Welke rol speelde Euclides in het onderwijs de afgelopen 100 jaar?

Eens Euclides altijd Euclides?

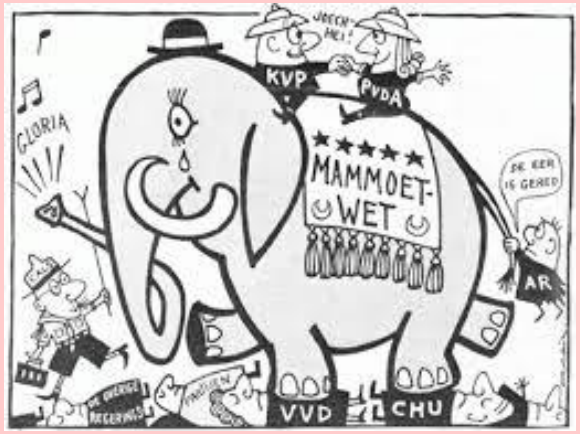


Nellie Verhoef (nellieverhoef@gmail.com)

50 jaar en nog eens 50 jaar

Tot 1970: over het algemeen sloeg Euclides de klok in het meetkundeonderwijs.

Hoeveel lessen wiskunde kreeg u per week, en welke wiskunde?



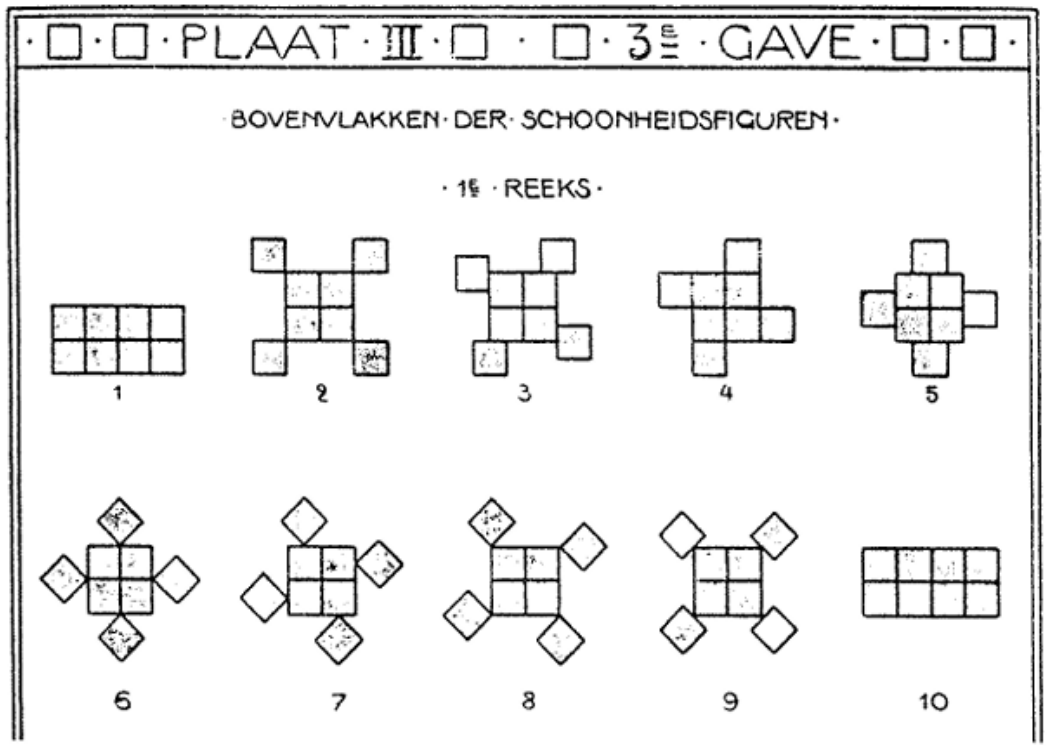
1968

Daarna verandering op verandering: verschuiving van declaratieve en procedurele kennis naar conceptuele en metacognitieve kennis … Euclides?



Nellie Verhoef (nellieverhoef@gmail.com)

Fröbel gaat vooraf aan het meetkundeonderwijs in 1924



figuur B1.2: Analyse-synthese door middel van symmetrische transformaties (Wierts van Coehoorn-Stout, 1914)



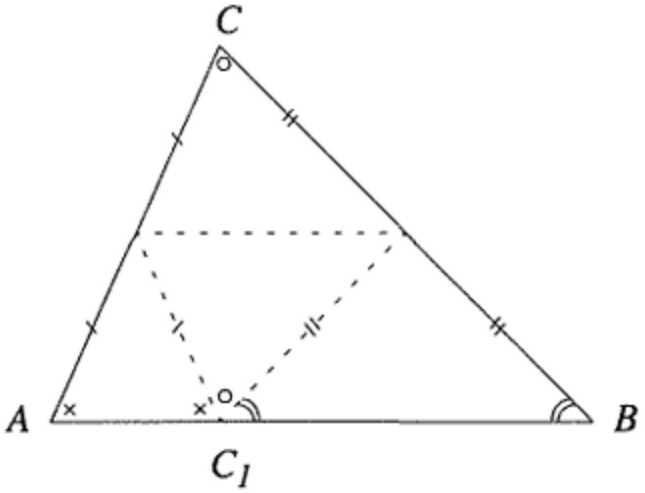


A1: Vrije oriëntatie van begrippen door middel van activiteiten.
A2: Van concreet handelen via schematisering naar abstractie.
A3: Globaal inzicht in structuren als uitgangspunt voor verdere begripsvorming.
A4: Veelzijdige inbedding van het leren van begrippen en relaties.
A5: Historische ontwikkeling als uitgangspunt voor de individuele ontwikkeling (genetisch principe).
A6: Gelijktijdige ontwikkeling van intellectuele en affectieve faculteiten.

M1: Aanschouwelijkheid als grondslag.
M2: Start in de driedimensionale ruimte.
M3: Vorming van intuïtieve noties van meetkundige begrippen aan concrete objecten.
M4: Gebruikmaking van bewegingsmeetkunde (verschuiven, draaien en dergelijke).
M5: Uitbuiting van natuurlijke symmetrieën.
M6: Ordenen en klassificeren als natuurlijk verschijnsel.
M7: Zelf construeren van patronen, bouwsels en figuren.
M8: Omstructureren van bouwsels en vlakke figuren.
M9: Eenvoudige redeneringen en 'bewijzen'.

Felix Klein volgt in 1925: leren door te doen





figuur B2.3: Vouwbewijs voor de som van de hoeken van een driehoek

- streven om de meetkunde van het euclidische harnas te ontdoen
- aanschouwing als grondslag voor het allereerste meetkundeonderwijs
- vervlechting van planimetrie en stereometrie
- langzaam vervlechten met (eenvoudige) logische redeneringen
- toepassing van het genetische principe
- belang van toegepaste (land)meetkunde
- gebruik van transformatiemeetkunde
- eenheid van de meetkunde door middel van de groepentheorie.



Nellie Verhoef (nellieverhoef@gmail.com)

Actueel in de beginjaren:

beschrijvende meetkunde


LEERBOEK DER BESCHRIJVENDE MEETKUNDE

DOOR

Dr. J. G. RUTGERS

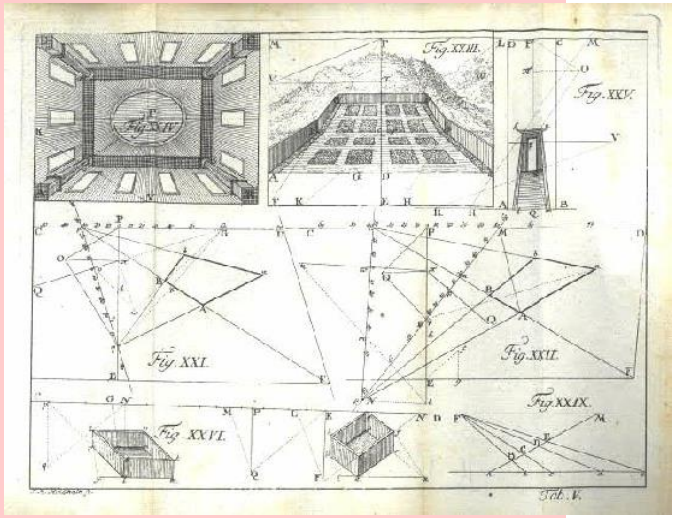
HOOGLEERAAR AAN DE TECHNISCHE HOOGESCHOOL TE DELFT

EERSTE DEEL
DE RECHTHOEKIGE PROJECTIE

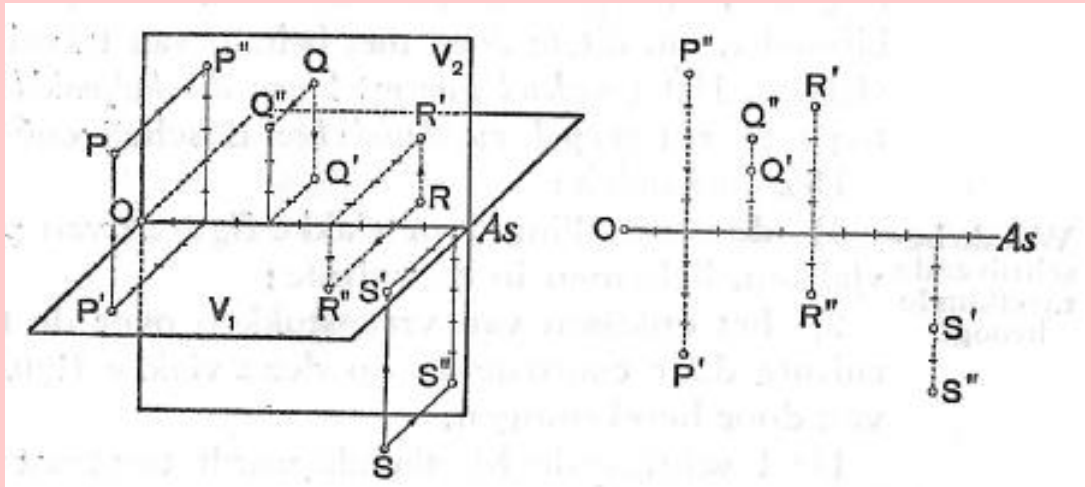
EERSTE STUK
TOT EN MET DOOR PLATTE VLAKKEN BEGRENSDE LICHAMEN (177 FIGUREN IN DEN TEKST EN 158 OPGAVEN)

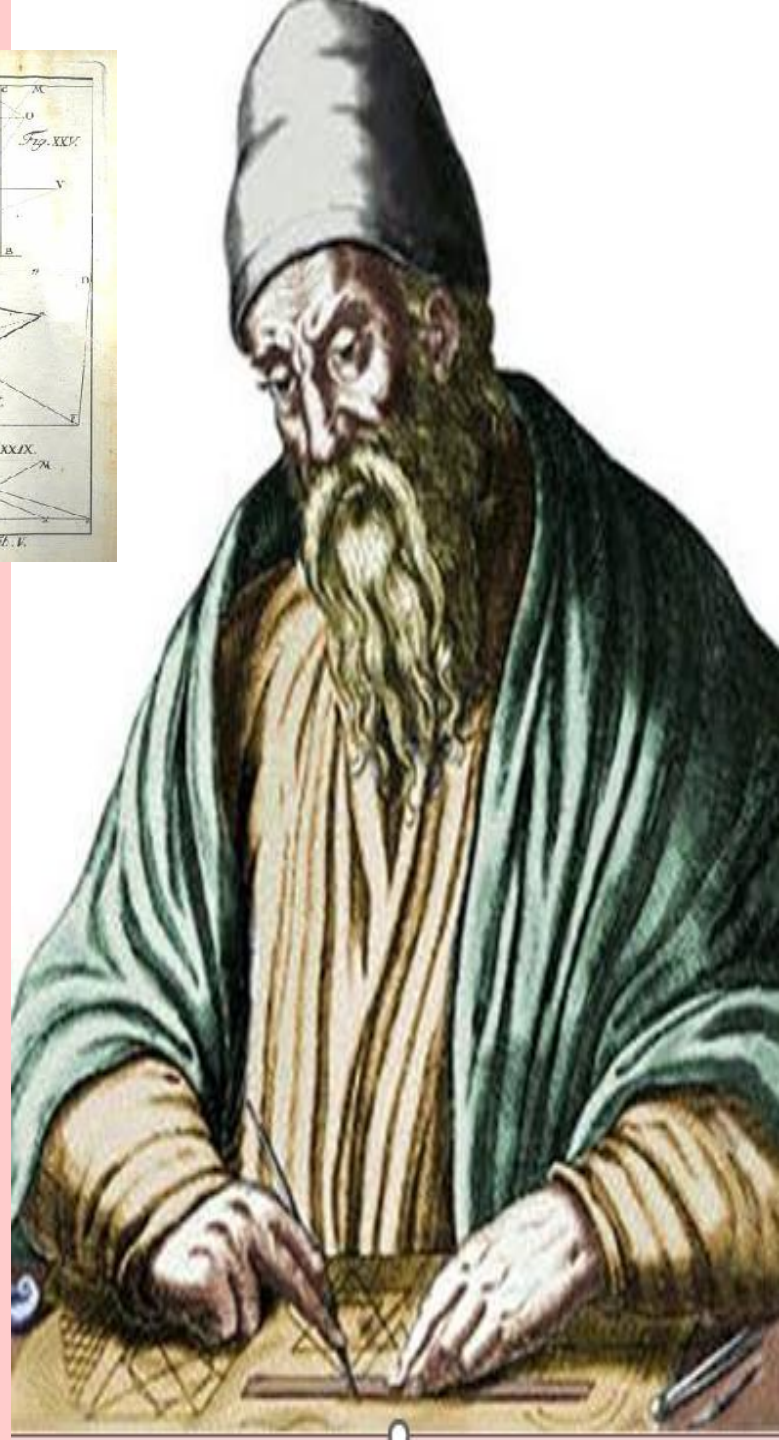
P. NOORDHOFF N.V. – 1933 – GRONINGEN-BATAVIA

f 1.75



Grondprincipes





Euclides is prominent aanwezig

Nellie Verhoef (nellieverhoef@gmail.com)

Veel bewijzen en constructies

Opgaven.

178. Van △ ABC is a = 14, b = 13 en c = 15.
Bereken R en r. *Bereken ook r_a, r_b en r_c.

179. Van △ ABC is a = 12, b = 5 en c = 13.
Bereken R en r. *Bereken ook r_a, r_b en r_c.

***180.** Bewijs dat $\frac{1}{r_a} + \frac{1}{r_b} + \frac{1}{r_c} = \frac{1}{r}$

***181.** Bewijs, dat $O = \sqrt{r\, r_a\, r_b\, r_c}$.

Enige constructies.

Construeer een △ ABC, als gegeven zijn:

182. c, ∠A en r.
183. c, h_a en r.
184. c, R en ∠ A.
***185.** ∠C, r en r_c.
***186.** de omtrek, ∠C en r.
***187.** de omtrek, ∠C en h_a.

188. De hoogtelijnen van een driehoek worden verlengd tot ze de omgeschreven cirkel ontmoeten. Bewijs, dat twee bogen aan weerszijden van een hoekpunt even lang zijn.





MOET HET MEETKUNDE-ONDERWIJS

Er ontstaat onrust …

GEWIJZIGD WORDEN ?

Verschil van mening Dijksterhuis – Ehrenfest-Afanassjewa (1925)

***Bijvoegsel op het Nieuw Tijdschrift voor Wiskunde* I (1924-25)**



Het meningsverschil gaat over het idee dat meetkundig inzicht niet kan bestaan zonder voorafgaande ontwikkeling van het voorstellingsvermogen, intuïtie. Dijksterhuis eindigt als volgt:

… leerlingen in te leiden in het gebouw der Euclidische Meetkunde, een gebouw van zoo groote schoonheid en, ondanks de hier en daar wat wankele fundamenten, van zoo harmonische soliditeit, dat het iederen mensch geestelijk goed moet doen, daarin eenigen tijd te verwijlen.



Nog geen directe invloed op het onderwijs

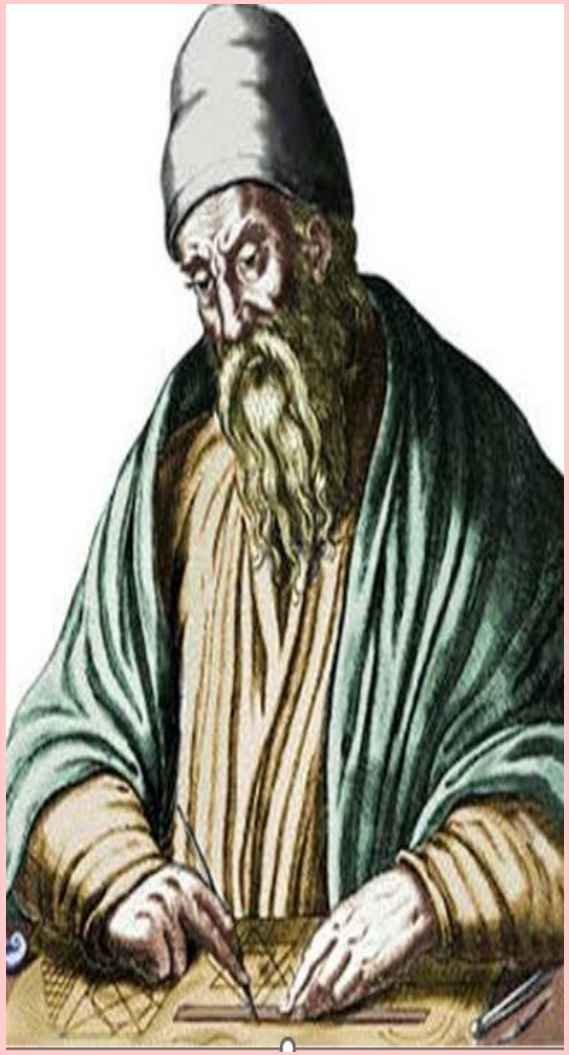


Gaat Euclides eraan?

Nellie Verhoef (nellieverhoef@gmail.com)

Er wordt wel doorgewerkt….

Beth probeert in 1938 na te gaan of de uitkomsten van denkpsychologisch onderzoek aangewend kunnen worden voor het verbeteren van het meetkundeonderwijs aan twaalfjarigen.



Na de oorlog:

Vredenduin, zijn de opvattingen over aanschouwelijkheid bij meetkunde, en het feit dat bewijzen nimmer mogen berusten op wat figuren laten zien, niet strijdig?

Bunt, ‘regressieve bewijzen’: bewijzen waarbij je achteraan begint, bij het ‘te bewijzen’ (Euclides, 1946).

W.J. Bos (1954) (bekend van de methode ‘Bos en Lepoeter’) analyseert het leren van meetkunde en gaat in op het omstructureren – verandering van invalshoek.

De vormende waarde wordt overgenomen door die van de praktische waarde

Pierre van Hiele (1909-2010) en Dina Van Hiele – Geldof (1911-1958), dissertaties 1957 – promotoren Freudenthal en Langeveld (pedagoog)

Proefschrift ‘De problematiek van het inzicht’
niveautheorie over inzicht in wiskunde en denkniveaus



Proefschrift ‘De didactiek van de meetkunde in de eerste klas van het V.H.M.O.’
didactiek om van aanschouwelijk tot abstract denken te raken

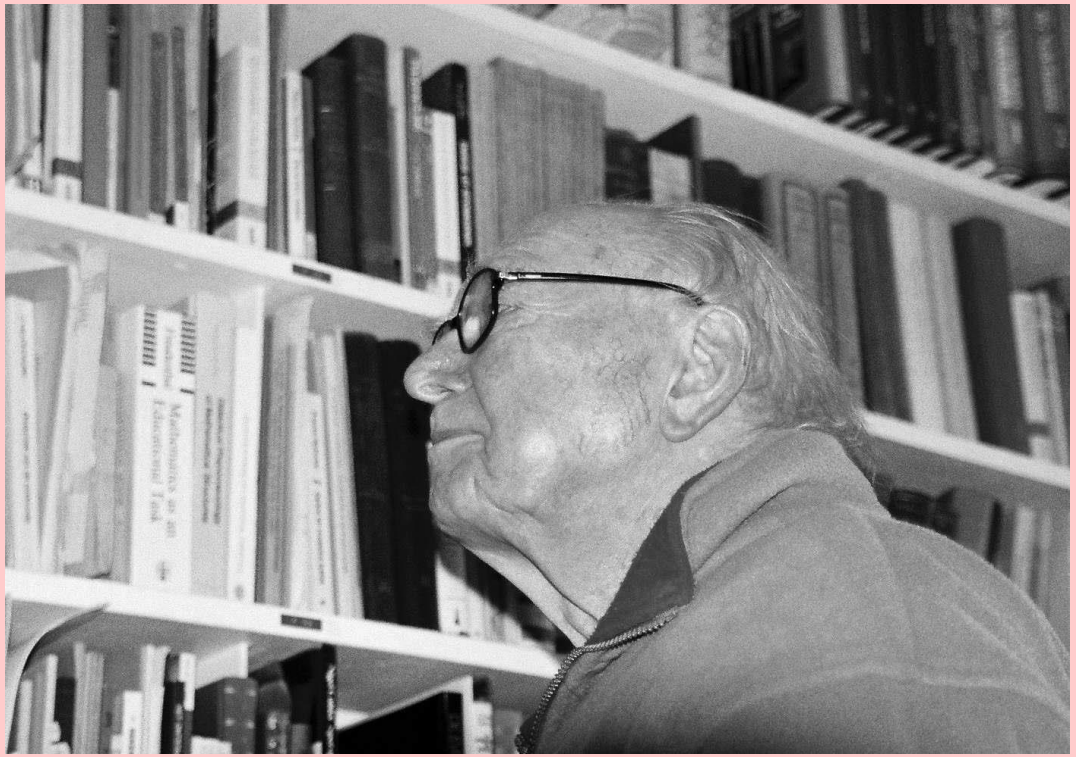


En Euclides dan?

Nellie Verhoef (nellieverhoef@gmail.com)

Invloed op het onderwijs: Pierre van Hiele (1909-2010)







Niveaus van denken (Van Hiele), het leren van meetkundige begrippen:

1. Grondniveau – intuïtief
2. Eerste niveau – beschrijvend (herkenning eigenschappen)
3. Tweede niveau – informeel deductief (verband tussen eigenschappen)
4. Derde niveau – theoretisch deductief (karakter van de verbanden)

Nellie Verhoef (nellieverhoef@gmail.com)

Freudenthal in discussie met mevrouw Ehrenfest (1951)



Juist de wiskunde acht mevrouw Ehrenfest zo geschikt voor het leren denken vanwege de eenvoud van de stof.

Freudenthal meent dat het kritisch vermogen weliswaar door de wiskunde gekweekt wordt, maar slechts ten bate van de wiskunde zelf.

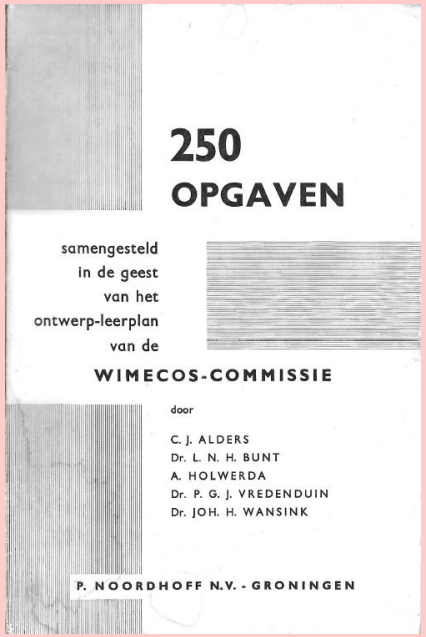




Nellie Verhoef (nellieverhoef@gmail.com)

De wimecos-commissie: vereniging van leraren wiskunde, mechanica en cosmografie

'Ten aanzien van de meetkunde hebben we het criterium van het practisch nut niet vooropgesteld. Ook zonder diep in te gaan op de vraag, in hoeverre het meetkundig-onderwijs vormende waarde (b.v. voor de ontwikkeling van het denken of van ruimte-inzicht) bezit, hebben we, met het oog op de culturele betekenis van dit vak, gemeend, dat een scherpe breuk met de traditie niet verantwoord was. Het is de leidende bedoeling van het voorgestelde meetkunde-programma, om de leerling inzicht te geven in een logisch opgebouwd systeem, dat zekere afgerondheid bezit; omwegen en afdwalingen worden zoveel mogelijk vermeden.' (*Euclides* 28(5), p. 209) 1952



Vernieuwingsvoorstellen 1953

- de meetkunde wordt in de eerste klas intuïtief ingeleid
- trigonometrie wordt vereenvoudigd en bij de planimetrie ondergebracht; goniometrische vergelijkingen en functies gaan naar het bovenbouwprogramma
- analytische meetkunde wordt op de HBS-B ingevoerd
- beschrijvende meetkunde wordt geschrapt; slechts één constructiemethode (scheve parallelprojectie) wordt bij de stereometrie behandeld
- differentiaal- en integraalrekening wordt een verplicht onderdeel van de algebra
- statistiek wordt ingevoerd als nieuw vak.



Didactische oriëntatie voor wiskundeleraren deel I, Wansink (1966)

7. *Het bewijs uit Euclides' Elementen*

Van de talrijke bewijzen verdienen er twee onze bijzondere aandacht:

a. het metriekloze Griekse bewijs, dat we aantreffen als propositie 47 uit Boek I van Euclides' Elementen;
b. het traditionele, op gelijkvormigheid van driehoeken en op een lengtemetriek berustende bewijs uit de Nederlandse schoolboeken.

Beide berusten op eenzelfde hulpstelling, die we echter op twee manieren in woorden brengen:

a. het vierkant op een rechthoekszijde is gelijk aan de rechthoek die de hypotenusa en de projectie van die rechthoekszijde op de hypotenusa tot zijden heeft;
b. het kwadraat van een rechthoekszijde is gelijk aan het produkt van de projectie op de hypotenusa en de hypotenusa.

De Duitsers noemen deze hulpstelling de 'Kathetensatz'.
Voor het Griekse bewijs gaan we uit van de stelling:
als een parallellogram en een driehoek de basis gemeen hebben en tussen dezelfde twee evenwijdige lijnen liggen, dan is het oppervlak van het parallellogram het dubbele van het oppervlak van de driehoek.
Men vindt:

$$\left.\begin{aligned} \triangle DBA &= \tfrac{1}{2}\ \text{vh}\ BCED \\ \triangle CBF &= \tfrac{1}{2}\ \text{vh}\ HBFG \\ \triangle DBA &= \triangle CBF\ (\text{ZHZ}) \end{aligned}\right\} \Rightarrow \text{vh}\ BCED = \text{vh}\ HBFG.$$

Het traditionele bewijs uit onze schoolboeken verloopt als volgt: uit de gelijkvormigheid van de driehoeken CBD en ABC in fig. 23 volgt:

$$a : c = p : a,$$
dus $$a^2 = pc.$$

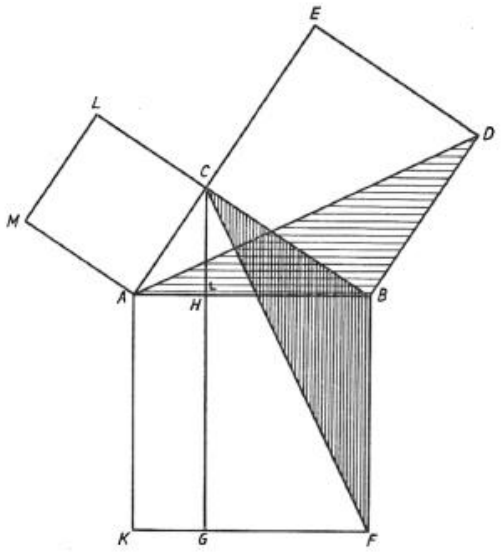


Fig. 22.

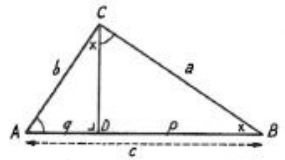


Fig. 23.

Met de hulpstelling bewijzen we nu de stelling van Pythagoras.
Griekse bewijs:

$$\begin{aligned} \text{vh}\ BCED &= \text{vh}\ BHGF \\ \text{vh}\ ACLM &= \text{vh}\ AHGK \quad + \\ \text{vk}\ BCED + \text{vk}\ ACLM &= \text{vk}\ ABFK \end{aligned}$$

Traditionele bewijs:

$$\begin{aligned} a^2 &= pc \\ b^2 &= qc \quad + \\ a^2 + b^2 &= (p+q)\,c \\ &= c^2 \end{aligned}$$



In 1959 vindt een internationale conferentie van de Organisatie voor Europese Economische Samenwerking (OECD) plaats in Royaumont: New thinking of school mathematics. In 1961 wordt de Nederlandse Commissie Modernisering Leerplan Wiskunde (CMLW) ingesteld.

Op deze conferentie sprak Dieudonné ook zijn befaamde 'A bas Euclide' uit: 'if the whole program I have in mind had to be summarised in one slogan it would be: Euclid must go!' (OEEC, 1961, p.35).

Het structuralistische denken in termen van verzamelingen, logica, relaties, functies en groepentheorie beheerste het inhoudelijke aspect van de conferentie.

Tegenbeweging via de oprichting van Wiskobas – Wiskivon (1969): de realiteit (concreet of gedacht) als bron voor nieuwe ontwerpen gebruikt kan worden.

Weg met Euclides??



Mammoetwet 1968

invloed New Math-beweging

a oriëntatie in ruimte en vlak diende te blijven bestaan
b (schijn)-axiomatiek diende vermeden te worden
c een intuïtieve inleiding had de voorkeur
d de oude planimetrie was afgezworen
e de meetkunde diende een unificerend karakter te krijgen door middel van transformaties
f deductie bleef een belangrijk element
g einddoel was een gearitmetiseerde meetkunde.

1. Invoering HAVO en VWO, en ook de MAVO
2. Wiskunde I en II

Er ontstonden direct nieuwe methodes:
Van A tot Z (Van Hiele, Boermeester) en Moderne Wiskunde (Krooshof)



Nellie Verhoef (nellieverhoef@gmail.com)

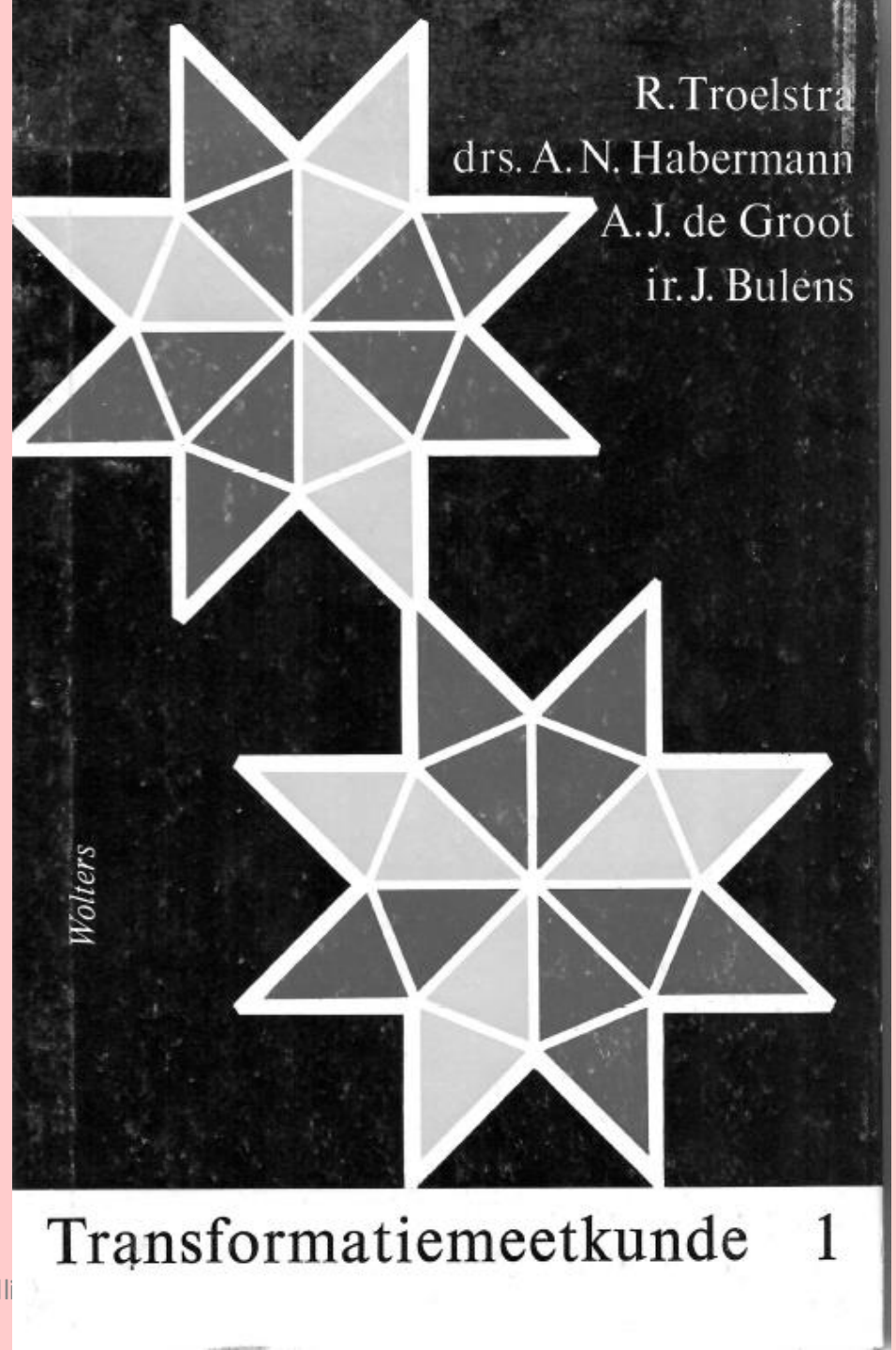
Transformatiemeetkunde, vervanger van klassieke meetkunde

Een breuk met Euclides, axiomatische aanpak:

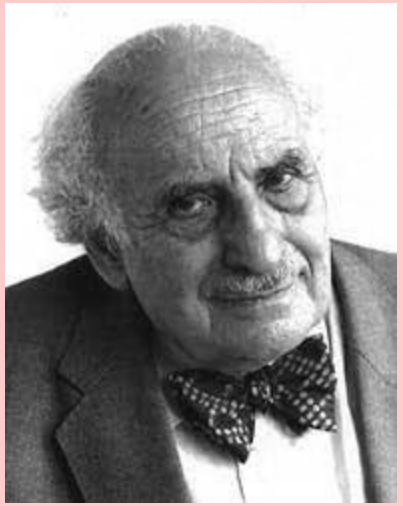
'1. Het spiegelbeeld van een rechte lijn is weer een rechte lijn.
2. Lijnstuk en beeldlijnstuk zijn even lang.
3. Bij spiegeling zijn hoek en beeldhoek even groot.
4. Als van een vierhoek drie hoeken recht zijn, dan is ook de vierde hoek recht.'

Construeer een trapezium ABCD (AB // CD) als gegeven zijn:

9. de vier zijden
10. de twee evenwijdige zijden, een opstaande zijde en een diagonaal;
11. de twee evenwijdige zijden en de twee diagonalen.







Invloed Freudenthal: ‘realistisch wiskundeonderwijs’ (RME)
(wiskunde als menselijke activiteit),
ook het stimuleren van het volgen van intuïtie.



De (on)navolgbare Freudenthal!

“Zijn didactisch buigzame *one-liners* als ‘wiskunde als menselijke activiteit’, ‘wiskunde leren door geleide (her)uitvinding’, ‘wiskunde leren in een rijke context’ en zo meer, laten zich makkelijk naar eigen goeddunken invullen.” (Adri Treffers, Wiskrant 2005)



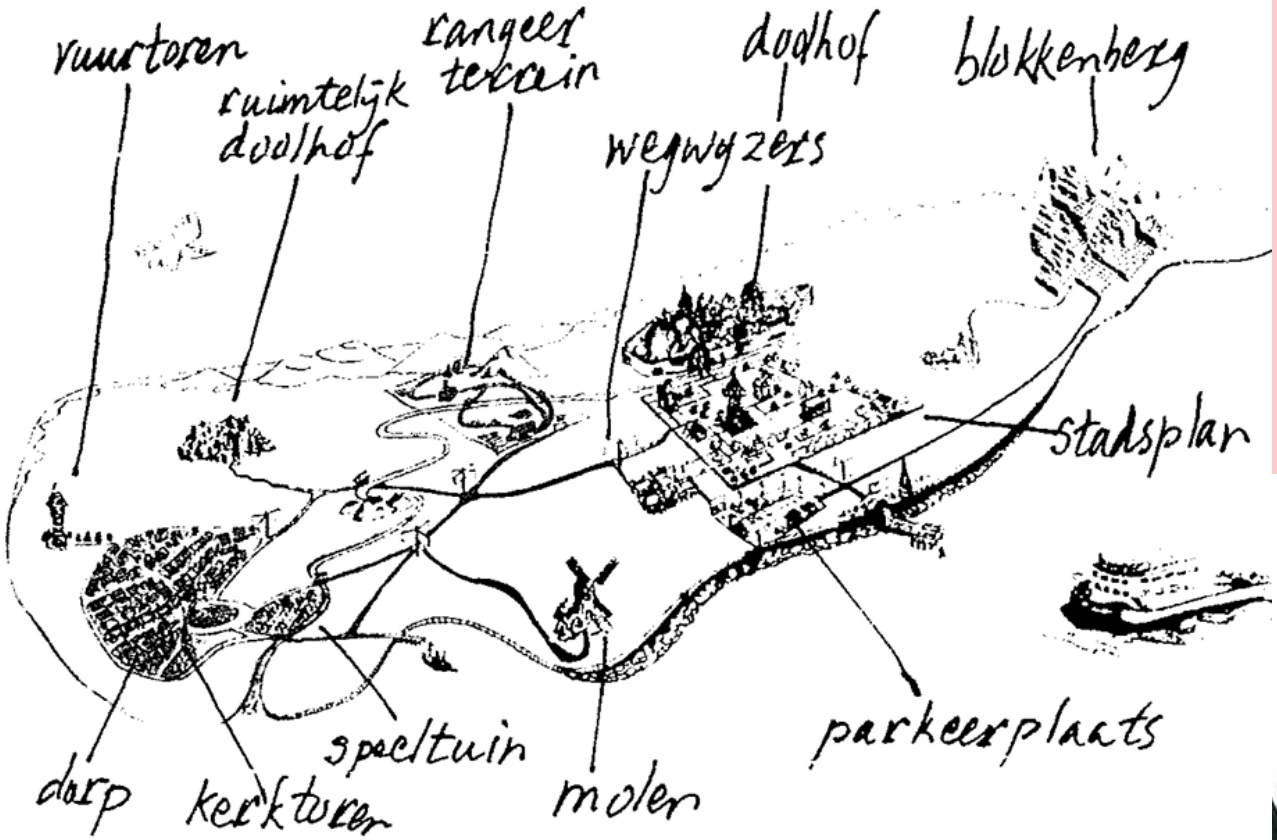
Het IOWO (1971 - 1981) beïnvloedt het wiskundeonderwijs,
er komen pakketjes voor de onderbouw:

Nellie Verhoef (nellieverhoef@gmail.com)



Didactische principes van Freudenthal (1973-1975)

- het principe van de geleide herontdekking (reïnvention)
- het principe van de eigen activiteit
- het principe van concreet handelen (vouwen, plakken, knippen...)
- het noodzakelijke nulde niveau van Van Hiele (vrije oriëntatie)
- uitstel van formele deductie
- de 'waarom'-vraag als kern van meetkundige activiteiten
- het belang van lijnsymmetrie
- niet uitgaan van affiene meetkunde.



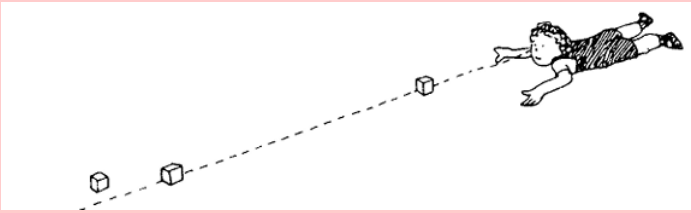
figuur C2.4: Meetkundige activiteiten op Waterland



Nellie Verhoef (nellieverhoef@gmail.com)

IOWO - pakketjes

Kijkmeetkunde (1975)



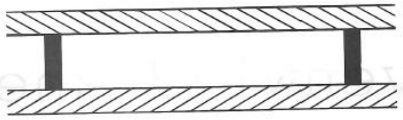
STEEDS KAARSRECHT DOOR

➢ 60. Nederland uit de lucht gezien.



De sloten lopen ook naast de foto nog een heel stuk kaarsrecht door. Komen ze dan ergens dichter naar elkaar?

➢ 61. Twee lange balken, op afstand gehouden door twee zwarte balkjes. Stel je voor: de gestreepte balken lopen links en rechts nog verder door. Aan welke kant raken ze elkaar?



Laat je niet bedriegen. Meet het na! Wat kun je daar het best voor meten?

VERDWIJNEN IN DE VERTE

➢ 125.



Spoorrails moeten evenwijdig lopen.
Waarom?

Maar op de foto lijkt dat dan nergens naar!
Zijn alle dwarsbalken in *werkelijkheid* wel even lang?

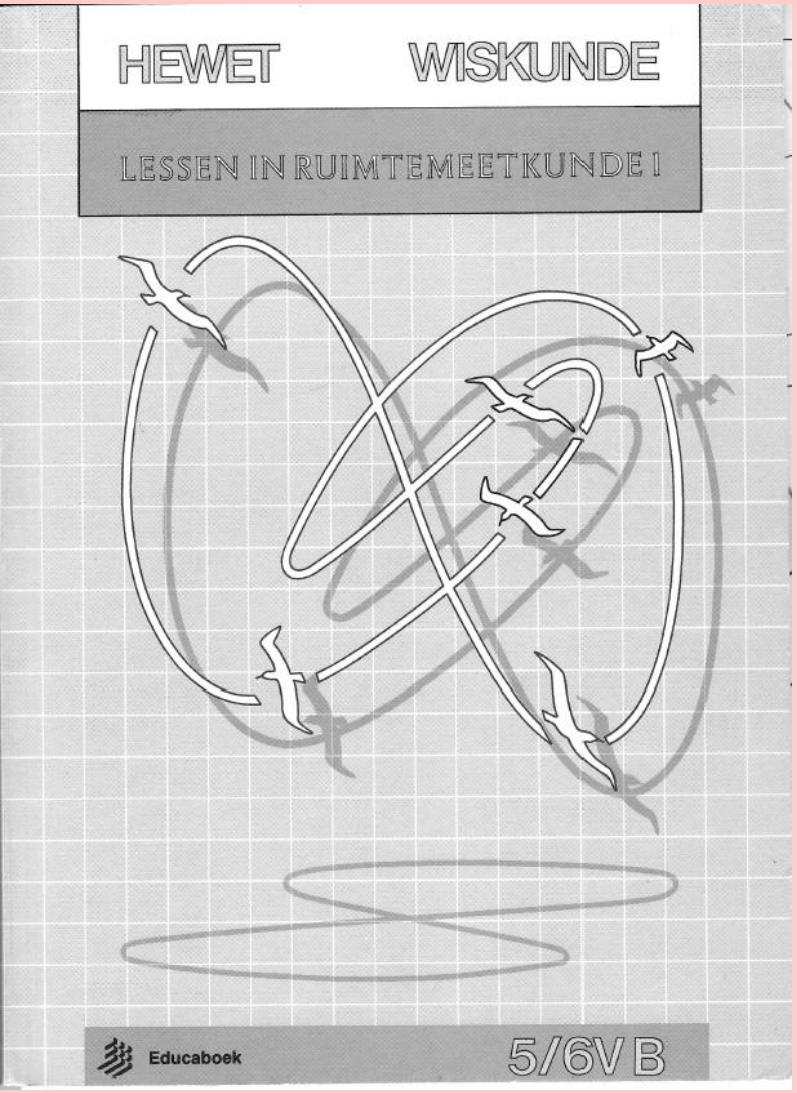
➢ 126. In werkelijkheid zijn er nog meer lijnen met de spoorstaven evenwijdig. Trek die lijnen op de foto eens wat verder door in het mistige midden. Wat kun je nu heel duidelijk aan al die lijnen zien?

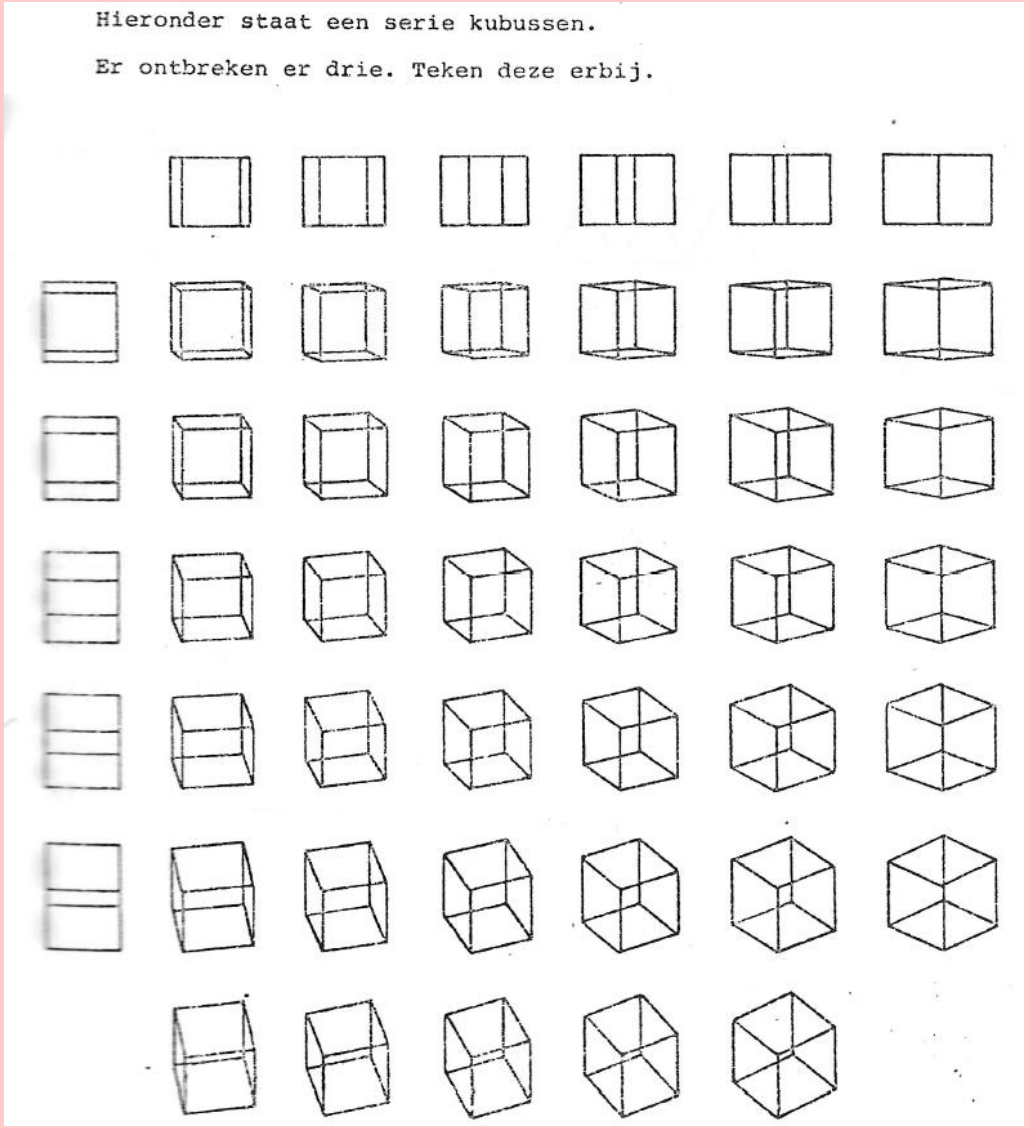
➢ 127. Op de volgende bladzijde zie je het begin van een gang getekend. Je ziet twee gelijke stukken. Maar de gang is nog niet af: teken zelf de twee volgende stukken erbij. Begin met de belangrijkste lijnen. Zorg ook dat het patroon in de vloer mooi doorloopt in de volgende stukken gang.



Nellie Verhoef (nellieverhoef@gmail.com)

Invloed op de bovenbouw: HEWET en HAWEX
landelijke nascholing docenten vo



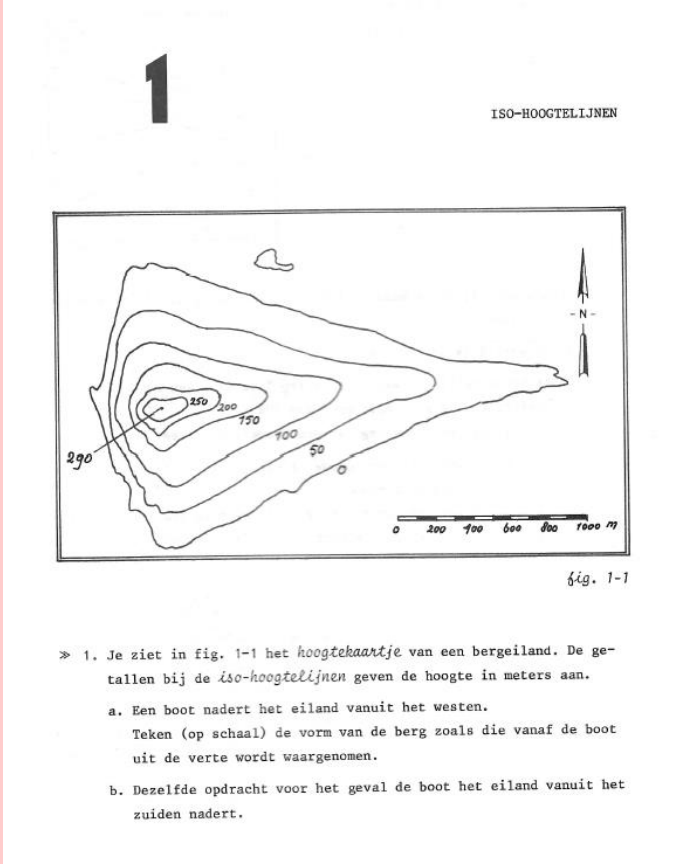




Nellie Verhoef (nellieverhoef@gmail.com)

Meer context, maar ook: projecties, perspectief, krommen in de ruimte, spiegelingen, rotaties, …




1

ISO-HOOGTELIJNEN

fig. 1-1

» 1. Je ziet in fig. 1-1 het *hoogtekaartje* van een bergeiland. De getallen bij de *iso-hoogtelijnen* geven de hoogte in meters aan.

a. Een boot nadert het eiland vanuit het westen.
Teken (op schaal) de vorm van de berg zoals die vanaf de boot uit de verte wordt waargenomen.

b. Dezelfde opdracht voor het geval de boot het eiland vanuit het zuiden nadert.

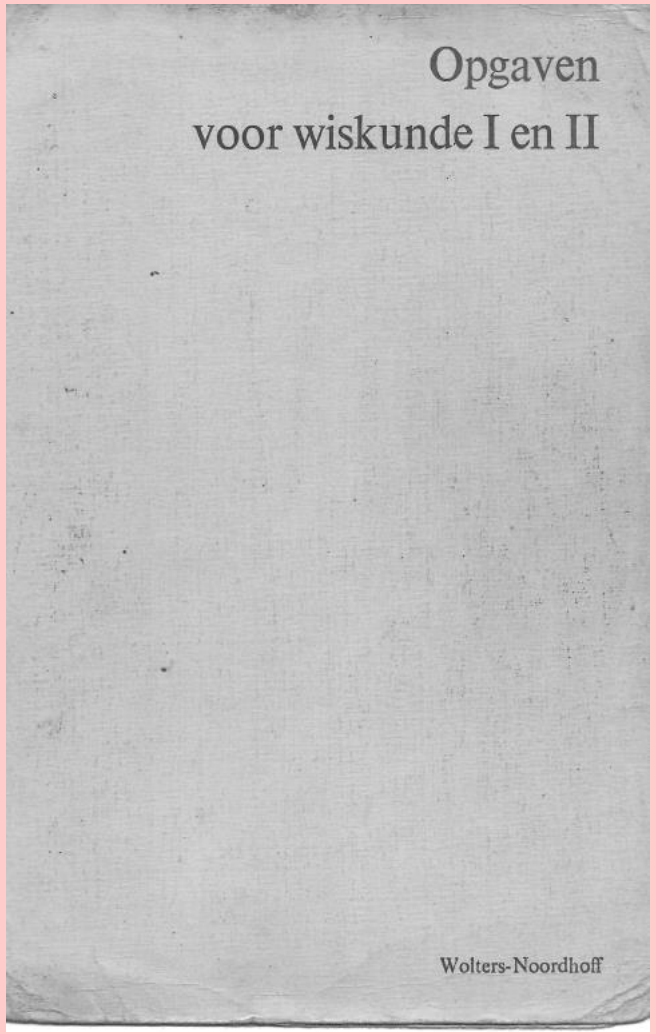


Speelt Euclides nog een rol?

Nellie Verhoef (nellieverhoef@gmail.com)

Invloed New Math: vectormeetkunde, wiskunde II (1968-1985) – de weg naar lineaire algebra

De ontwikkeling van het ruimtelijk inzicht wordt steeds meer vergeten.



2.4 Ten opzichte van een orthonormaal assenstelsel in R^3 zijn gegeven de plaatsvectoren:

$\overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix}0\\a\\0\end{pmatrix}$; $\overrightarrow{OC} = \begin{pmatrix}a\\0\\0\end{pmatrix}$; $\overrightarrow{OD} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$ en $\overrightarrow{OH} = \begin{pmatrix}0\\0\\a\end{pmatrix}$. $(a \in \mathbb{R}^+)$.

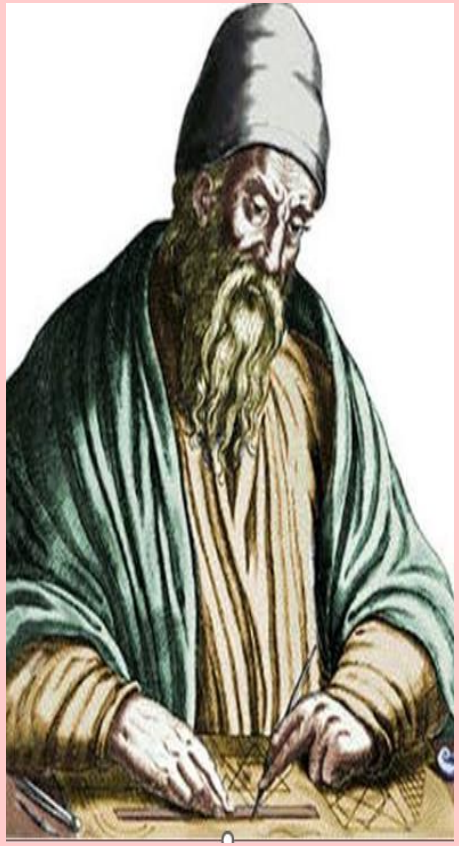
De punten A, C, D en H zijn hoekpunten van de kubus $\begin{matrix}EFGH\\ABCD\end{matrix}$.

a. Bereken de plaatsvectoren van de andere hoekpunten.
b. Geef een vectorvoorstelling van de lijn AG.
c. Geef een vectorvoorstelling van het vlak door B, D en E.
d. Bewijs: AG is loodrecht op het vlak BDE.
e. Bereken $\overrightarrow{OP}$ en $\overrightarrow{OQ}$ als P op EB en Q op HF ligt, terwijl $PQ \perp EB$ en $PQ \perp HF$.
f. Teken in de gegeven kubus de puntverzamelingen:

1. $\bar{x} = \begin{pmatrix}a\\0\\0\end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}$

2. $\bar{x} = \begin{pmatrix}0\\0\\a\end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}$

3. $\bar{x} = \begin{pmatrix}a\\0\\0\end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} + \mu\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$.



Nellie Verhoef (nellieverhoef@gmail.com)

Wiskunde A en B – terugkeer vlakke meetkunde in 1993!

Profielen 1998-2006 (introductie Tweede Fase, studiehuis): C&M, E&M, N&G en N&T

Wiskunde A12, B12 (vernieuwing: nadruk op conceptueel begrip)

In 2010: wiskunde A, B, C en D nieuwe stijl…, integratie ICT, kritisch denken, samenwerken, ..

De rol van Euclides is zeker niet weggevaagd,
maar wordt (bewust?) op de achtergrond gezet.



Nellie Verhoef (nellieverhoef@gmail.com)

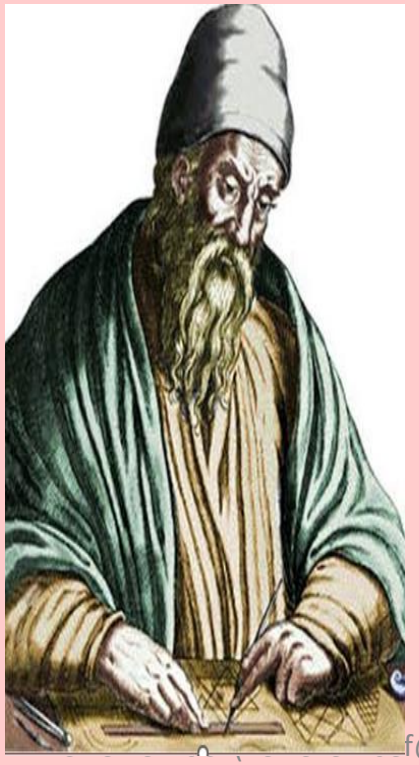
WORKSHOP

Kies opgave(n), uitwerking(en) in geval van nood!

Relatief veel stereometrie, vanwege de bovenbouw…

Hier gaat het om:








Hoe zullen de opgaven er over 100 jaar uitzien, Euclides vindbaar?







Nellie Verhoef (nellieverhoef@gmail.com)