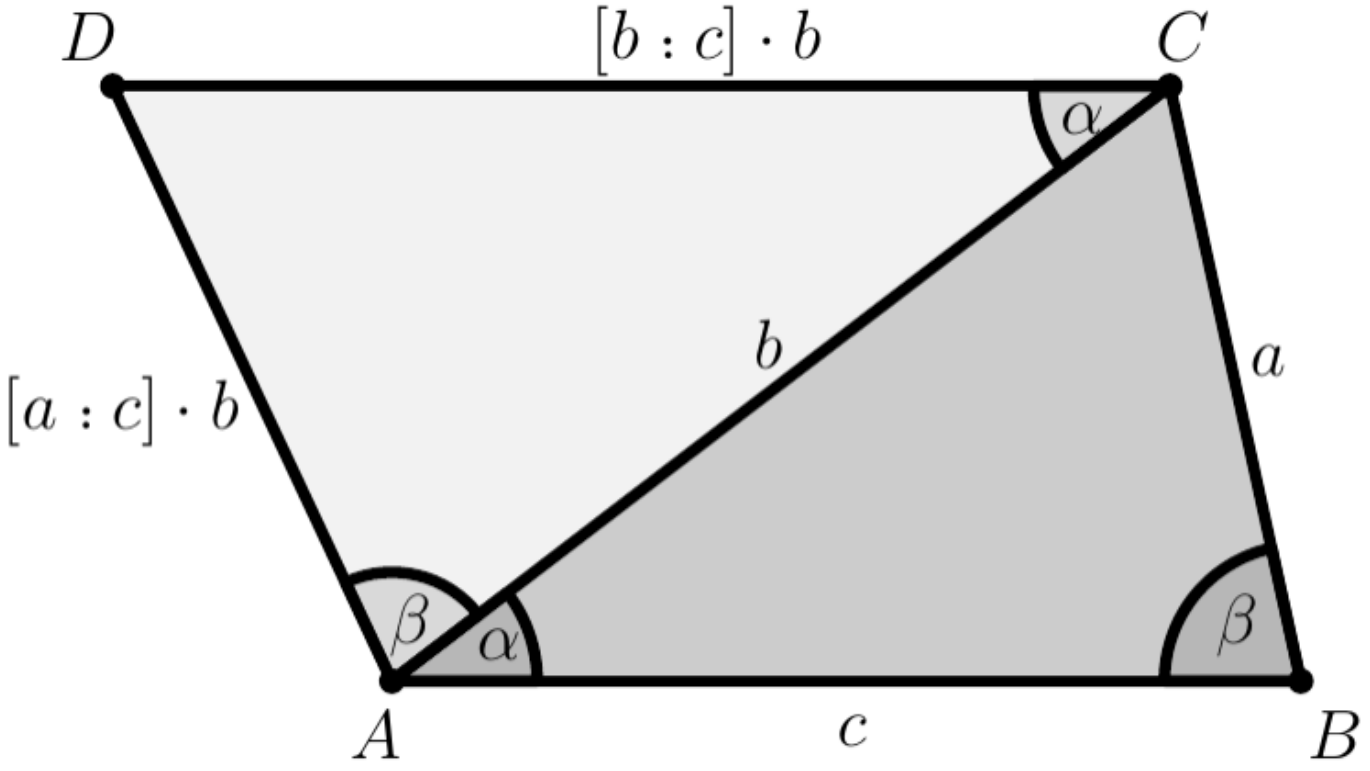
$$[d\colon s]^2 = \big[[d\colon s] \cdot d\colon s\big]$$

$$= [2s\colon s] = 2.$$

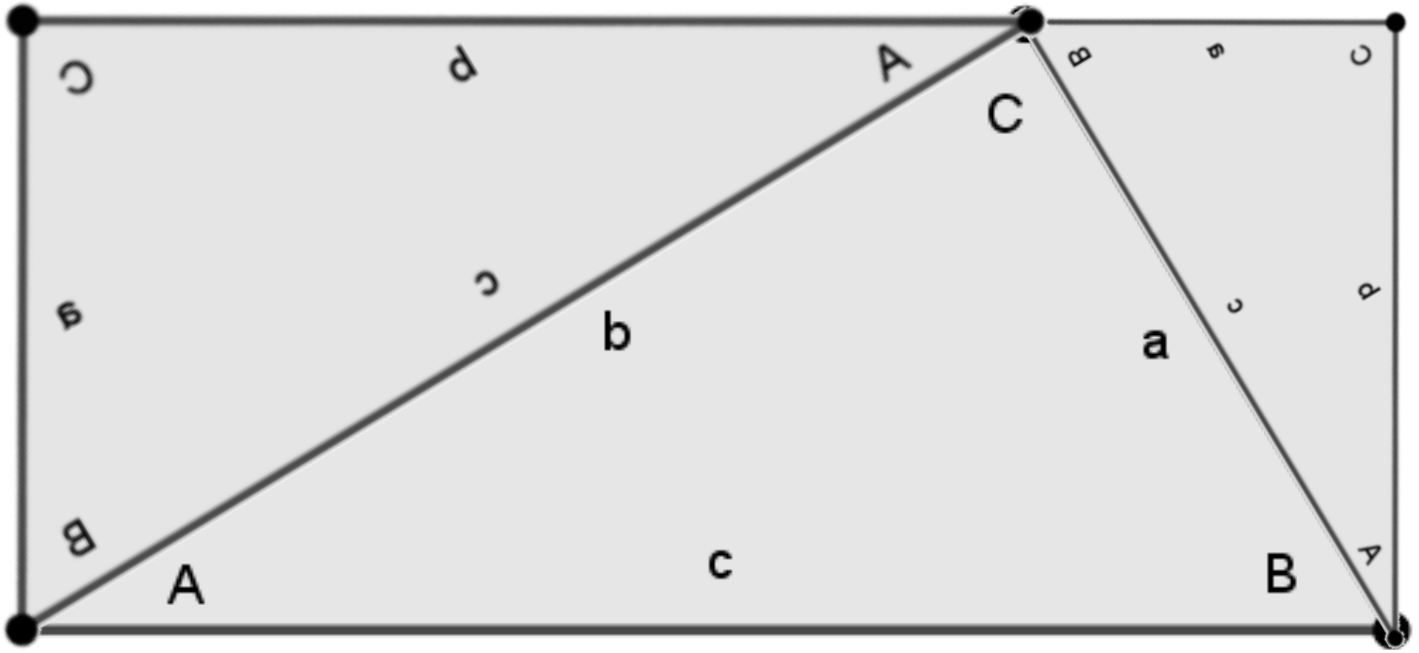
Gelijkvormigheid:
$2s\colon d = d\colon s.$

Er is geen betere berekening!

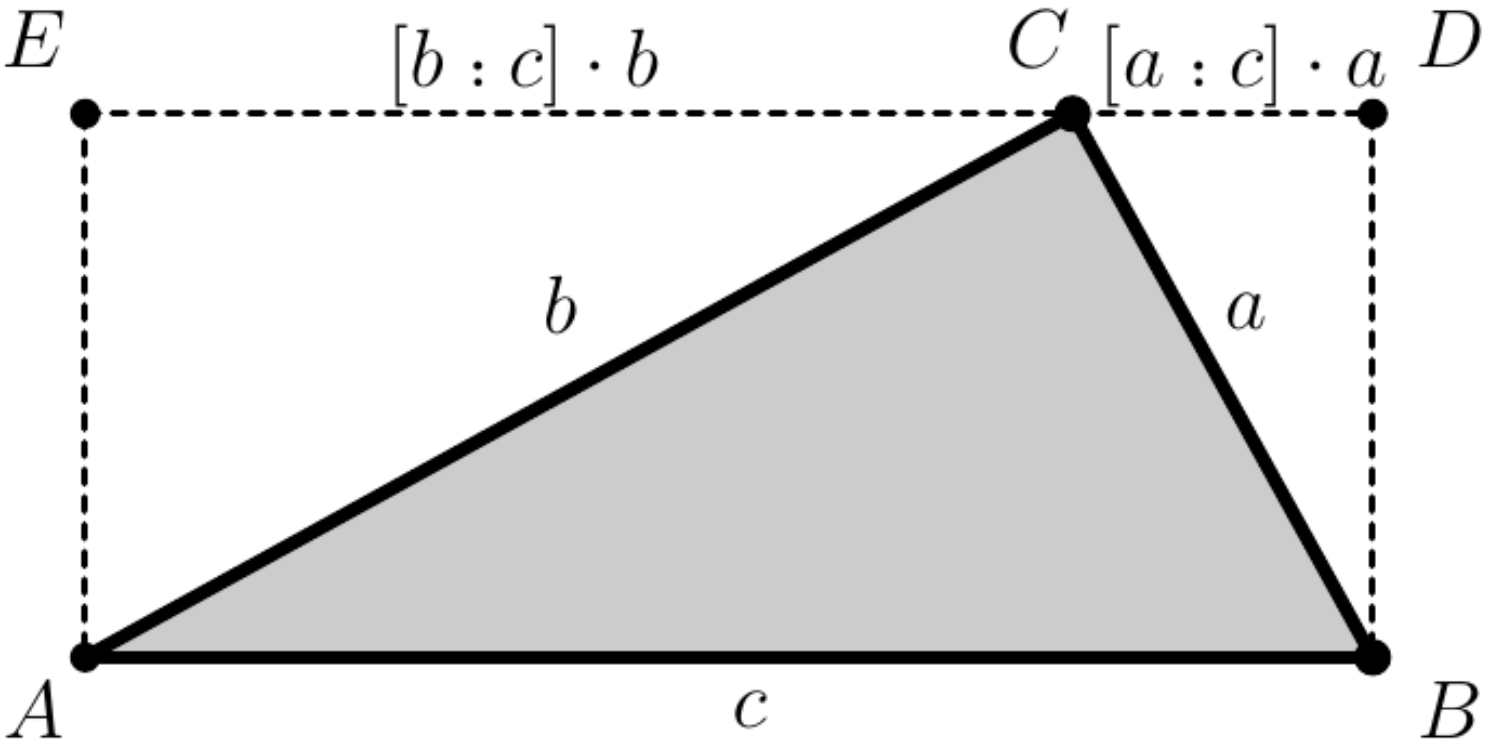
Rekenen met verhoudingen van lengtes



Rechthoekige driehoek

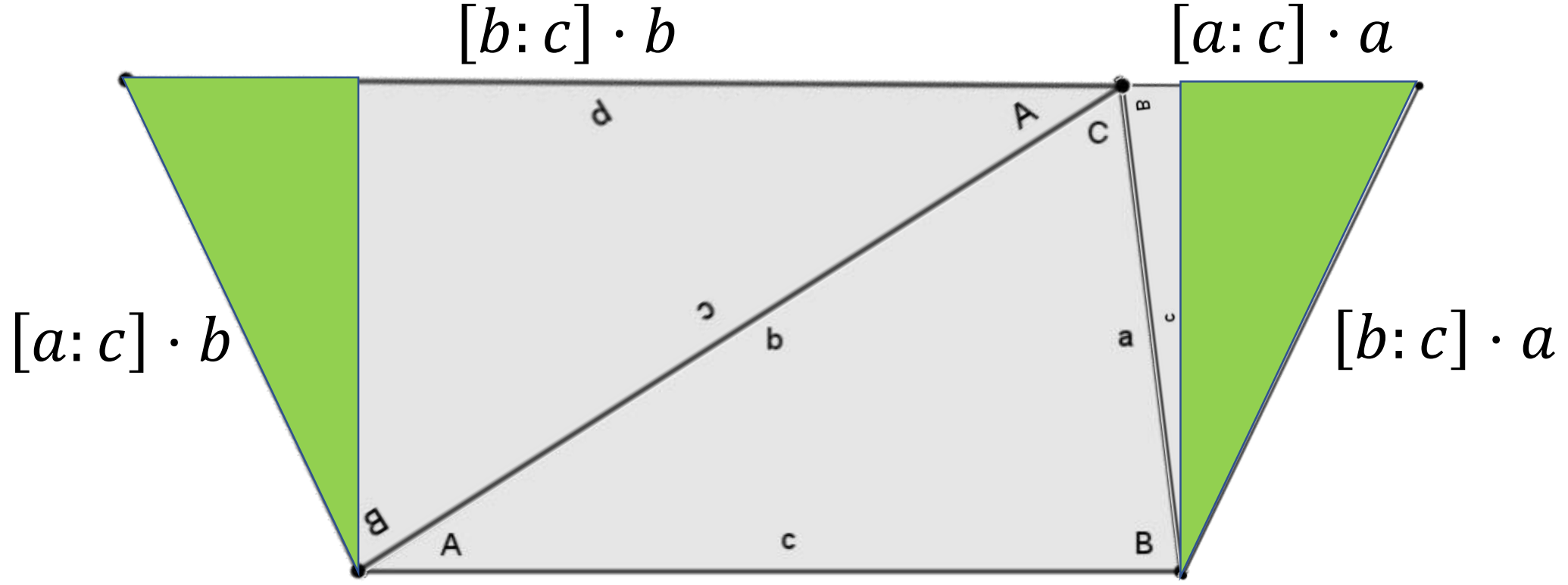


Pythagoras

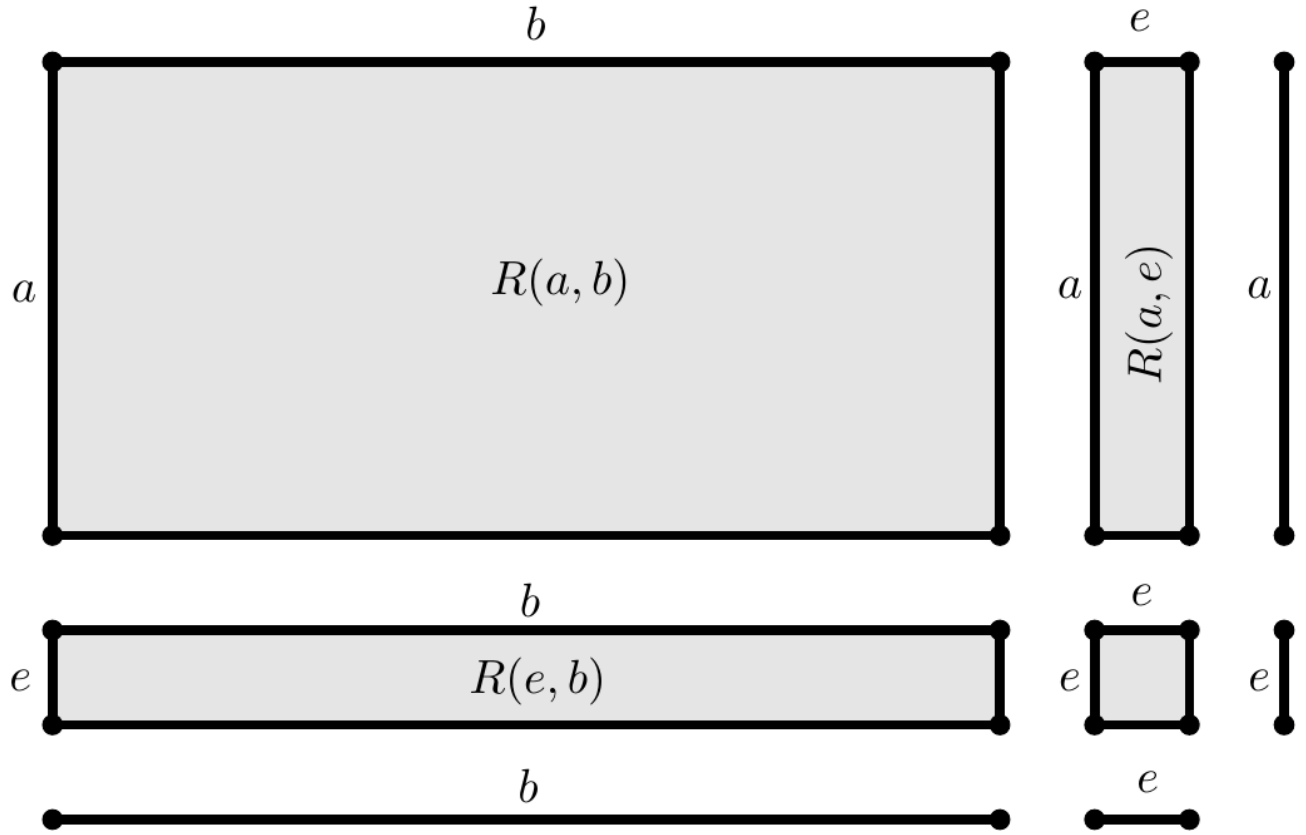


$$[a : c] \cdot a + [b : c] \cdot b = c.$$

Cosinusregel



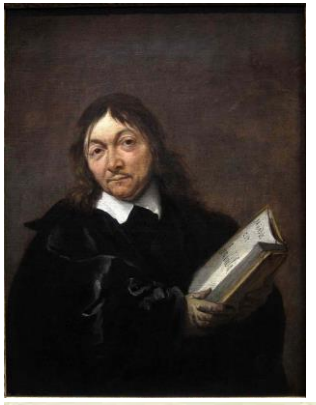
$$c = [b:c]\cdot b + [a:c]\cdot a - [a:c]\cdot b\cos\gamma\ - [b:c]\cdot a\cos\gamma$$

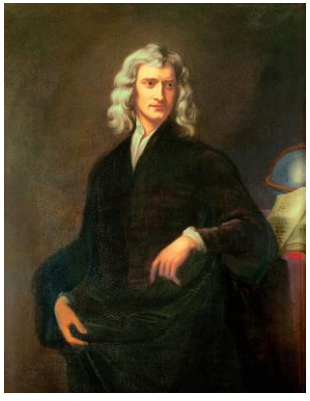


$$R(a,b):R(e,e)$$
$$= [R(a,b):R(a,e)] \cdot [R(a:e):R(e,e)]$$
$$= [b:e] \cdot [a:e]$$

Verdere ontwikkeling

- Gregorius van St. Vincent pakt het onderwerp op.
- Descartes gebruikt de getallentheorie als verhoudingen van grootheden indirect.
- Simon Stevin herkent irrationele getallen.
- Newton maakte de relatie duidelijk.
- …
- Richard Dedekind, David Hilbert, Otto Hölder, Fred Schuh…



BERICHTE

ÜBER DIE

VERHANDLUNGEN

DER KÖNIGLICH SÄCHSISCHEN

GESELLSCHAFT DER WISSENSCHAFTEN

ZU LEIPZIG

MATHEMATISCH-PHYSISCHE CLASSE.

DREIUNDFÜNFZIGSTER BAND.

1901.

I.

LEIPZIG
BEI B. G. TEUBNER.
1901.

Einzelpreis 1 Mark 50 Pfg.

Die Axiome der Quantität und die Lehre vom Mass.



Otto Hölder

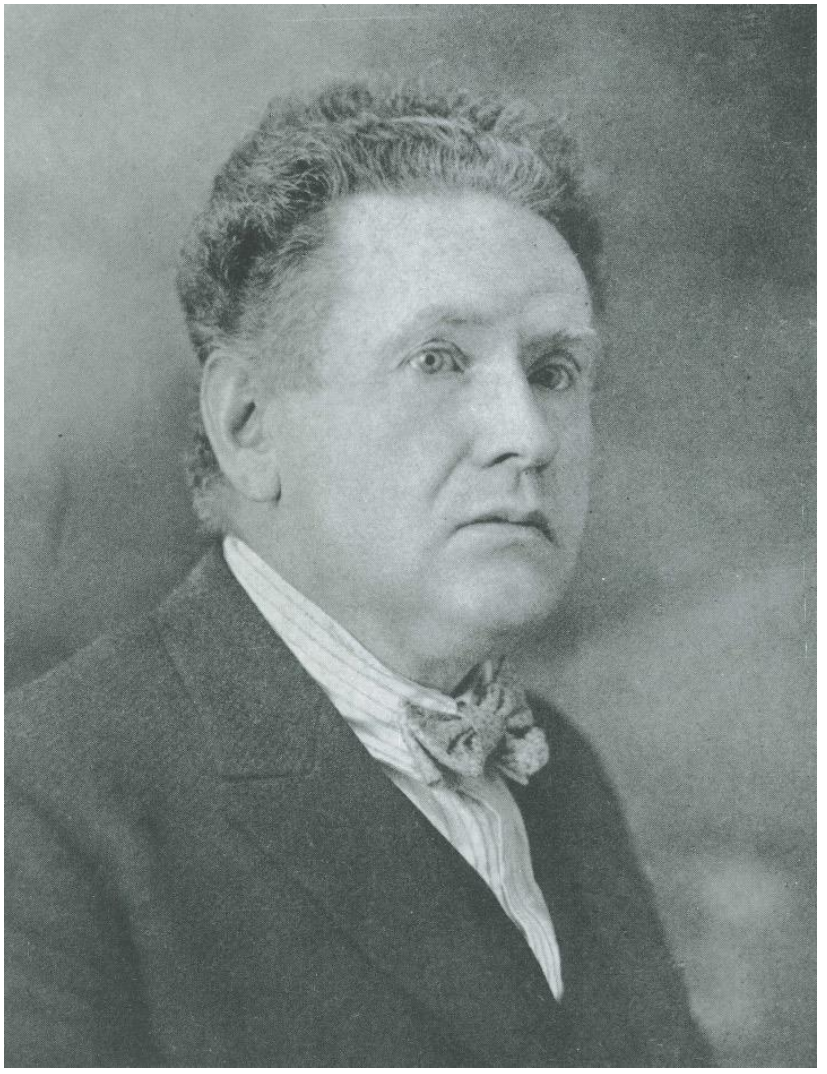
AXIOMATISCHE BEHANDELING DER MEETBARE EN ONMEETBARE VERHOUDINGEN VAN GROOTHEDEN,

EEN TOEPASSING VAN DE THEORIE VAN HET ONMEETBARE GETAL OP MEETKUNDIGE EN NATUURKUNDIGE GROOTHEDEN.

DOOR

Dr. FRED. SCHUH,
HOOGLEERAAR AAN DE TECHNISCHE HOOGESCHOOL TE DELFT.

P. NOORDHOFF N.V. — 1929 — GRONINGEN

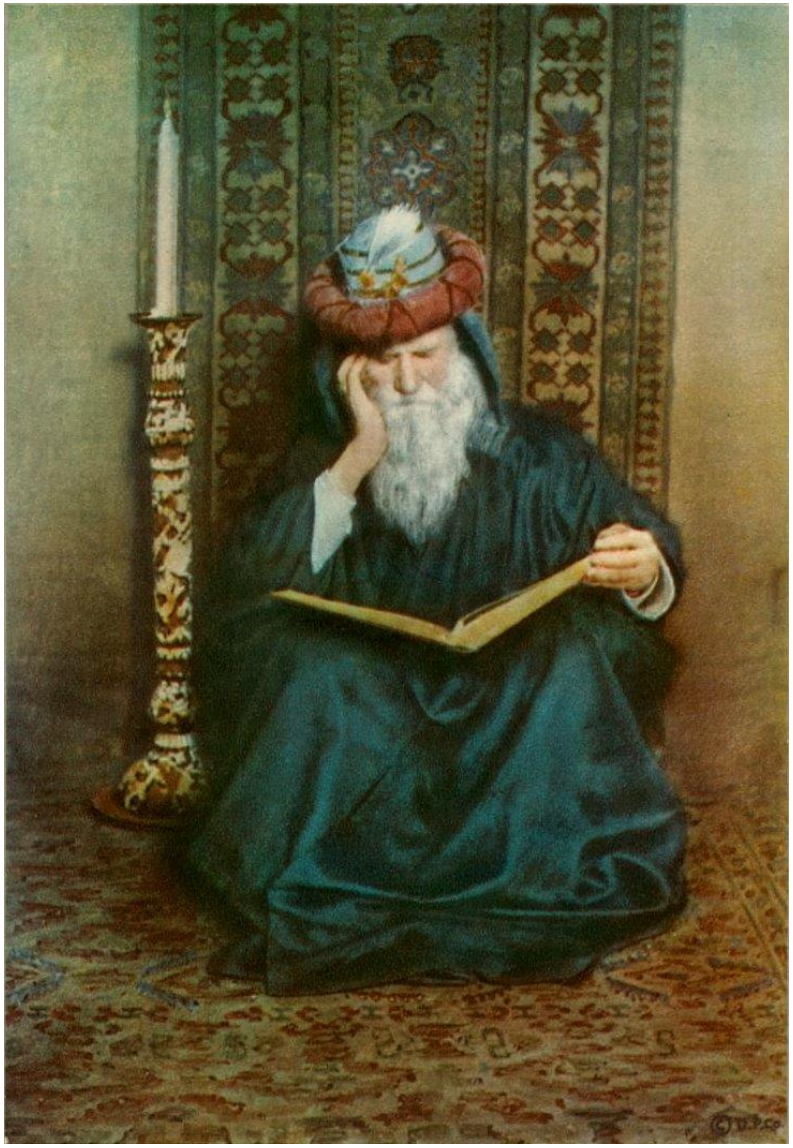


Fred. Schuh

Omar Chayyām (1048-1131)

Omar Khayyam heeft ook een andere definitie gegeven van de gelijkheid van verhoudingen:

Anthyphairetische defintie



GESCHICHTE DER MATHEMATIK IM MITTELALTER
VON PROFESSOR A.P. JUSCHKEWITSCH
INSTITUT FÜR GESCHICHTE DER NATURWISSENSCHAFTEN UND TECHNIK
AN DER AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN DER UdSSR

Adelaide Hanscom Leeson
(1905, 1912)

Stelling (Anthyphairetische defintie)

Gegeven twee grootheden $a = a_0$ en $b = a_1$, zodat het Euclidisch algorithme natuurlijke getallen $m_0, m_1, m_2, \ldots$ en $a_0, a_1, a_2, \ldots$ opleverd, zodat $a_0 = m_0 \cdot a_1 + a_2$ en verder

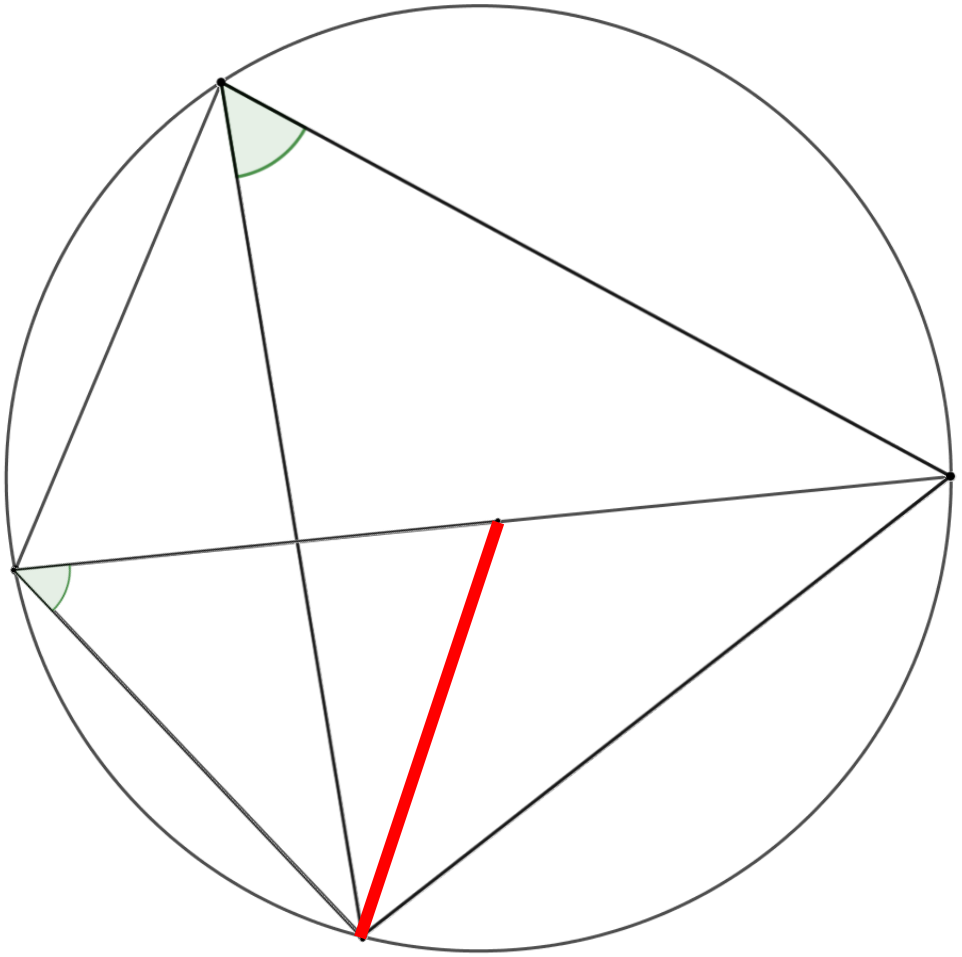
$$a_{k-1} = m_k \cdot a_k + a_{k+1} \text{voor } k = 2,3,4, \ldots.$$

Als we een ander paar van natuurlijke getallen hebben $\mathrm{A} = A_0$ and $\mathrm{B} = B_1$, zodat het Euclidisch algorithme **dezelfde naturlijke getallen** $m_0, m_1, m_2, \ldots$ opleverd, waarbij de grootheden $A_0, A_1, A_2, \ldots$ ontstaan zodat $A_0 = m_0 \cdot A_1 + A_2$ en verder

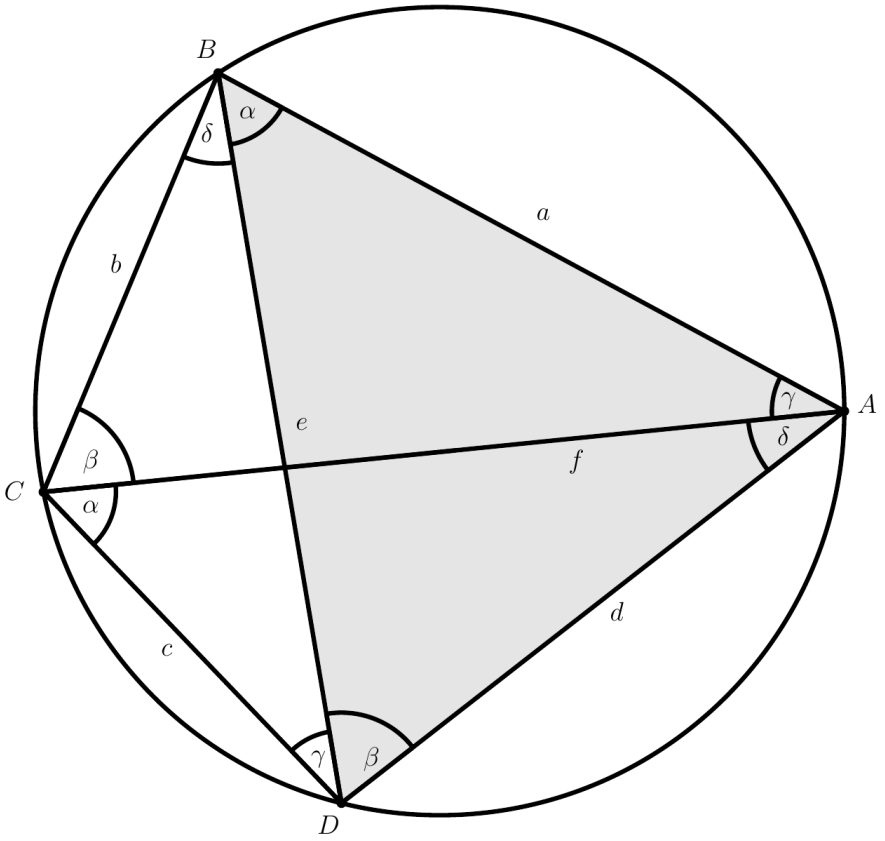
$$A_{k-1} = m_k \cdot A_k + A_{k+1} \text{voor } k = 2,3,4, \ldots.$$

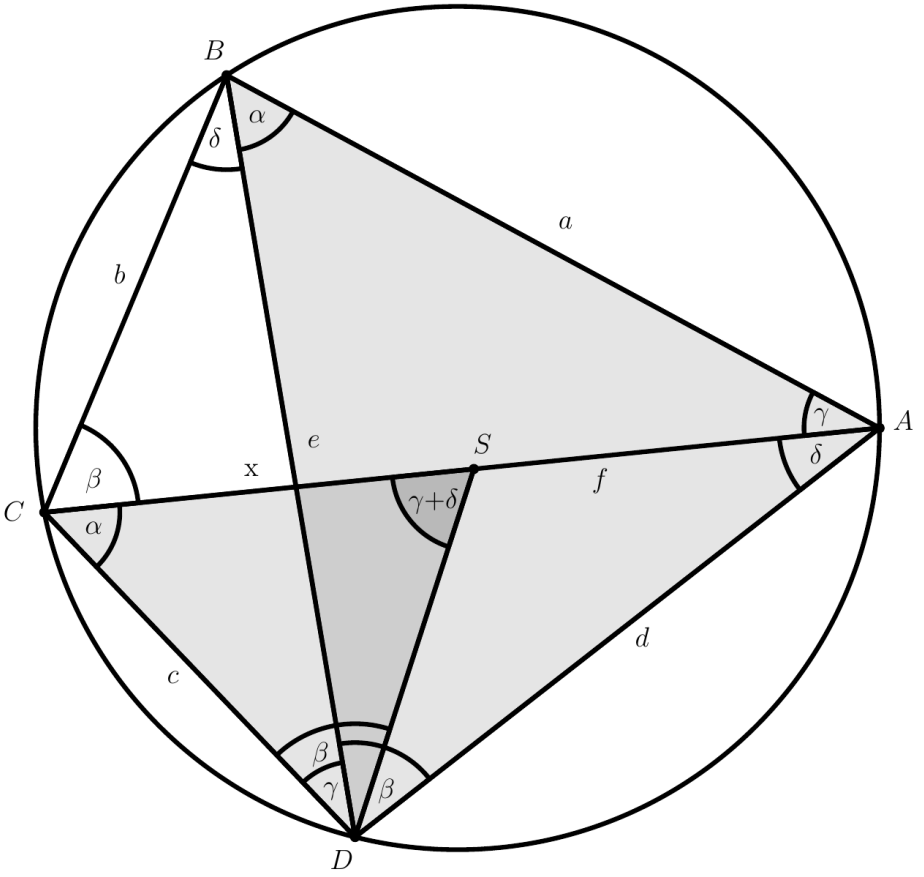
Dan is $a : b = A : B$.

De mysterieuze hulplijn in Ptolemaeus



De mysterieuze hulplijn in Ptolemaeus





$$\mathrm{f} = [a{:}\,e] \cdot c + [b{:}\,e] \cdot d$$

Dank voor de aandacht