KU LEUVEN

Getallensystemen in de moderne wiskunde in België

Wendy Goemans

Symposium Werkgroep Geschiedenis

23 September 2023

Inleiding

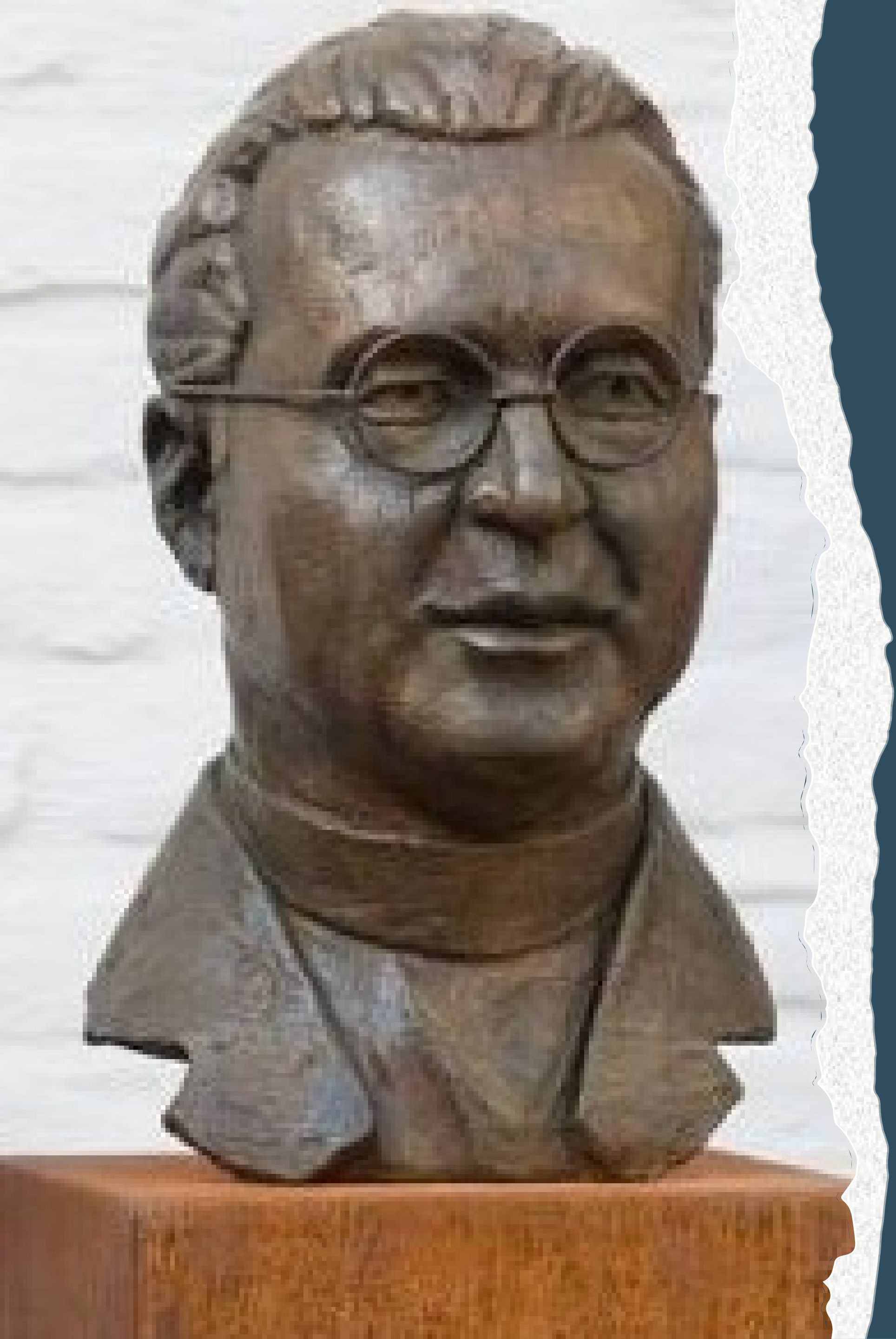
- Getallensysteem met basis leidt tot getallen
- Welke verschillende getallensystemen werden gebruikt
  - vlak voor de moderne wiskunde? Georges Lemaître en Georges De Witte
  - tijdens de moderne wiskunde? Georges Papy en Frédérique Papy-Lenger
- Hoe werden getallenverzamelingen in de moderne wiskunde ingevoerd?

Overzicht van de lezing

- Lemaître’s getallen
- De Witte’s getallen
- Papy’s minicomputer
- Frédérique Papy-Lenger en de minicomputer
- Getallenverzamelingen in Papy’s Mathématique Moderne
- Een korte blik naar de New Math in de VS

Vóór Lemaître’s getallen

- Anton Glaser *History of binary and other nondecimal numeration*
  - 1971 herziene uitgave 1981
  - Gebaseerd op het doctoraatswerk van de auteur *History of numeration systems*
- Start even voor Leibniz in de tweede helft van de 16de eeuw en loopt tot aan het computertijdperk in de 20ste eeuw (1946)
  - Inclusief toepassingen in informatica
  - Inclusief ‘hedendaagse’ literatuur voor leerkrachten
- Historische bronnen
  - Thomas Hariot, Simon Stevin, Francis Bacon, Claude-Gaspar Bachet, Blaise Pascal, Juan Caramuel y Lobkowitz, Erhard Weigel, Joshua Jordaine, Gottfried Wilhelm Leibniz (brieven, artikels, correspondentie), …, Carl Friedrich Gauss, ….



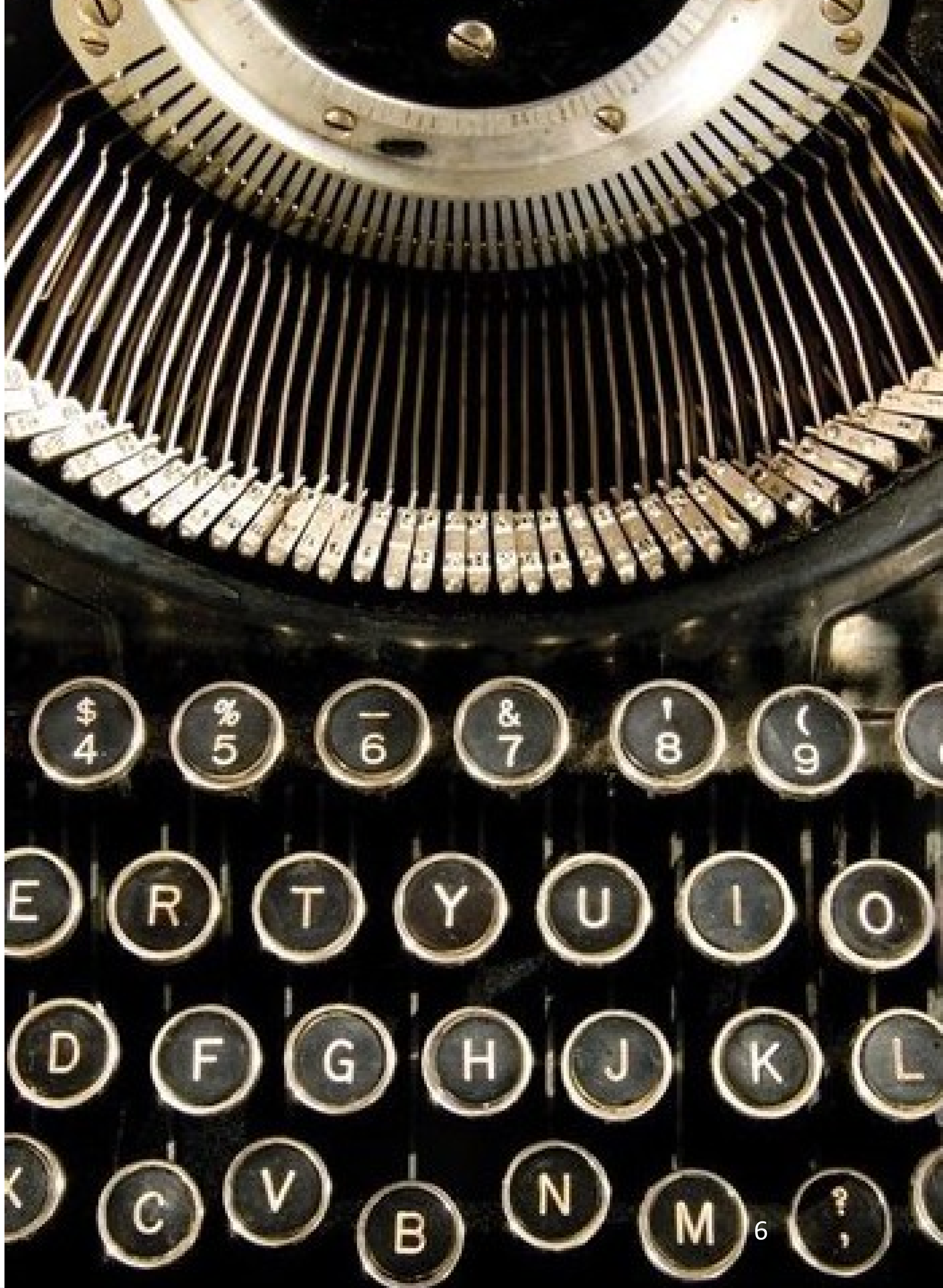
Monseigneur Georges Lemaître

- 17 juli 1894 - 20 juni 1966
- Belgische priester
- Wiskundige, natuurkundige, astronoom, kosmoloog
- Professor van de Franstalige afdeling van de toen nog unitaire Université Catholique de Louvain – Katholieke Universiteit te Leuven
- “Vader van de oerknaltheorie”

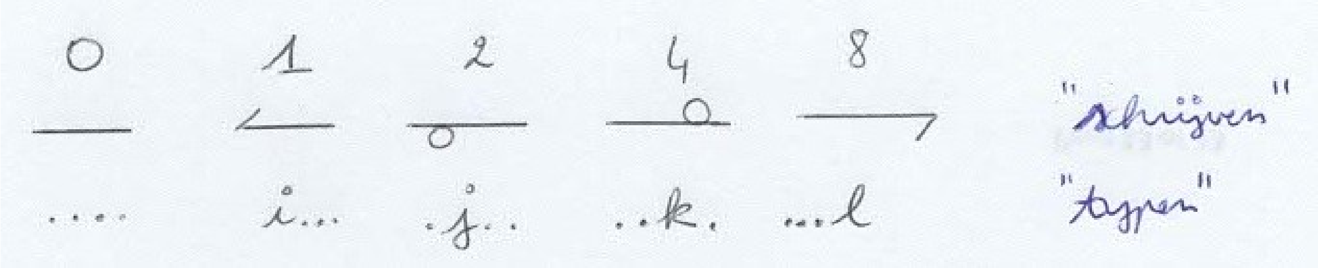
- Bron: website KU Leuven

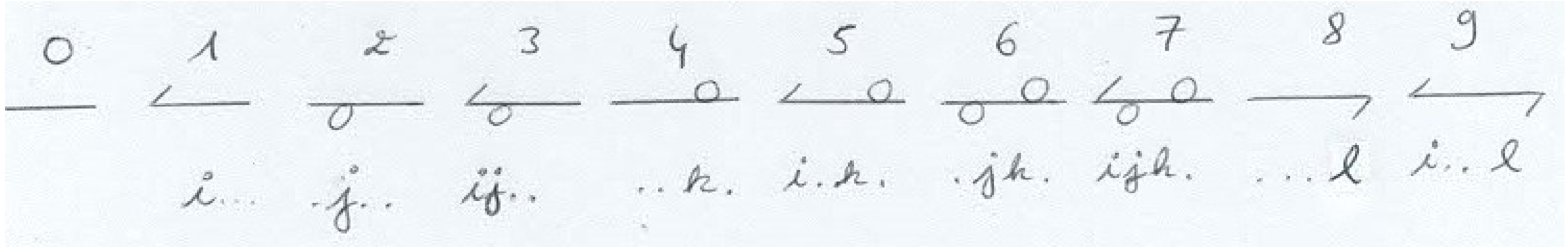
Lemaître's getallen

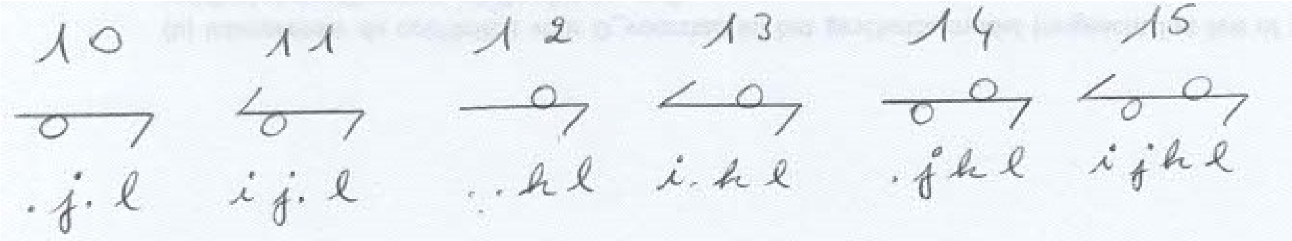
- Doel: moeiteloos rekenen
- 'Machinematig' rekenen
- Schrijven of op een typmachine



Lemaître's getallen



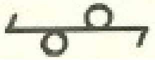




Lemaître's getallen

I. LES SEIZE CHIFFRES.

Le chiffre complet est formé de quatre «digites» désignées par les lettres : i j k l , il s'écrit:



Les neuf premiers nombres s'écrivent donc :

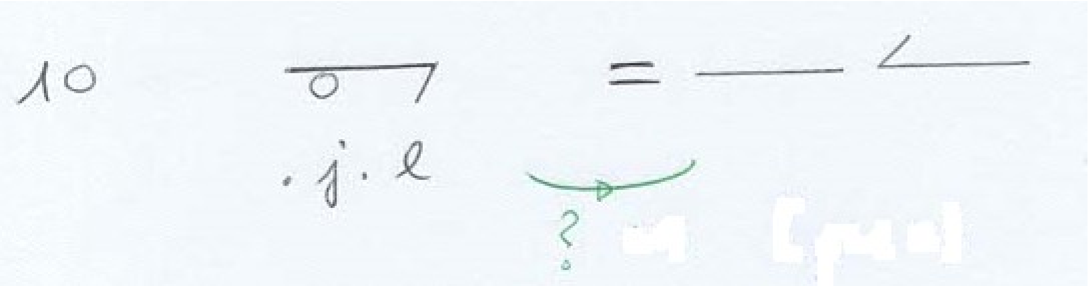
ou :

i j ij k i k jk ijk li l

Bron: Georges Lemaître (1954) *Calculons sans fatigue* Ed. Nauwelaerts Louvain (p6 en p8)

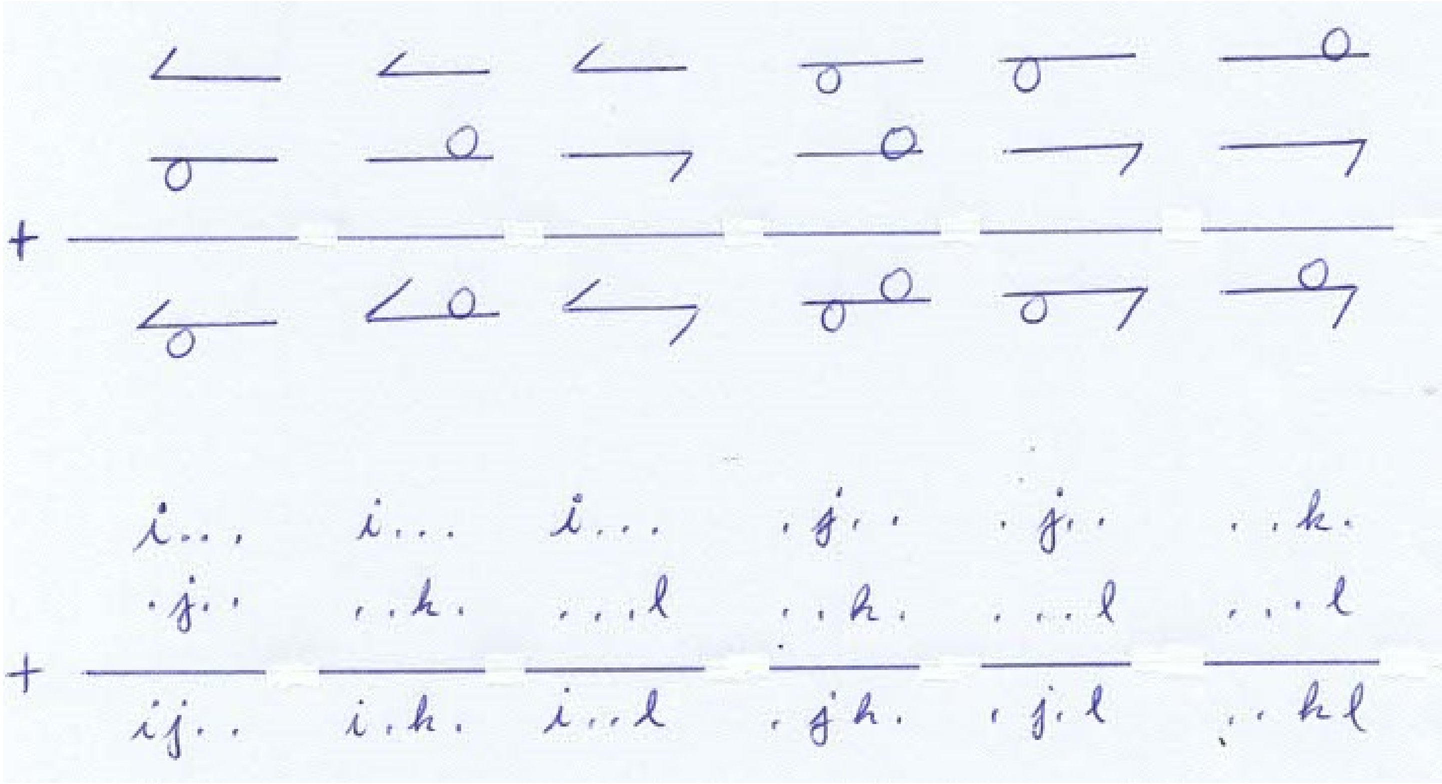
Lemaître’s getallen: hybride systeem

- Hybride systeem: machten van twee (binair getallensysteem) en posities van het decimaal getallensysteem, maar deze laatste van voor naar achter

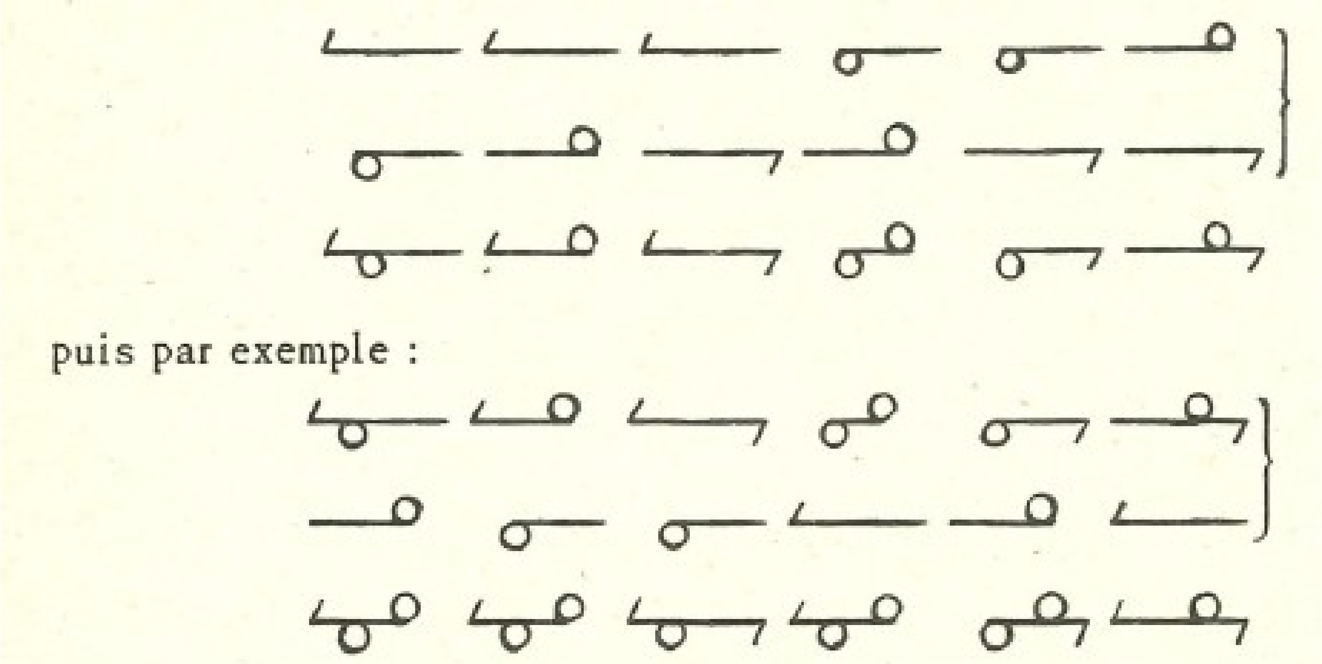


Lemaître's getallen: basis van het optellen

- Optellen van twee getallen als er geen gelijke cijfers in voorkomen



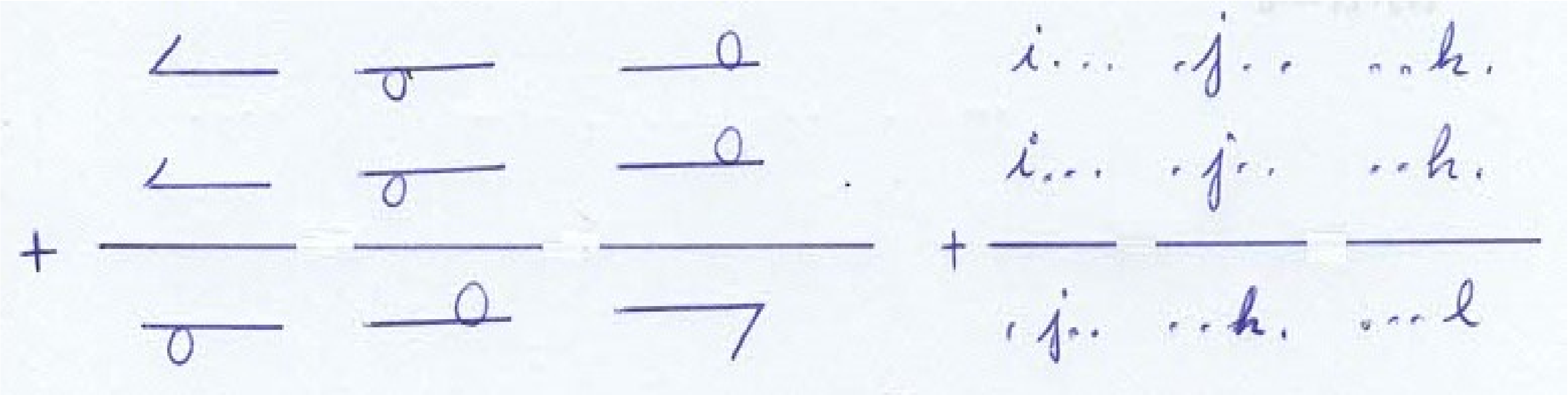
Lemaître’s getallen: basis van het optellen



Bron: Georges Lemaître (1954) *Calculons sans fatigue* Ed. Nauwelaerts Louvain (p9)

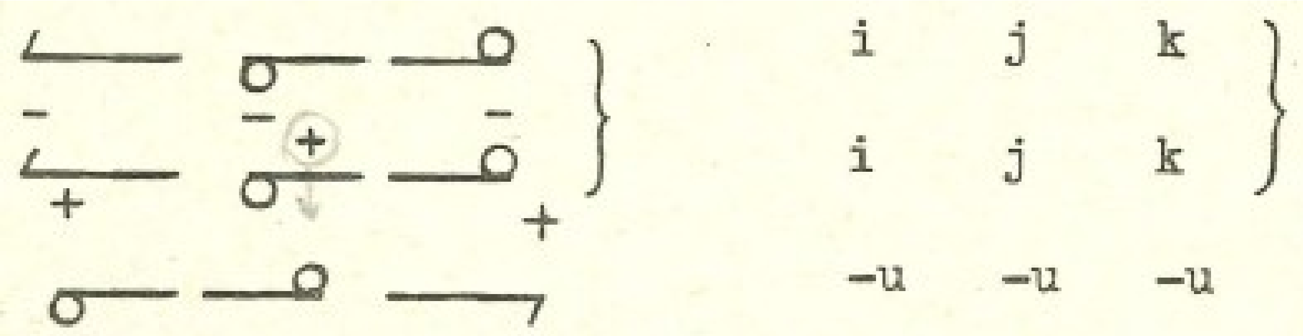
Lemaître’s getallen: basis van het optellen

- Optellen van twee getallen als er gelijke cijfers in voorkomen: overdragen



Lemaître’s getallen: basis van het optellen

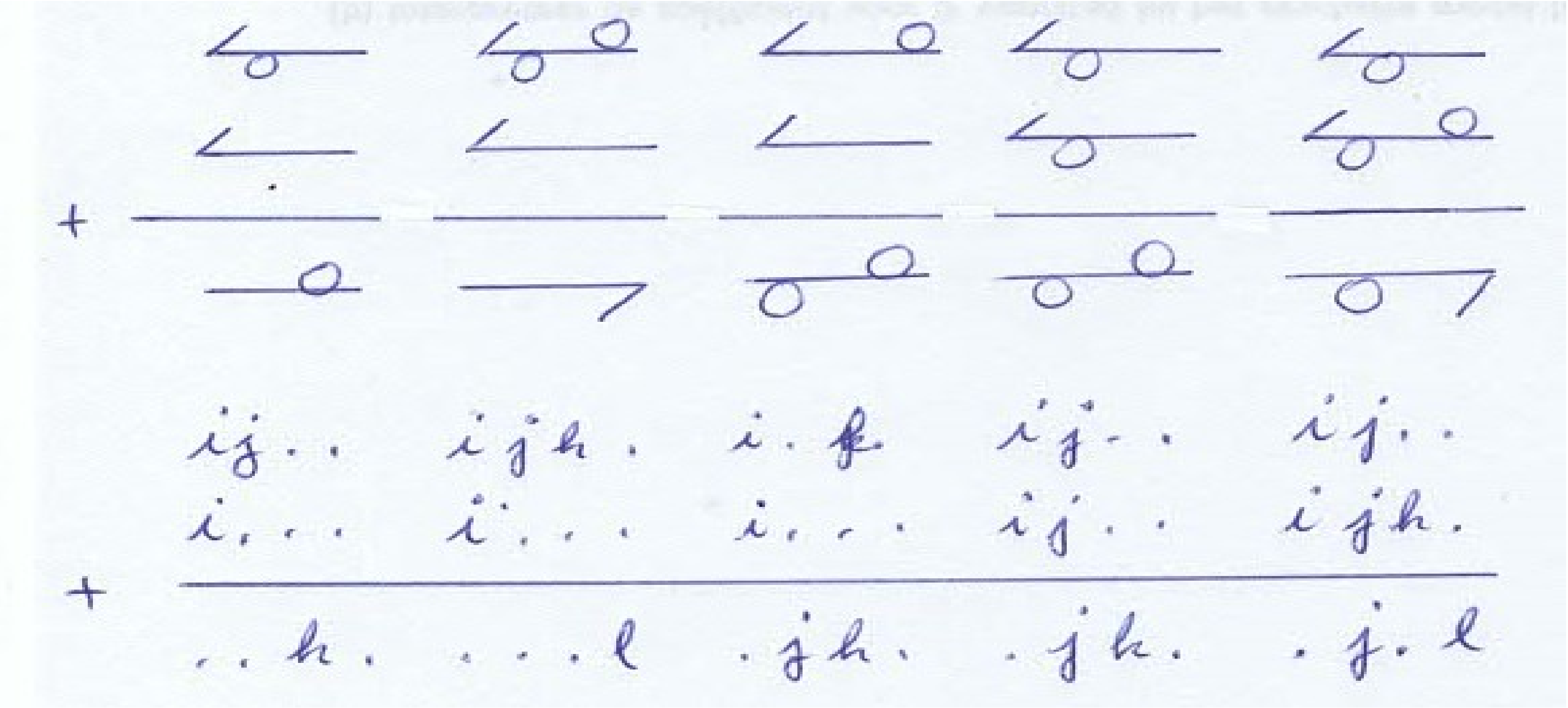
- Optellen van twee getallen als er gelijke cijfers in voorkomen: ‘le report’



Bron: Georges Lemaître (1954) *Calculons sans fatigue* Ed. Nauwelaerts Louvain (p10)

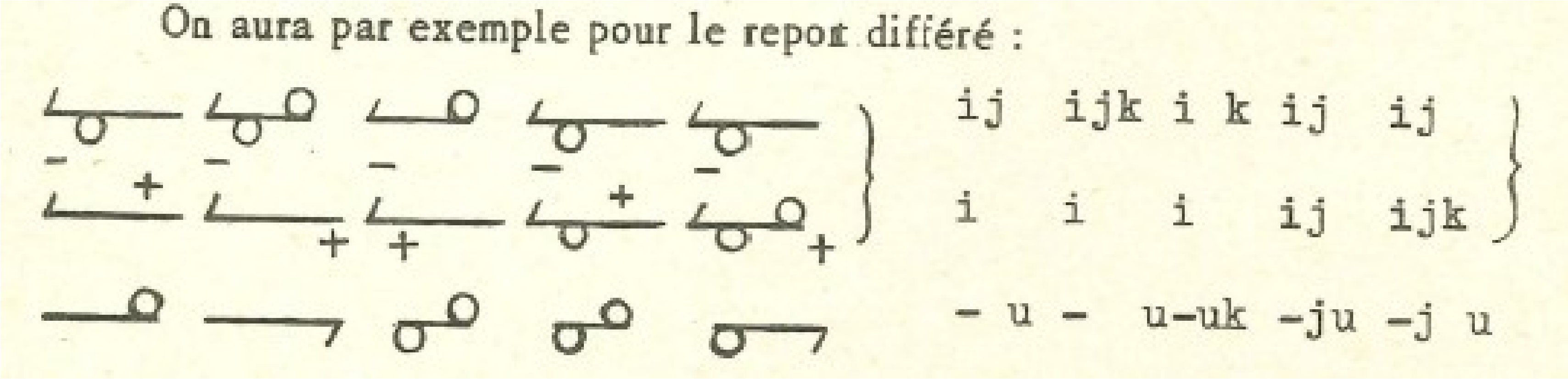
Lemaître's getallen: basis van het optellen

- Optellen van twee getallen als er gelijke cijfers in voorkomen: uitgesteld overdragen



Lemaître's getallen: basis van het optellen

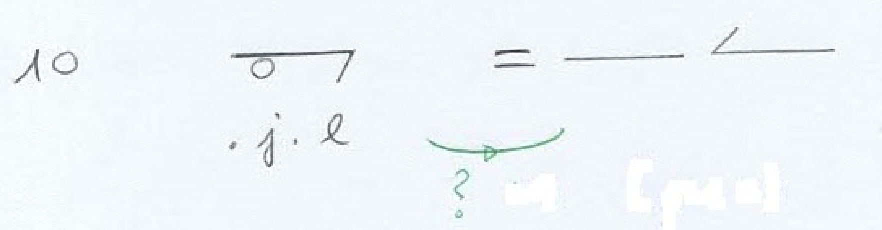
- Optellen van twee getallen als er gelijke cijfers in voorkomen: 'le report différé'

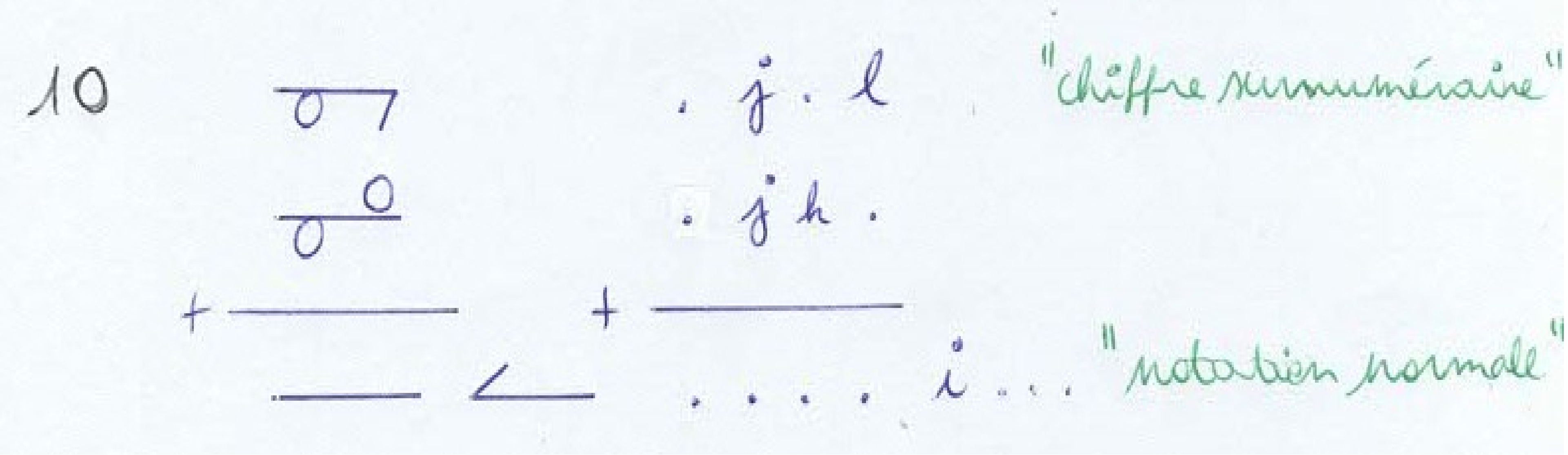


Bron: Georges Lemaître (1954) *Calculons sans fatigue* Ed. Nauwelaerts Louvain (p10)

Lemaître’s getallen: boventallige cijfers

- Boventallige cijfers: 6 bij optellen en in ‘normale vorm’ schrijven

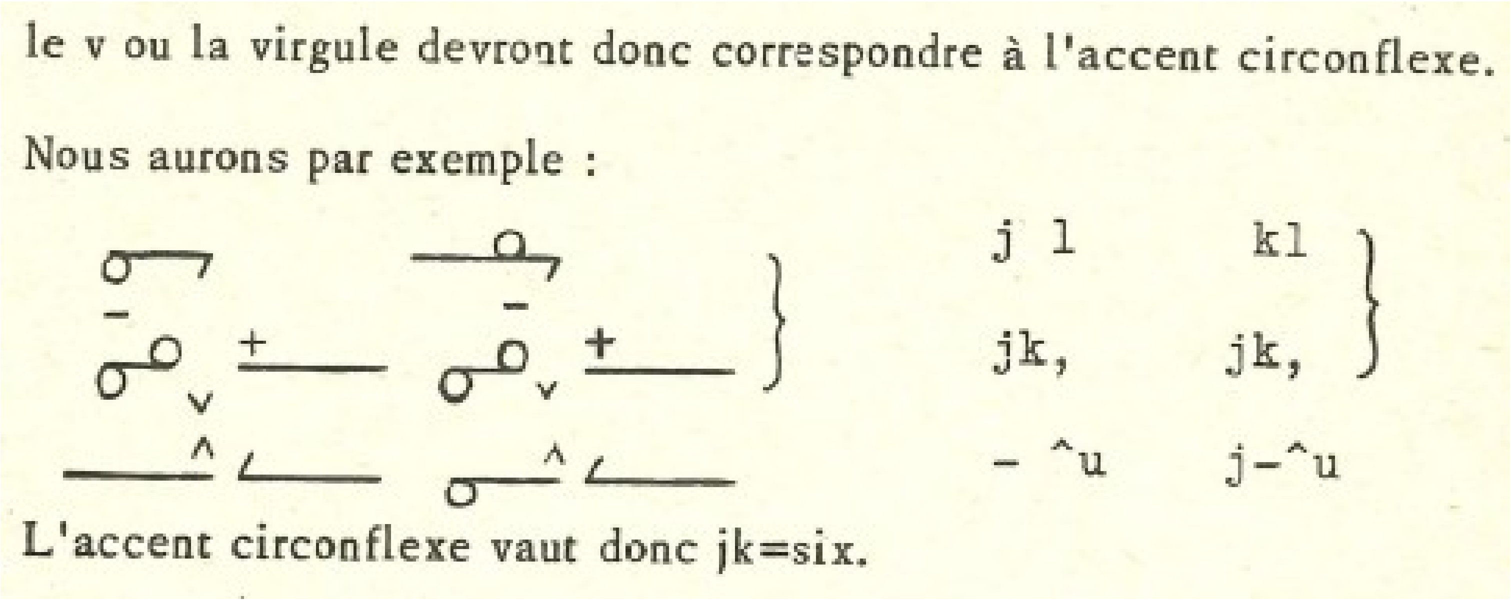




KU LEUVEN

Lemaître’s getallen: chiffres surnuméraires

- ‘Chiffres surnuméraires’ omzetten naar ‘notation normale’


le v ou la virgule devront donc correspondre à l'accent circonflexe.

Nous aurons par exemple :

j l   kl

jk,   jk,

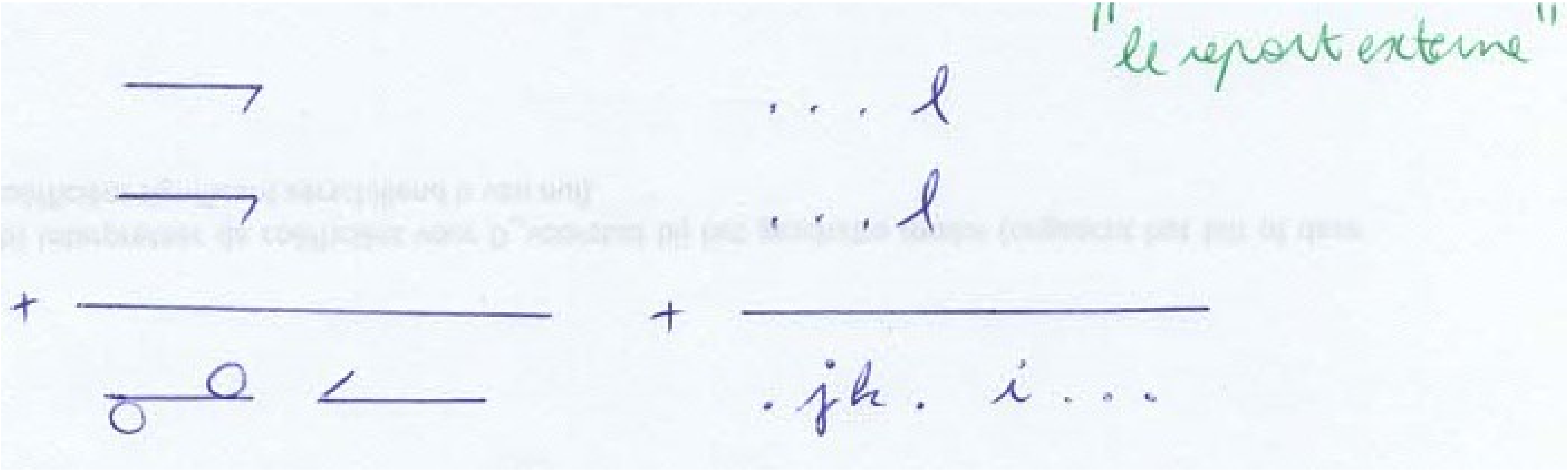
- ^u   j-^u

L'accent circonflexe vaut donc jk=six.

Bron: Georges Lemaître (1954) *Calculons sans fatigue* Ed. Nauwelaerts Louvain (p12)

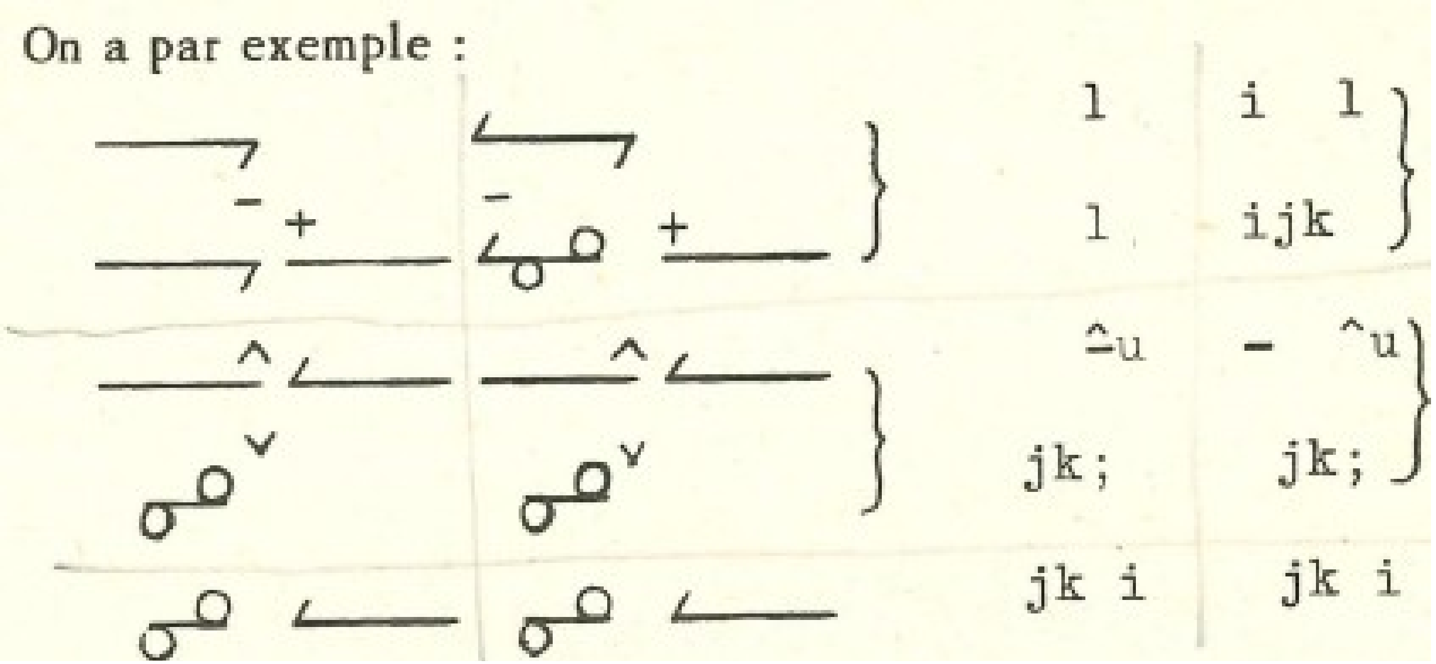
Lemaître's getallen: extern overdragen

- 8+8: extern overdragen



Lemaître’s getallen: ‘le report externe’

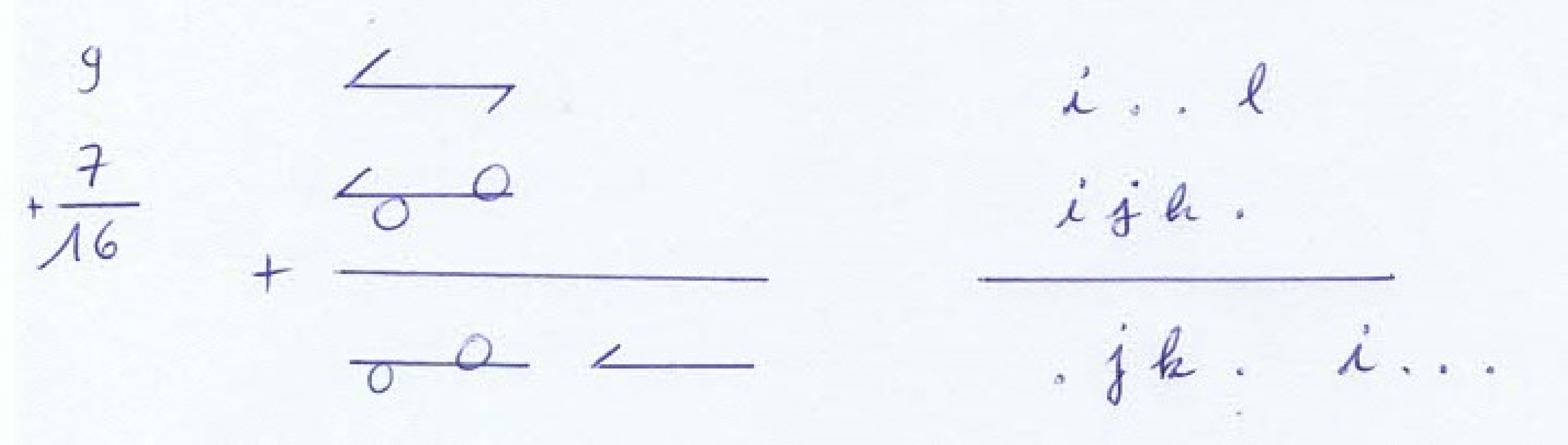
- 8+8: ‘le report externe’



Bron: Georges Lemaître (1954) *Calculons sans fatigue* Ed. Nauwelaerts Louvain (p13)

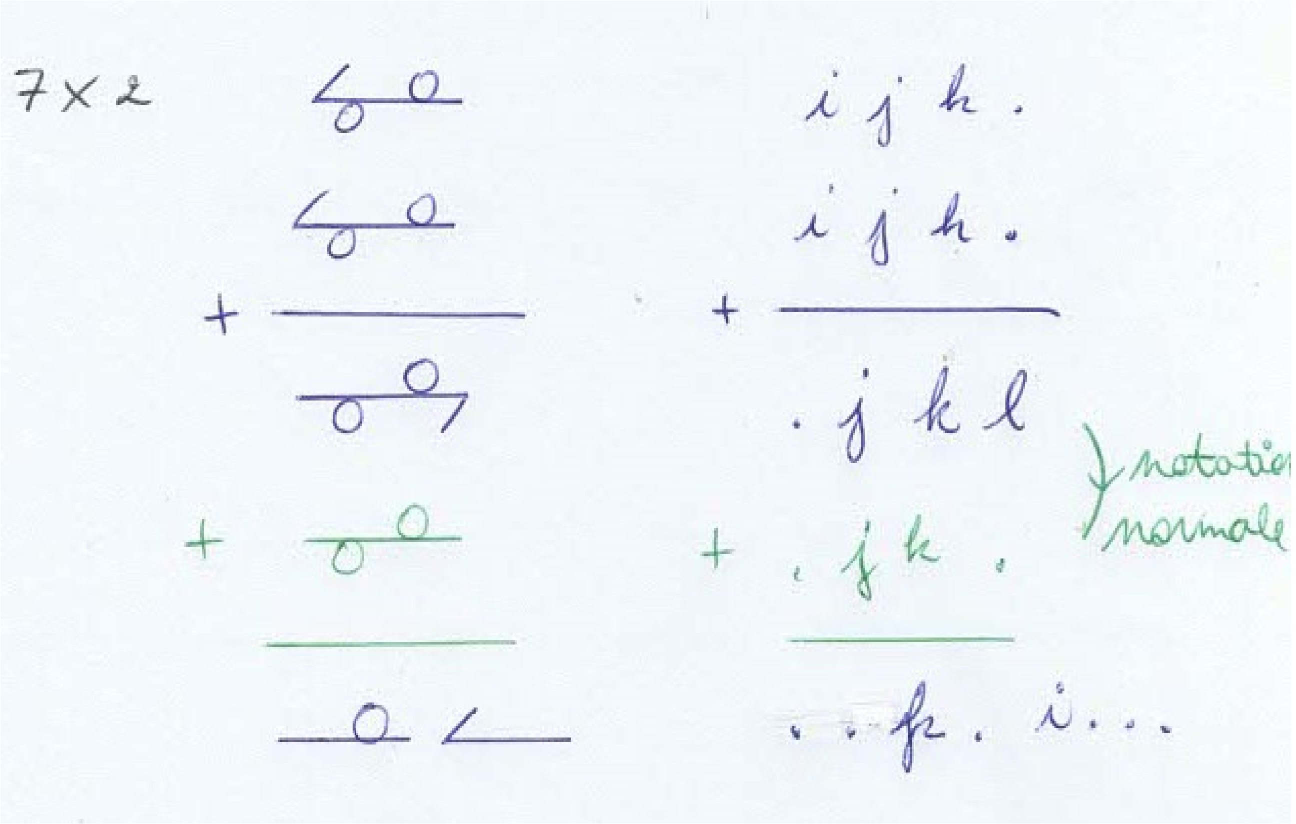
Lemaître’s getallen: optellen

- Optellen van getallen



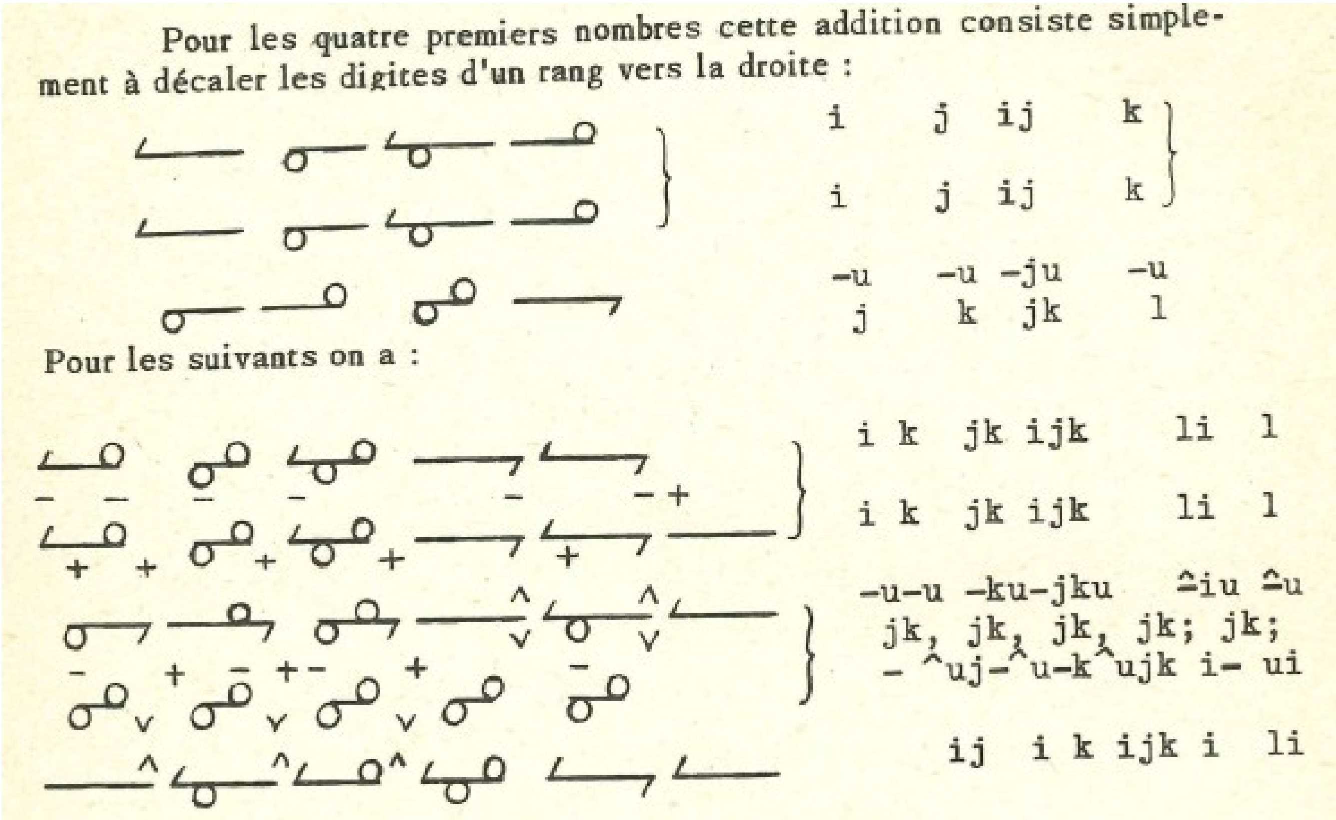
Lemaître’s getallen: vermenigvuldigen met 2

- Vermenigvuldigen met 2



Lemaître's getallen: vermenigvuldigen met 2

- Vermenigvuldigen met 2



Pour les quatre premiers nombres cette addition consiste simplement à décaler les digites d'un rang vers la droite :

i j ij k

i j ij k

-u -u -ju -u

j k jk l

Pour les suivants on a :

i k jk ijk li l

i k jk ijk li l

-u-u -ku-jku ^iu ^u

jk, jk, jk, jk; jk;

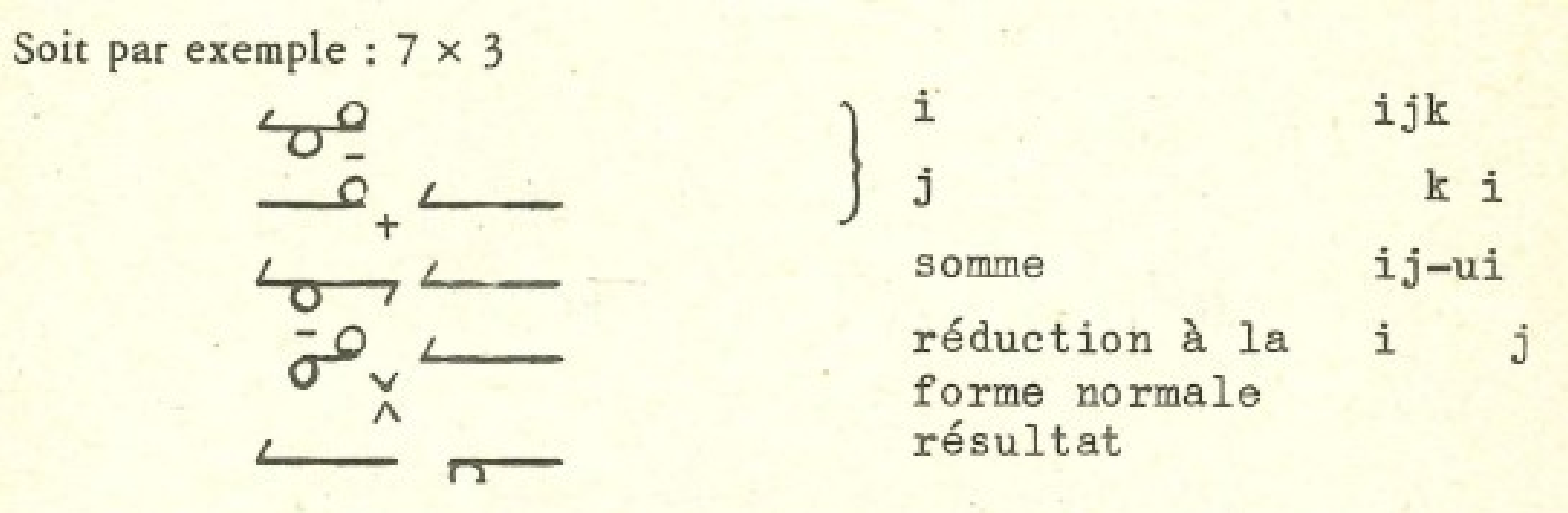
- ^uj-^u-k^ujk i- ui

ij i k ijk i li

Bron: Georges Lemaître (1954) *Calculons sans fatigue* Ed. Nauwelaerts Louvain (p16)

Lemaître’s getallen: vermenigvuldigen met 3

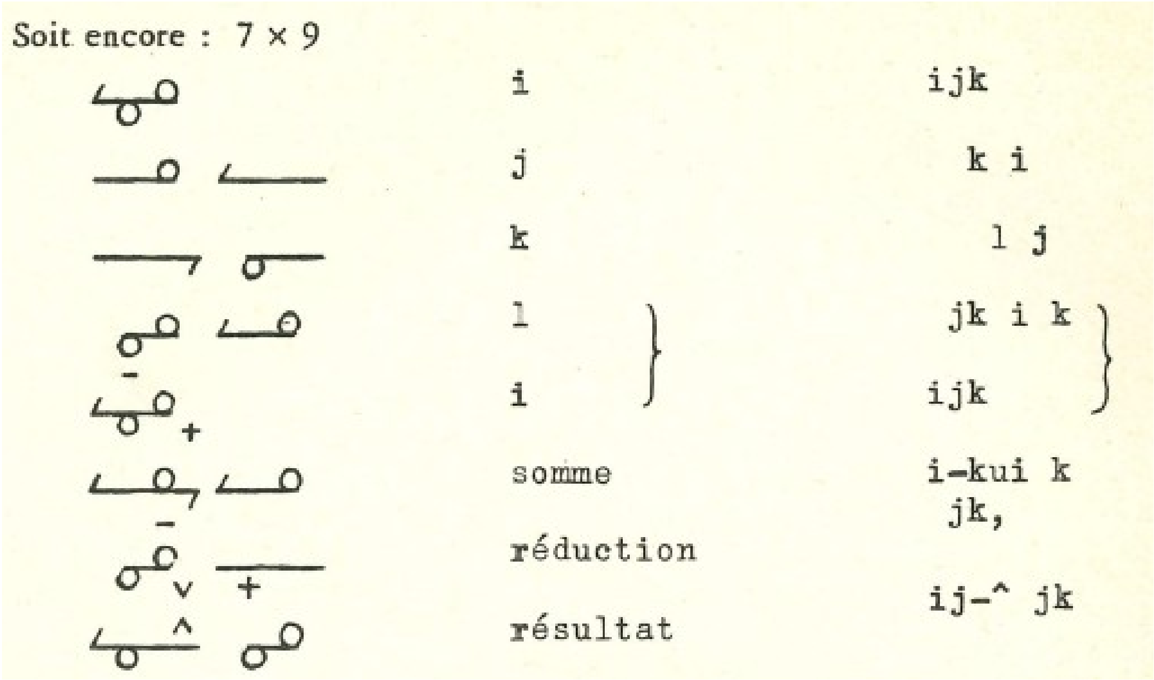
- Vermenigvuldigen met 3



Bron: Georges Lemaître (1954) *Calculons sans fatigue* Ed. Nauwelaerts Louvain (p17)

Lemaître’s getallen: vermenigvuldigen met 9

- Vermenigvuldigen met 9

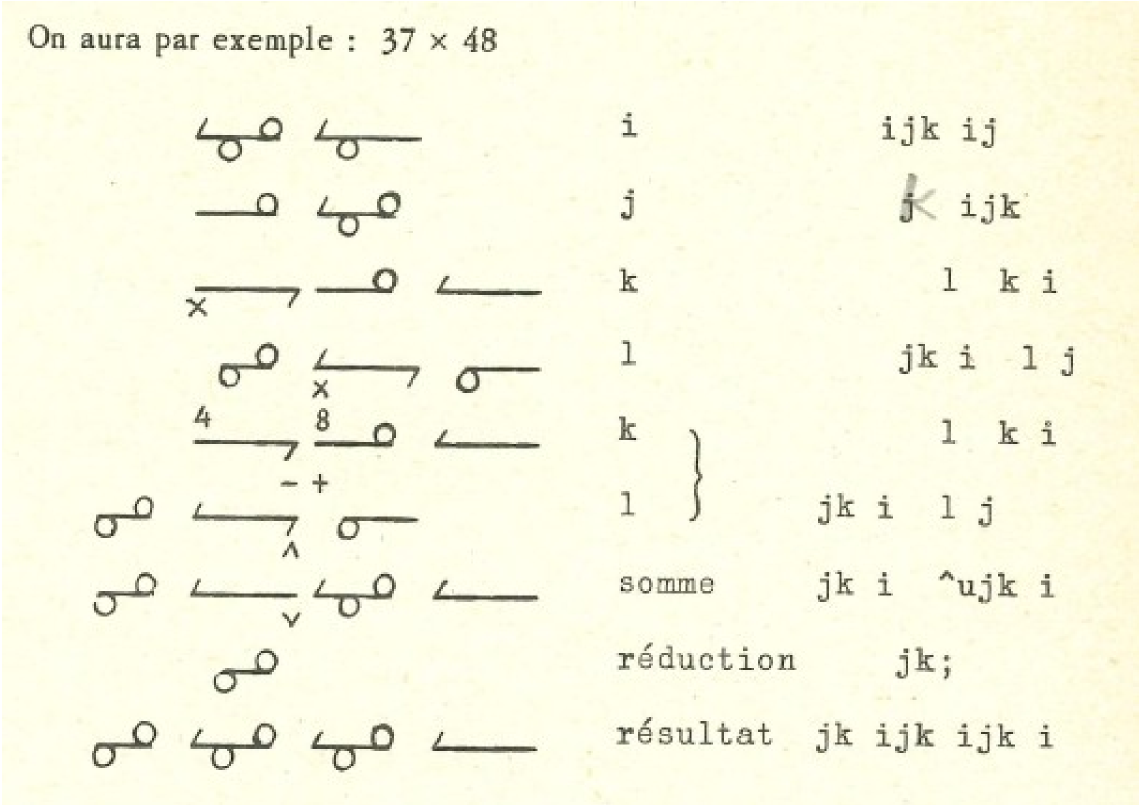

Soit encore : 7 × 9

i	ijk
j	k i
k	l j
l	jk i k
i	ijk
somme	i-kui k jk,
réduction	ij-^ jk
résultat	

Bron: Georges Lemaître (1954) *Calculons sans fatigue* Ed. Nauwelaerts Louvain (p18)

Lemaître’s getallen: vermenigvuldigen

- Vermenigvuldigen



Bron: Georges Lemaître (1954) *Calculons sans fatigue* Ed. Nauwelaerts Louvain (p19)

Vervolg in *Calculons sans fatigue*

- Overige bewerkingen: aftrekken en delen
- Een alternatieve methode
- Gebruik van het binaire getallensysteem

Prof. Ir. Georges De Witte

- Burgerlijk mijningenieur
- Verkenning en ontginning van goud en tin in Ruanda-Urundi
- Docent toegepaste geologie en mijnaardrijkskunde UGent

- Bron: Georges De Witte (1956) *Zal de mens het van de automaten leren?* Technisch wetenschappelijk tijdschrift 25(2) Antwerpen

Getallensysteem voorgesteld door De Witte

- De Witte las Georges Lemaître (1955) *Pourquoi de nouveaux chiffres?* Revue des Questions Scientifiques 126(3) 379-398
- Lemaître gaf met opzet geen concreet voorstel in bovenstaand artikel
- De Witte geeft zijn voorstel voor een getallensysteem met basis 16 en bijbehorende regels

> 1. De kleinste rang (eenheden) wordt *eerst* geschreven (van links naar rechts), omdat optellingen en vermenigvuldigingen met de kleinste rang moeten beginnen.

Bron: Georges De Witte (1956) *Zal de mens het van de automaten leren?* Technisch wetenschappelijk tijdschrift 25(2) Antwerpen (p26)

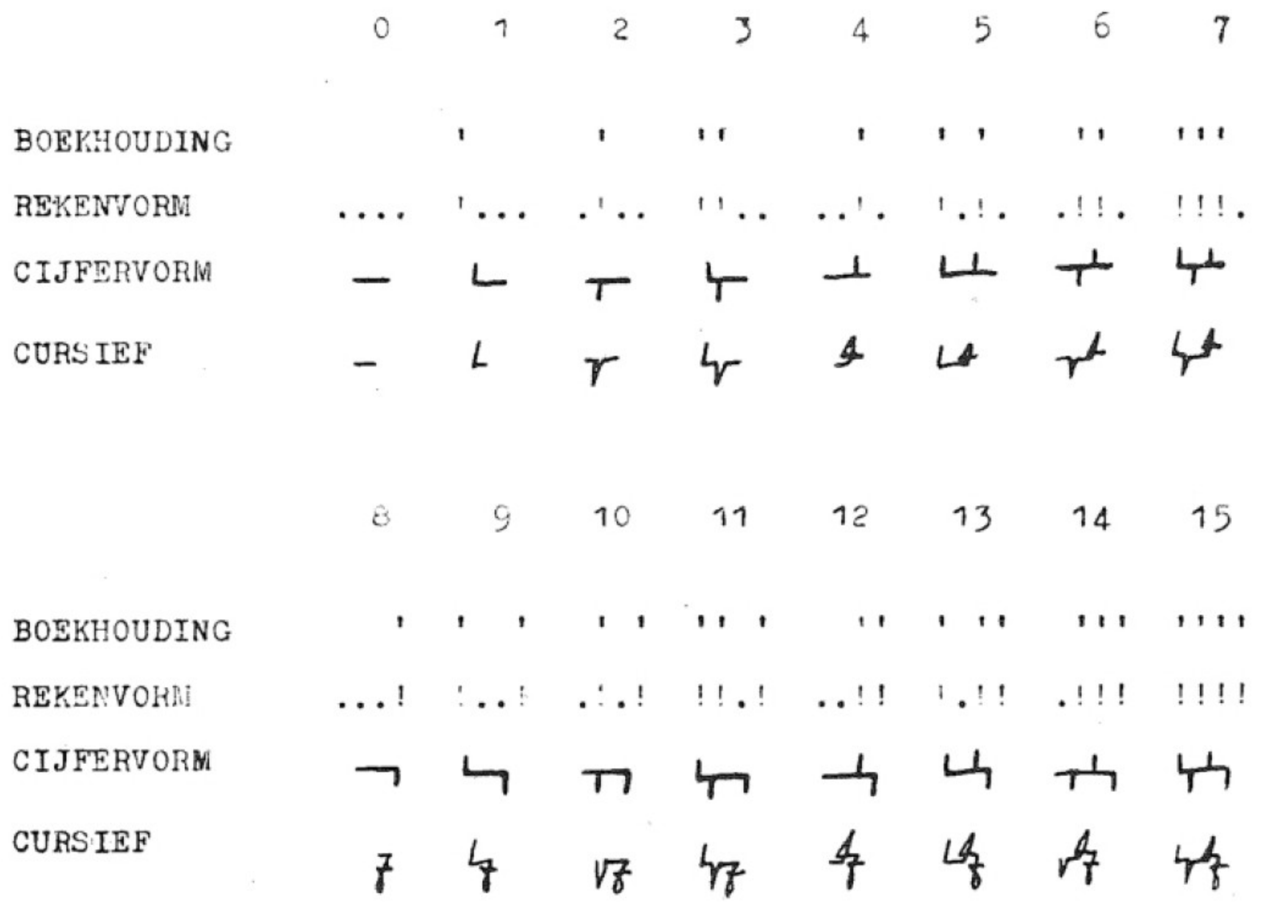
De Witte's getallensysteem: regels

9. De benaming van de eerste 15 getallen blijft ongewijzigd. Na *zestien* gaat men als volgt verder:
voor 17 : *één en zestien*,
voor 18 : *twee en zestien*, enz.
voor 31 : *vijftien en zestien*.

10. Voor getallen die meerdere zestientallen omvatten van twee zestientallen tot vijftien zestientallen, dus van 32 tot 255), wordt het aantal zestientallen *na* het woord " zesten " (afkorting van zestien) uitgesproken. Zo gaat men voort met:
voor 32 : *zesten-twee*,
voor 33 : *één en zesten-twee*, enz.
voor 48 : *zesten-drie*, enz.
voor 64 : *zesten-vier*, enz., enz.

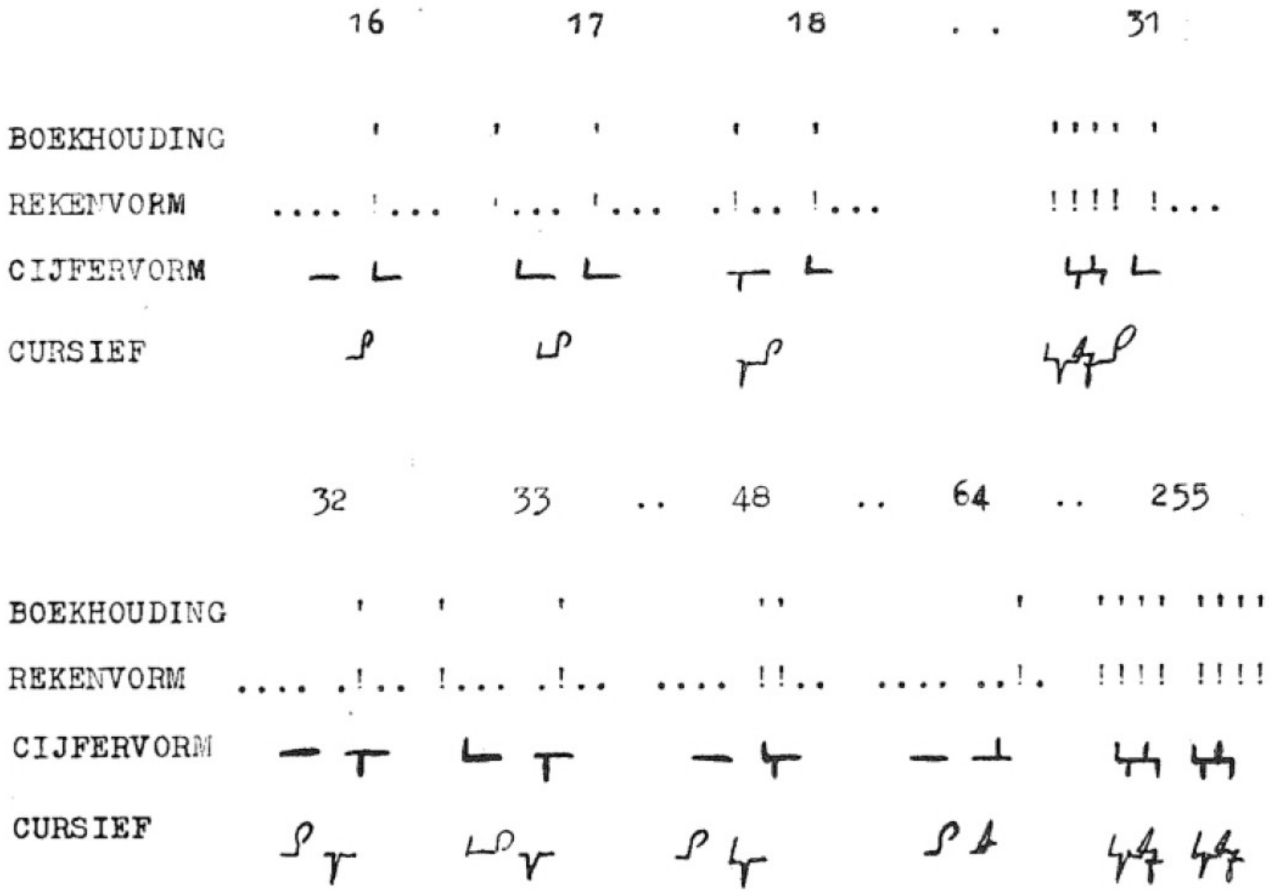
Bron: Georges De Witte (1956) *Zal de mens het van de automaten leren?* Technisch wetenschappelijk tijdschrift 25(2) Antwerpen (p26)

De Witte’s getallensysteem: getallen 0-15



Bron: Georges De Witte (1956) *Zal de mens het van de automaten leren?* Technisch wetenschappelijk tijdschrift 25(2) Antwerpen (p27)

De Witte’s getallensysteem: tot zesten-vijftien



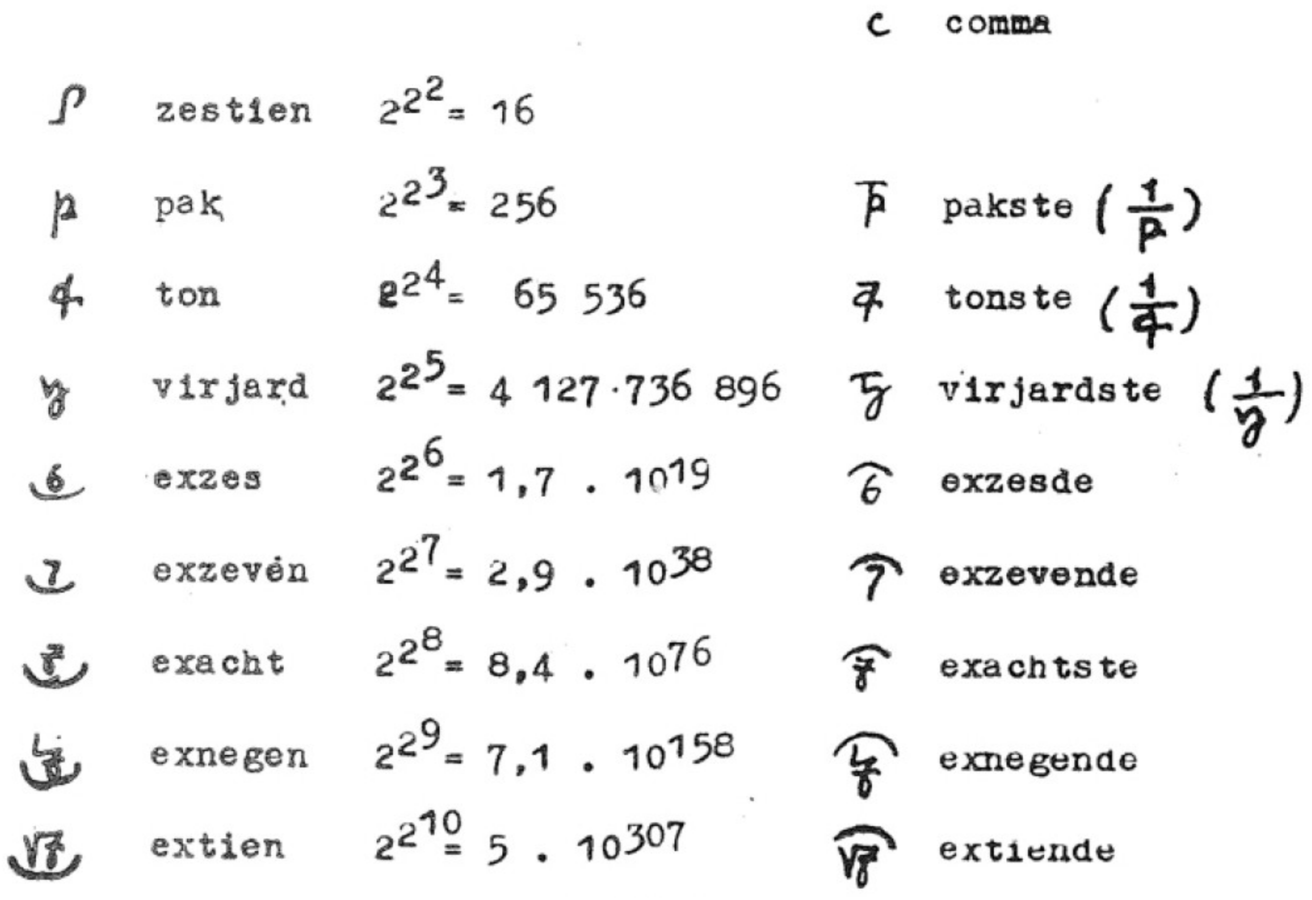
Bron: Georges De Witte (1956) *Zal de mens het van de automaten leren?* Technisch wetenschappelijk tijdschrift 25(2) Antwerpen (p27)

KU LEUVEN

De Witte’s getallensysteem: hogere en lagere orde

- Voor hogere en lagere orde getallen worden aparte benamingen voorzien
- Zesten-zestien = 16x16 = *pak*
- Na de zestentallen, vanaf zesten-zestien dus, volgen de *paktallen*
- Daarna volgen de *pakzestentallen* en pak-pak wordt *ton* genoemd
- Voor ton-ton (ongeveer vier miljard) wordt *virjard* gebruikt
- Gelijkaardig worden breuken uitgedrukt met behulp van *pakste*, *tonste* en *virjardste*

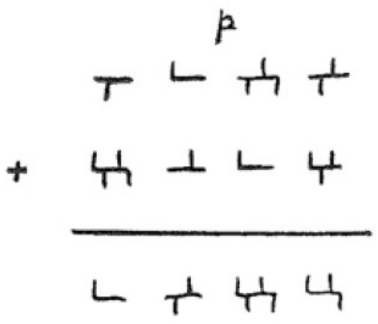
De Witte's getallensysteem: hogere en lagere orde



			comma
zestien	$2^{2^2} = 16$		
pak	$2^{2^3} = 256$		pakste (1/p)
ton	$2^{2^4} = 65\ 536$		tonste (1/t)
virjard	$2^{2^5} = 4\ 127 \cdot 736\ 896$		virjardste (1/v)
exzes	$2^{2^6} = 1,7 \ . \ 10^{19}$		exzesde
exzevén	$2^{2^7} = 2,9 \ . \ 10^{38}$		exzevende
exacht	$2^{2^8} = 8,4 \ . \ 10^{76}$		exachtste
exnegen	$2^{2^9} = 7,1 \ . \ 10^{158}$		exnegende
extien	$2^{2^{10}} = 5 \ . \ 10^{307}$		extiende

Bron: Georges De Witte (1956) *Zal de mens het van de automaten leren?* Technisch wetenschappelijk tijdschrift 25(2) Antwerpen (p26)

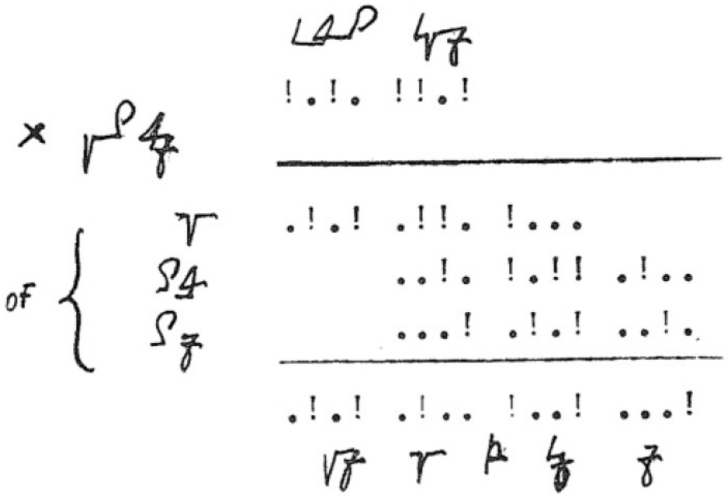
De Witte's getallensysteem: bewerkingen (optellen en vermenigvuldiging)



twee en zestien, pak veertien en zesten-zes

vijftien en zesten-vier, pak één en zesten-zeven

één en zesten-zes, pak vijftien en zesten-dertien



vijf en zesten-elf (181)

× twee en zesten-twaalf (194)

tien en zesten-twee, pak negen en zesten-acht (35 114)

Bron: Georges De Witte (1956) *Zal de mens het van de automaten leren?* Technisch wetenschappelijk tijdschrift 25(2) Antwerpen (p28)

Georges Papy

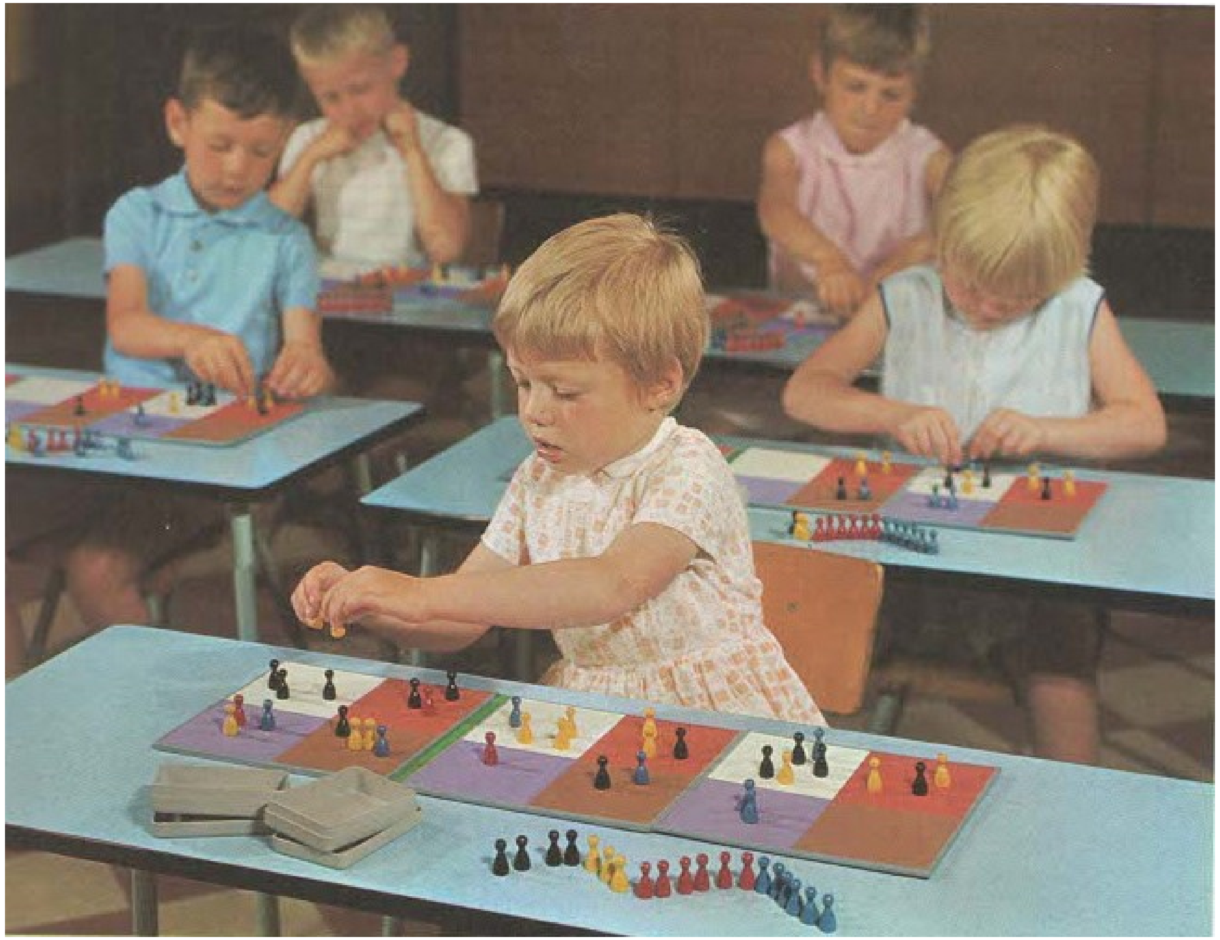
- 4 november 1920 - 11 november 2011
- Belgische wiskundige
- Professor aan de Université Libre de Bruxelles
- Vanaf eind jaren ‘50 betrokken bij onderwijshervormingen
- Huwde Frédérique Lenger in 1960
- “Vader van de moderne wiskunde in België”
- Auteur van de handboekenreeks Mathématique Moderne

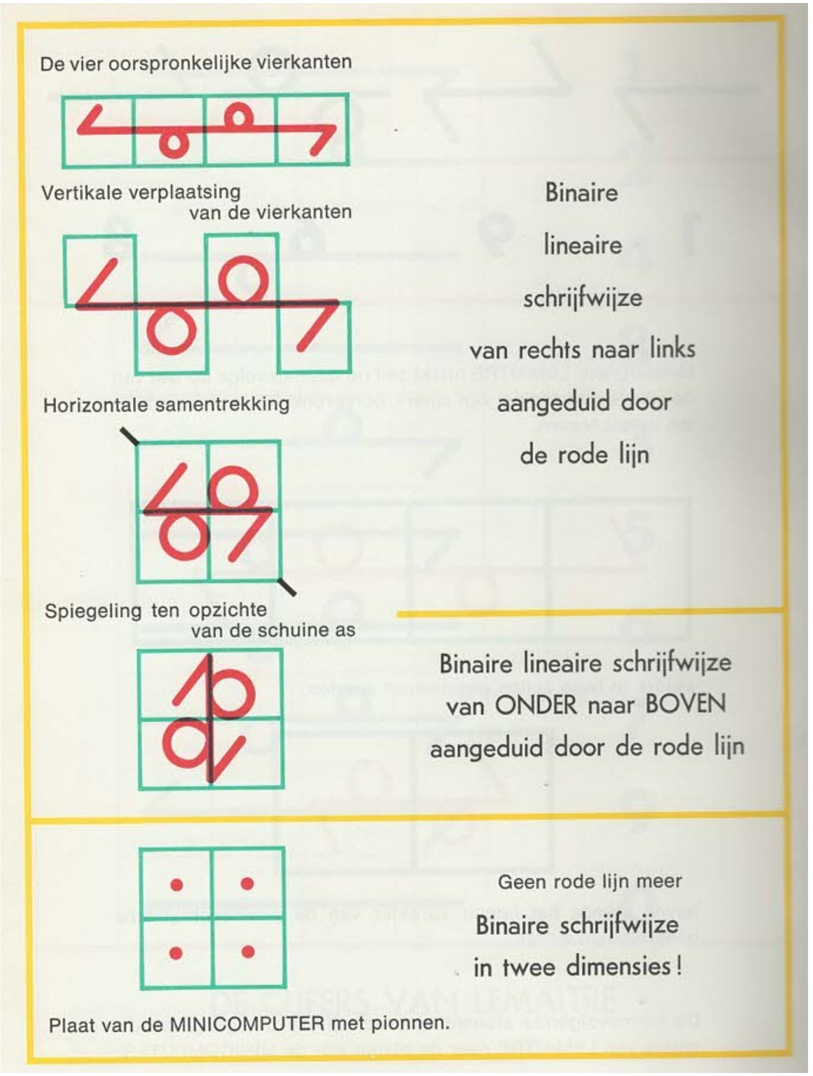
- Bron: Dirk De Bock en Geert Vanpaemel (2019) Rods, sets and arrows in de reeks History of mathematics education Springer
- Foto: Van Der Plassche (1964)

Papy’s minicomputer

- Gebaseerd op Lemaître’s getallen
- Hybride systeem: machten van twee (binair getallensysteem) en posities van het decimaal getallensysteem, deze laatste zoals we gewoon zijn

Papy's minicomputer: ontstaan





Bron: Georges Papy (1968) *Minicomputer* Bruxelles IVAC (p9 en p186)

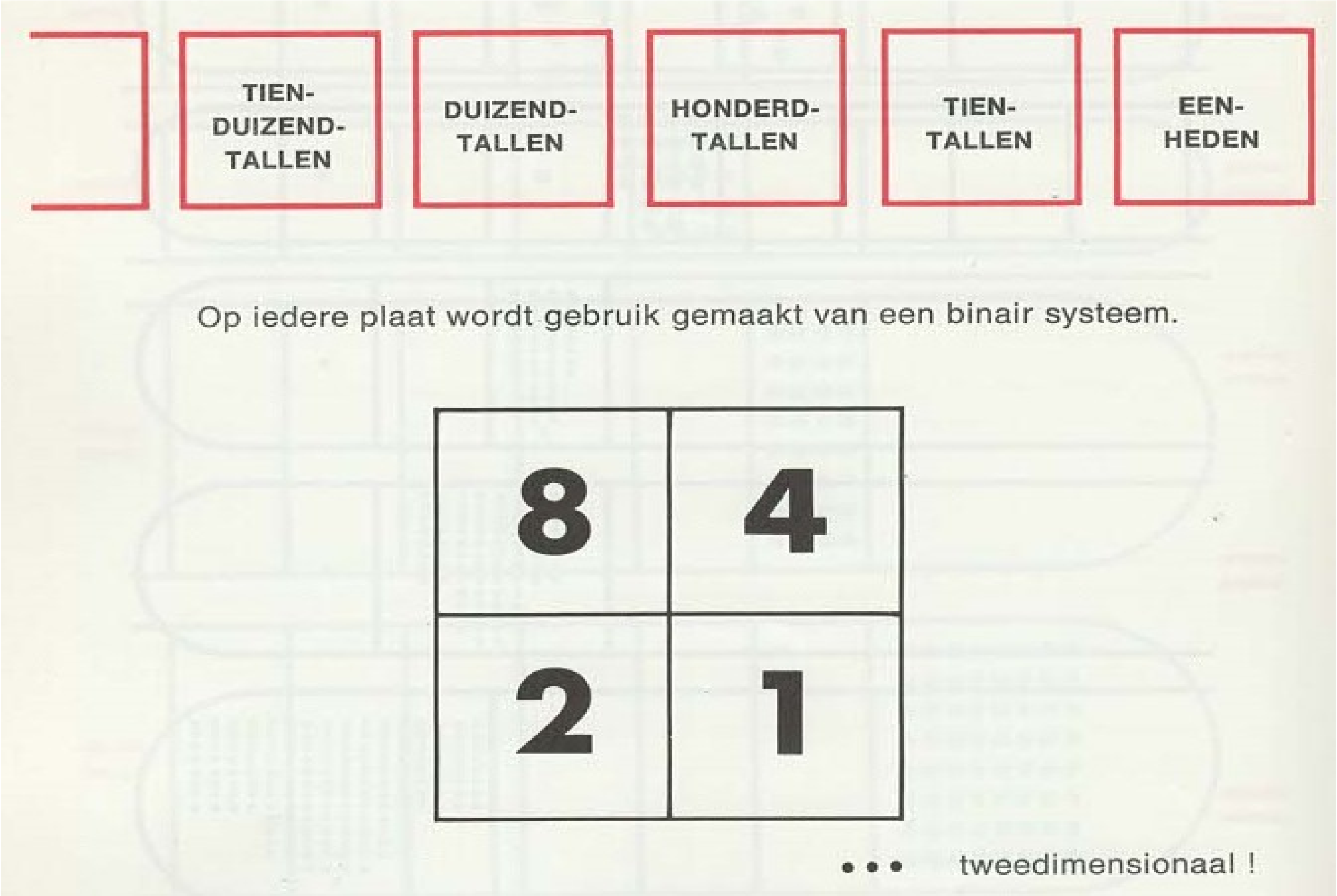
Papy's minicomputer: ontstaan

De MINICOMPUTER combineert het DECIMALE van onze tien vingers, door zovele beschavigingen aangenomen en gecodificeerd door PYTHAGORAS, met de taal van de grote computers, het BINAIR stelsel, waarvan de ontdekking teruggaat tot de antieke wijsheid van de wonderlijke Chinese wiskundigen.

De MINICOMPUTER, geïnspireerd op de laatste werken van Monseigneur LEMAITRE — die dateren van welhaast 15 jaar geleden — werd onlangs in vijf klassen van kinderen van zes en zeven jaar met succes gebruikt door de Fee FREDERIQUE en haar leerlinge DANIELLE.

Bron: Georges Papy (1968) *Minicomputer* Bruxelles IVAC (p7 en p8)

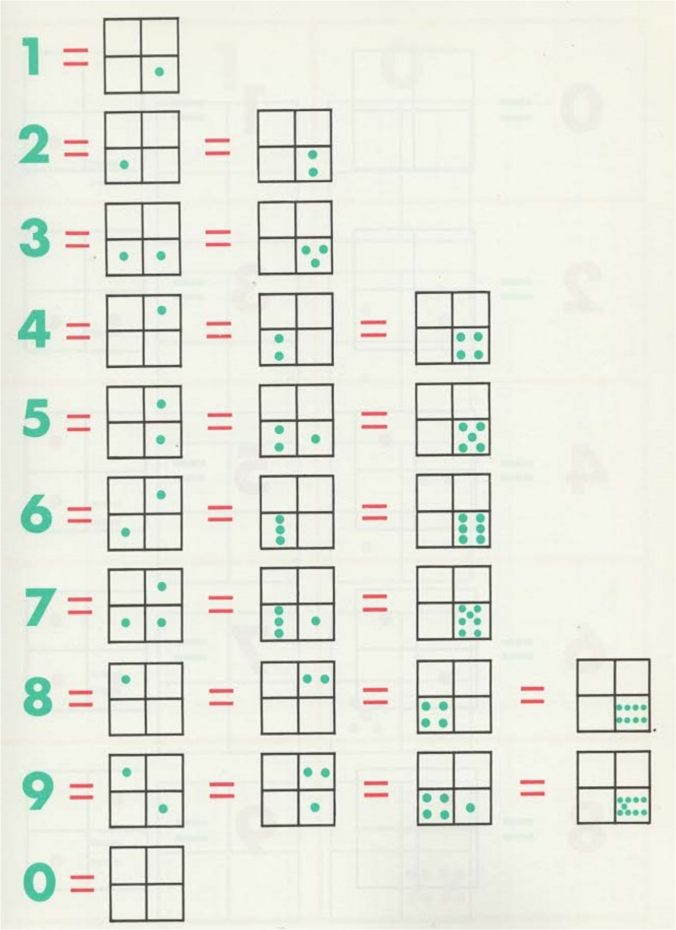
Papy’s minicomputer: opzet

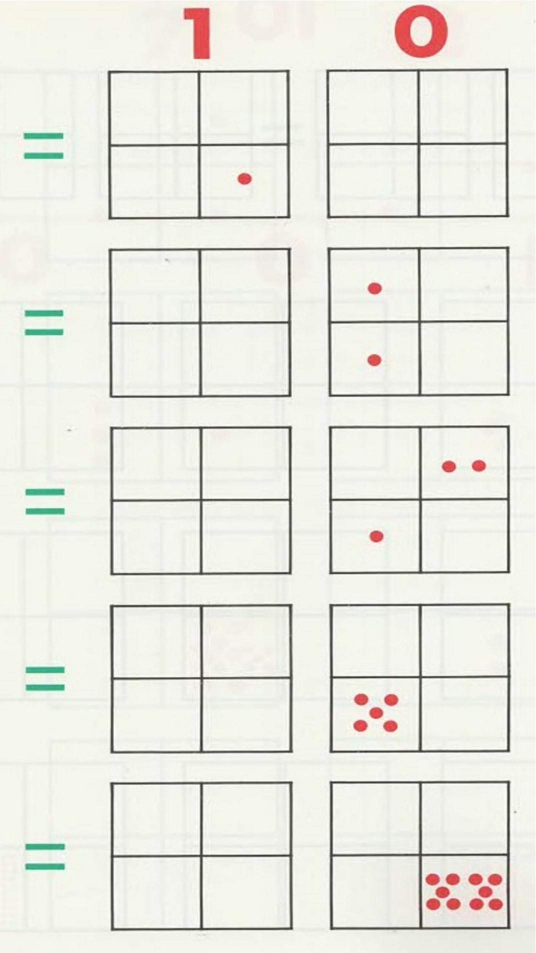


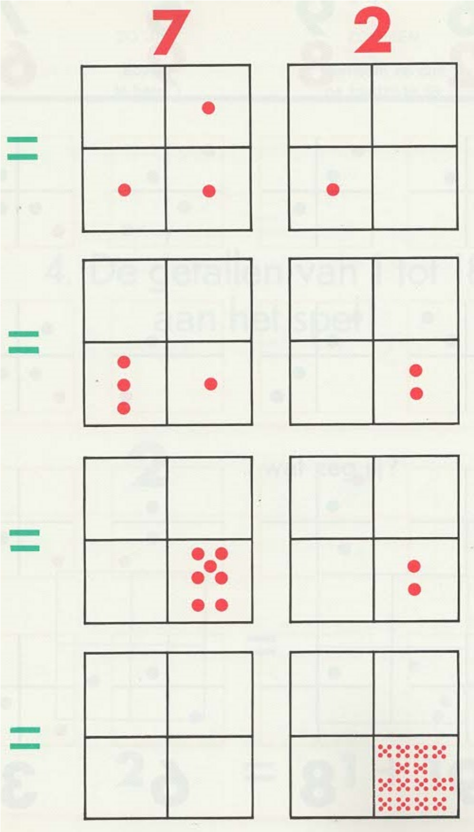
Bron: Georges Papy (1968) *Minicomputer* Bruxelles IVAC (p24)

KU LEUVEN

Papy’s minicomputer: getallen voorstellen







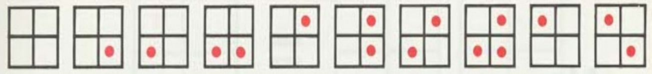
Bron: Georges Papy (1968) *Minicomputer* Bruxelles IVAC (p27, p29 en p31)

Papy’s minicomputer: schikkingen en formaties

Op de MINICOMPUTER
stelt elke schikking van pionnen een getal voor.

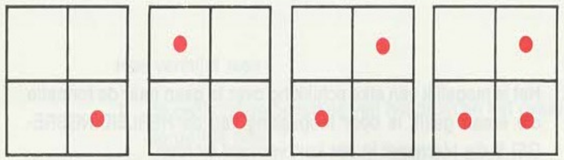
De schikkingen die toelaten het getal onmiddellijk af te lezen,
zullen we FORMATIES heten.

Ziehier de FORMATIES van de eerste 10 getallen.



0 1 2 3 4 5 6 7 8 9

Ziehier de FORMATIE van het getal 1967.



1 9 6 7

Een schikking is een formatie

ASA

Op elk der platen :

1 - Nooit meer dan één pion per vak

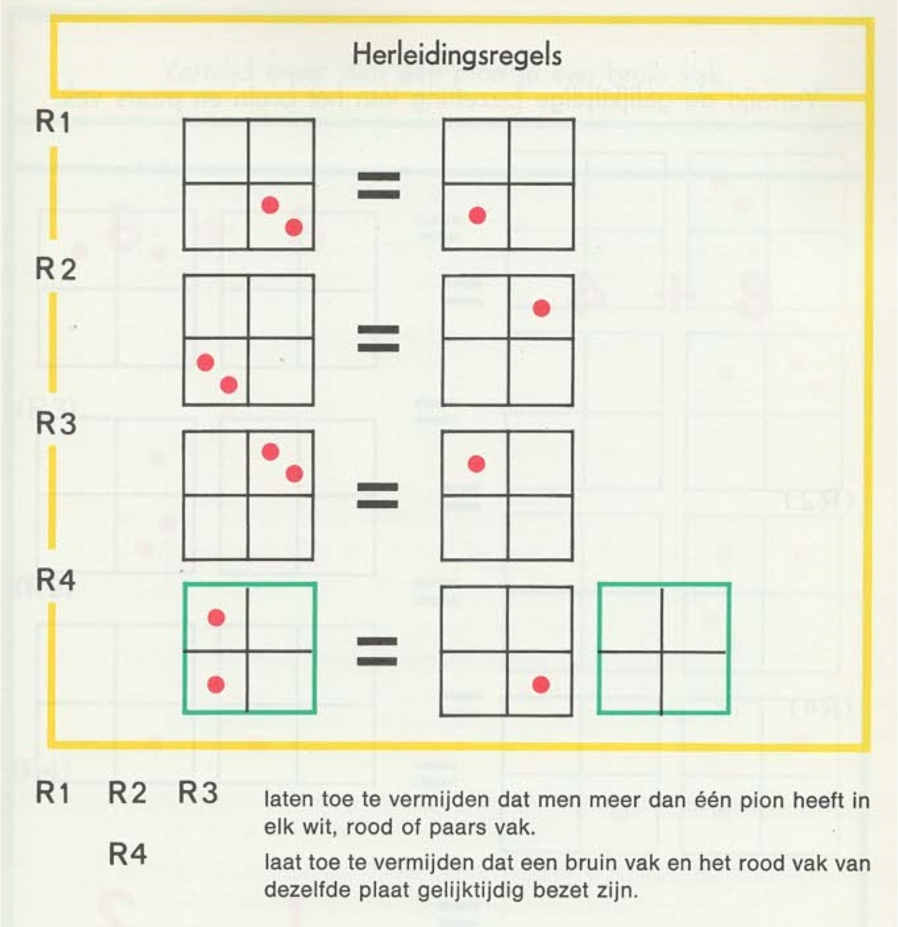
2 - ALS een pion op bruin
DAN noch pion op rood
noch pion op paars

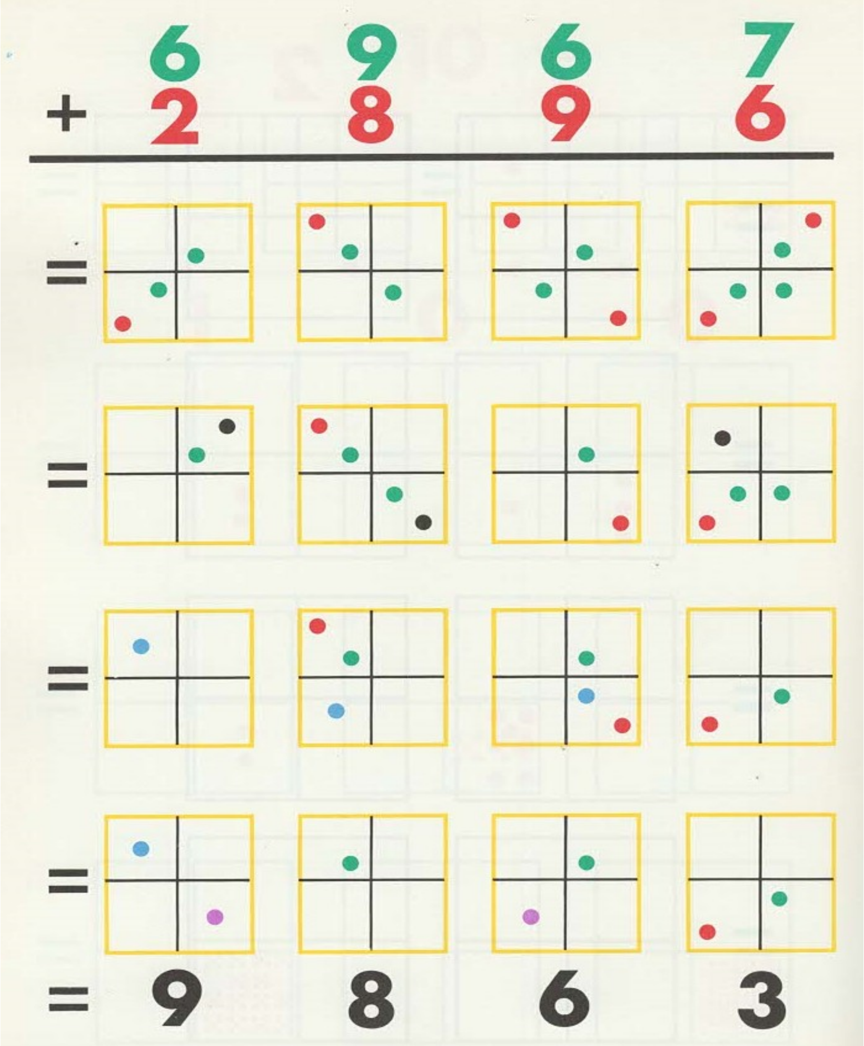
Als je voor elke schikking
de formatie kunt vinden die eraan gelijk is,

Dan ben je in staat elke berekening op de MINICOMPUTER
uit te voeren.

Bron: Georges Papy (1968) *Minicomputer* Bruxelles IVAC (p53 en p54)

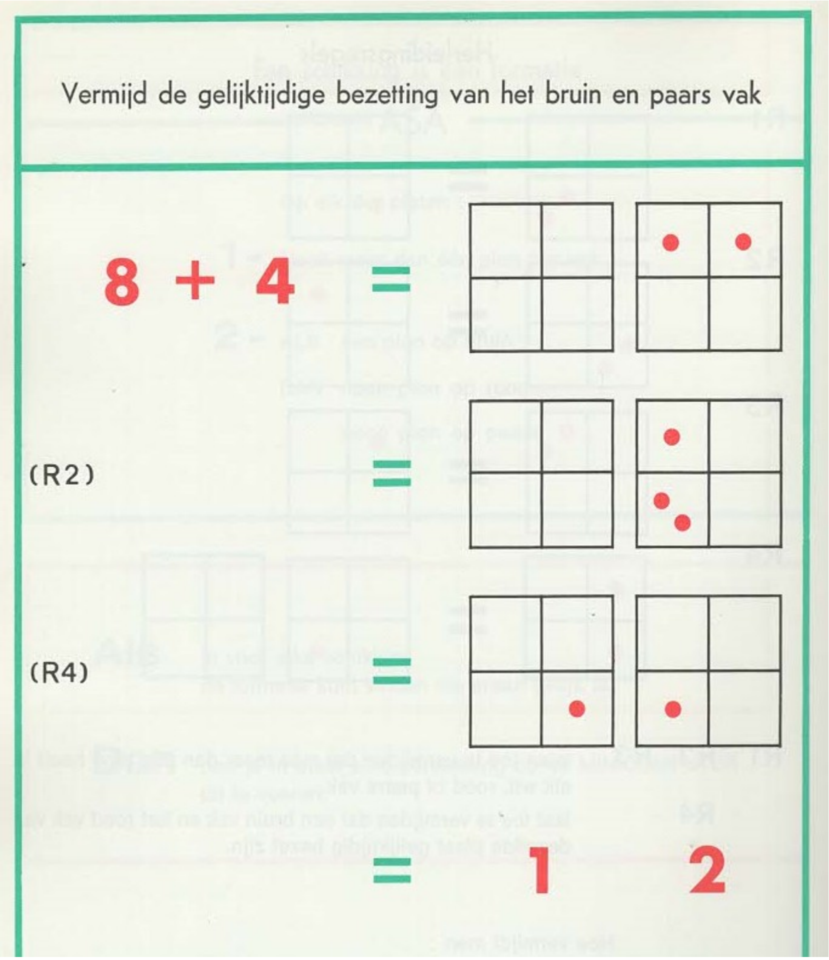
Papy's minicomputer: herleiden en optellen

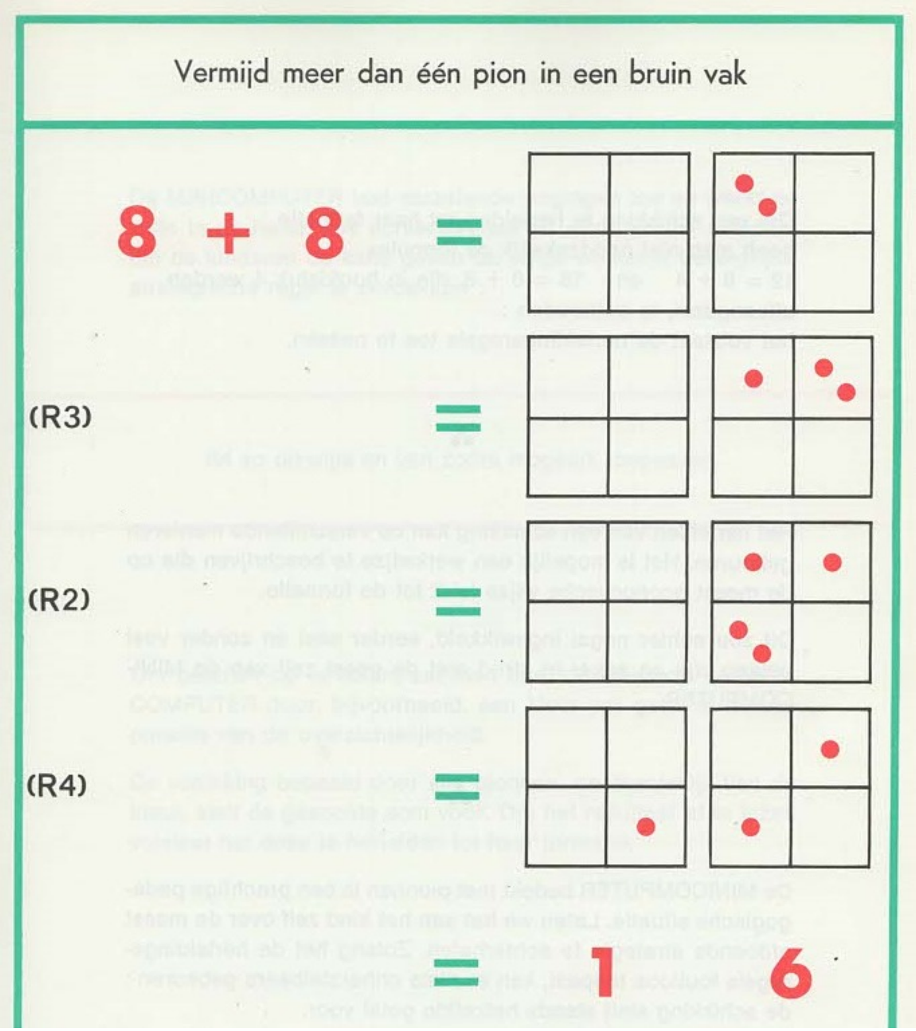




Bron: Georges Papy (1968) *Minicomputer* Bruxelles IVAC (p55 en p32)

Papy’s minicomputer: optellen en herleiden





Bron: Georges Papy (1968) *Minicomputer* Bruxelles IVAC (p56 en p57)

Papy’s minicomputer: herleiden

Het herleiden van een schikking kan op verschillende manieren gebeuren. Het is mogelijk een werkwijze te beschrijven die op de meest economische wijze leidt tot de formatie.

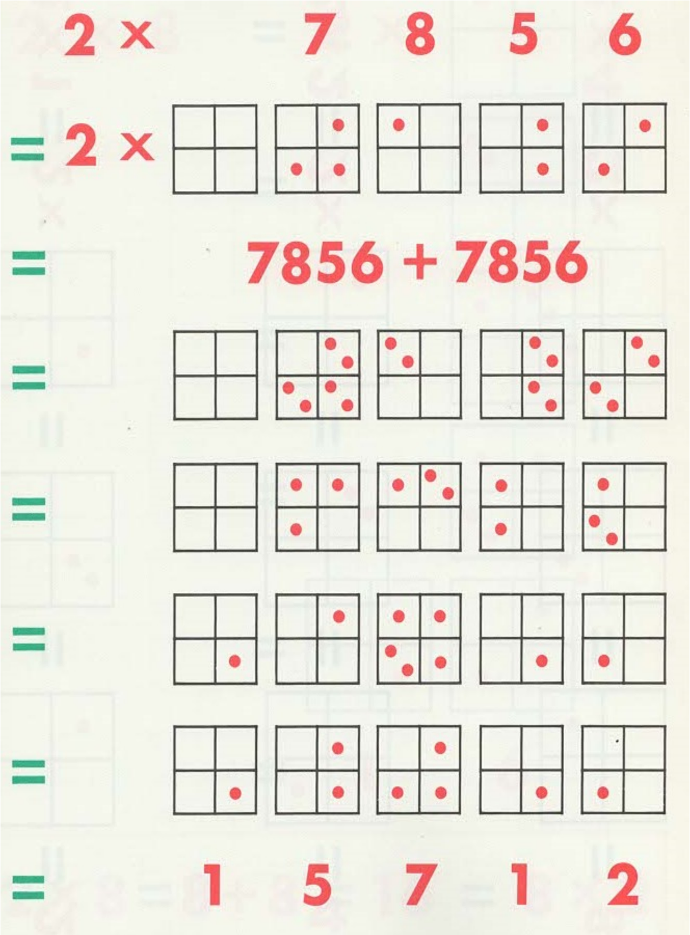
Dit zou echter nogal ingewikkeld, eerder saai en zonder veel belang zijn en zeker in strijd met de geest zelf van de MINICOMPUTER.

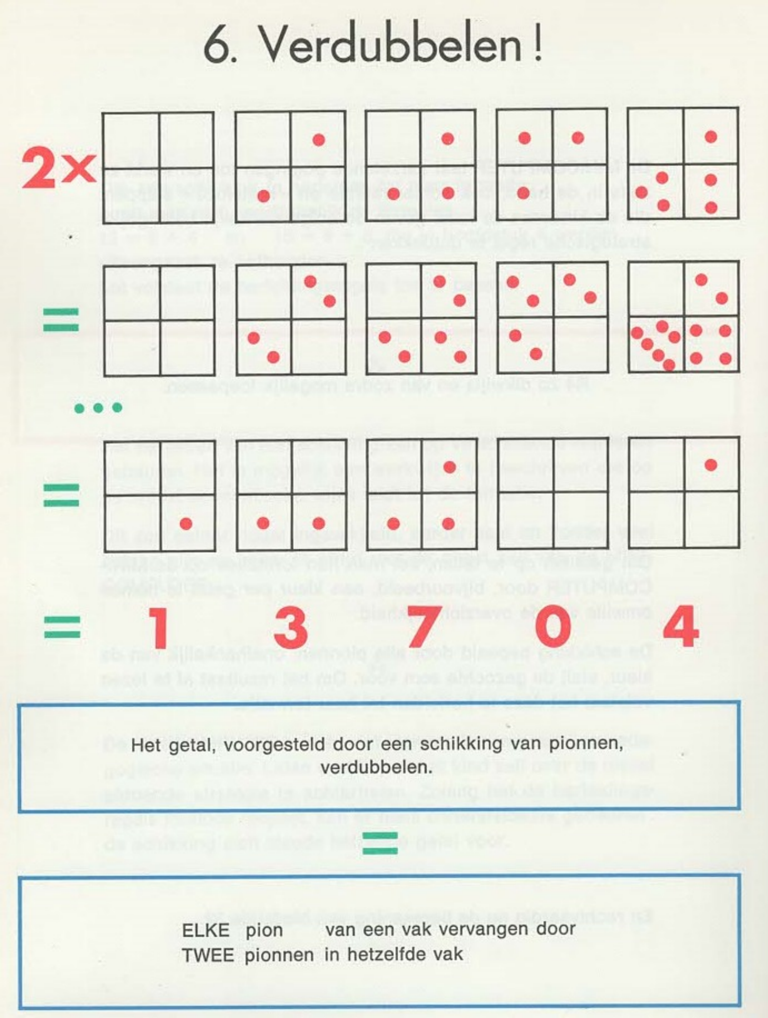
⁂

De MINICOMPUTER bedekt met pionnen is een prachtige pedagogische situatie. Laten we het aan het kind zelf over de meest afdoende strategie te achterhalen. Zolang het de herleidingsregels foutloos toepast, kan er niets onherstelbaars gebeuren : de schikking stelt steeds hetzelfde getal voor.

Bron: Georges Papy (1968) *Minicomputer* Bruxelles IVAC (p58)

Papy’s minicomputer: verdubbelen



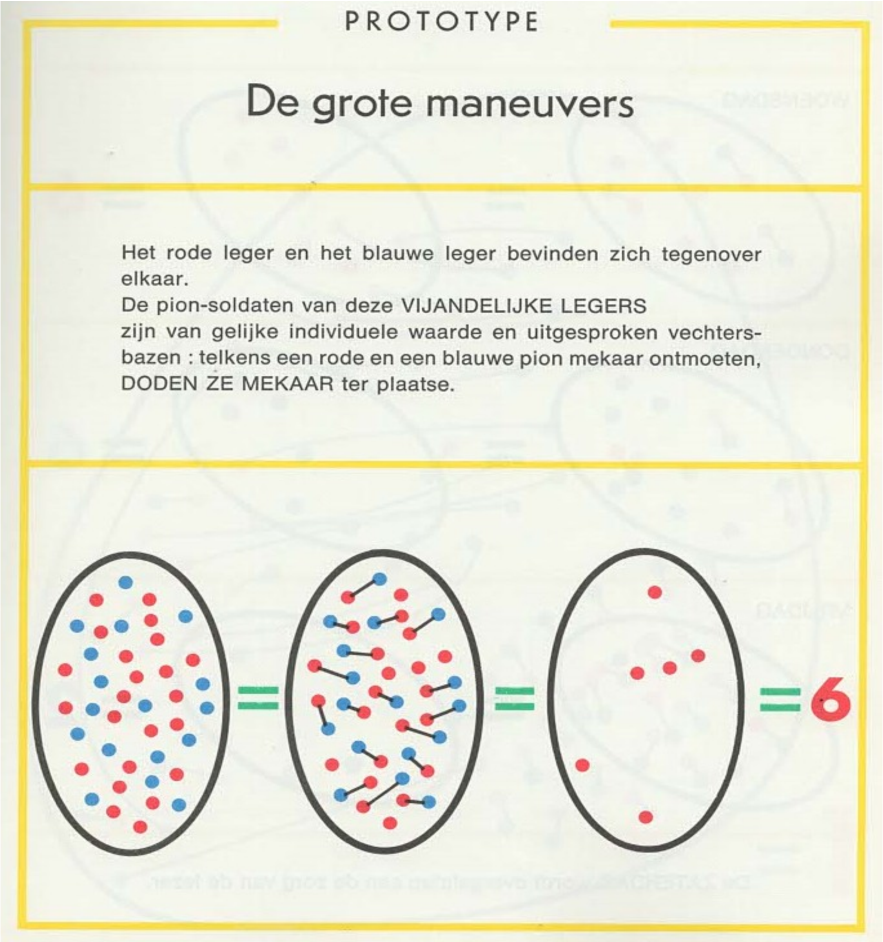


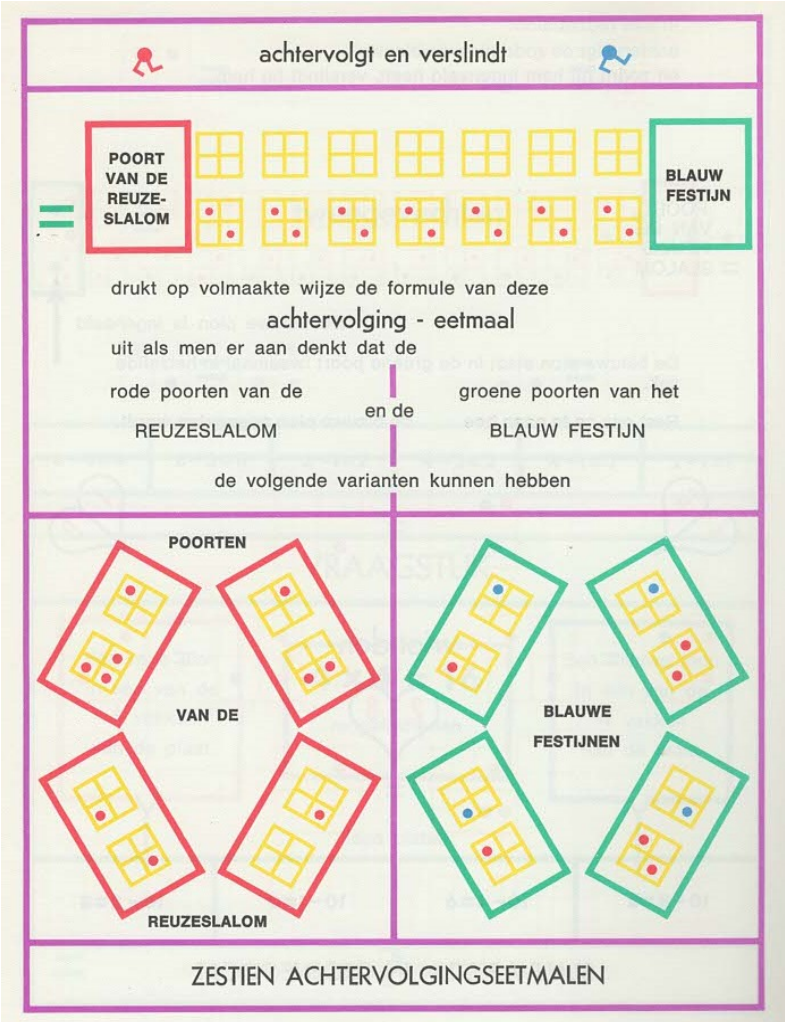
Bron: Georges Papy (1968) *Minicomputer* Bruxelles IVAC (p61 en p60)

Papy's minicomputer: andere veelvouden

- Verviervoudigen = verdubbelen en nog eens verdubbelen
- Verachtvoudigen of verdubbelen tot de derde macht = driemaal achter mekaar verdubbelen
- Verdrievoudigen van een getal = aan dit getal zijn dubbel toevoegen
- Vermenigvuldigen met 6 = verdubbelen en vervolgens dit tweevoud verdrievoudigen = verdrievoudigen en vervolgens dit drievoud verdubbelen
- Vermenigvuldigen met 9 = twee maal na mekaar verdrievoudigen
- Een getal vermenigvuldigen met 7 = aan dit getal het dubbel toevoegen en het dubbel van het dubbel
- Vermenigvuldigen met 5, vertienvoudigen, verhonderdvoudigen, …

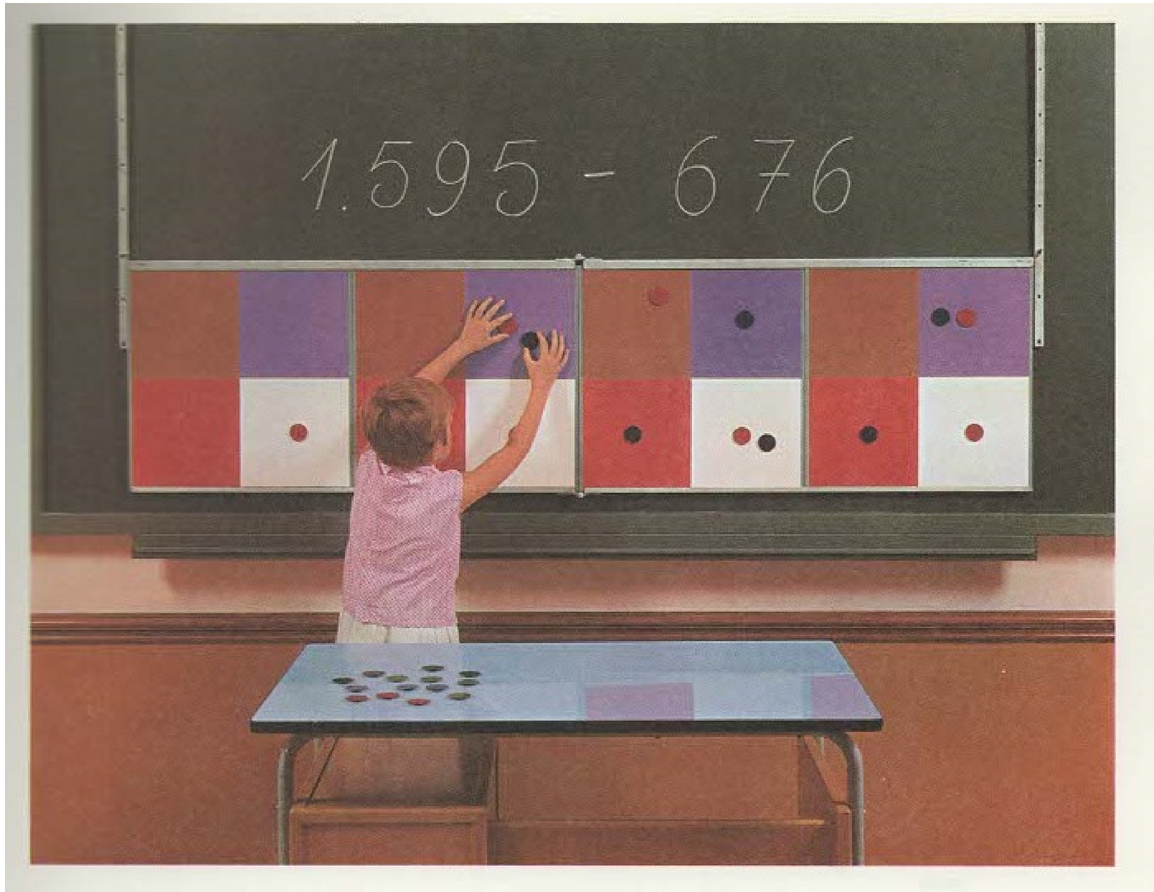
Papy’s minicomputer: het verschil van getallen

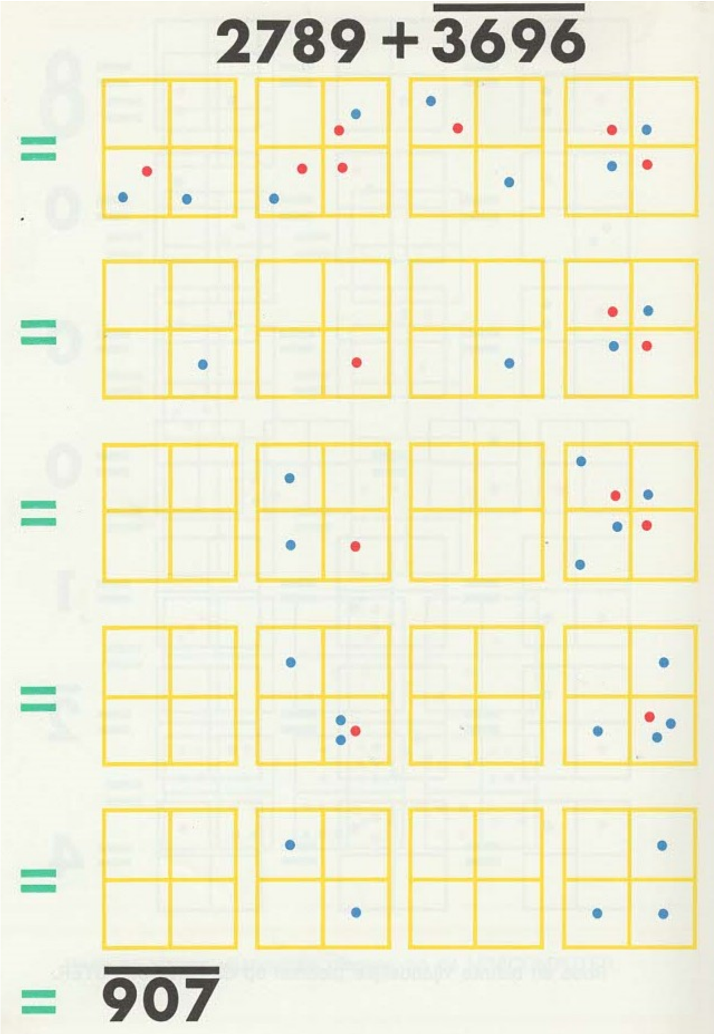




Bron: Georges Papy (1968) *Minicomputer* Bruxelles IVAC (p113 en p146)

Papy's minicomputer: het verschil van getallen





Bron: Georges Papy (1968) *Minicomputer* Bruxelles IVAC (p137 en p136)

Frédérique Papy-Lenger

- 8 december 1921 - 1 september 2005
- Belgische wiskundige en lerares
- Experimenteerde met wiskundeonderwijs gebaseerd op verzamelingenleer en topologie
- Huwde Georges Papy in 1960
- “Moeder van de moderne wiskunde in België”
- Behaalde als eerste in België een doctoraat in de pedagogie van de wiskunde

- Bron: Dirk De Bock (2022) Frédérique Papy-Lenger, the mother of modern mathematics in Belgium in A. Karp Advances in the history of mathematics education, International studies in the history of mathematics and its teaching
- Foto: collectie Robert Kennes

Frédérique’s experimenten met de minicomputer

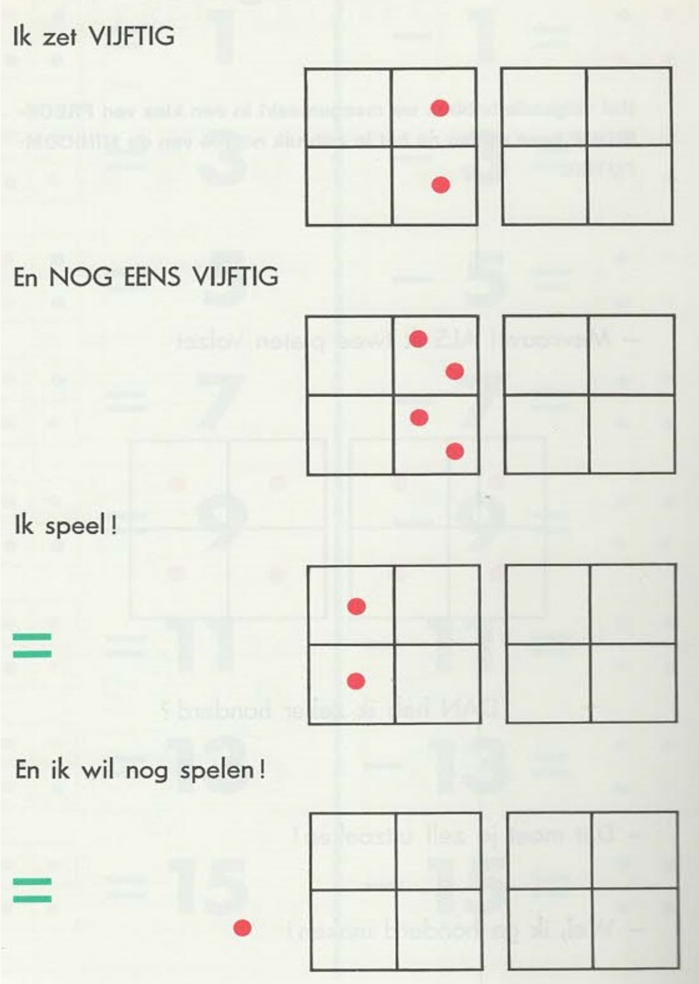
Het volgende hebben we meegemaakt in een klas van FREDERIQUE twee weken na het in gebruik nemen van de MINICOMPUTER.

– Mevrouw! ALS ik twee platen volzet

DAN heb ik zeker honderd?

– Dat moet je zelf uitzoeken!

– Wel, ik ga honderd maken!



Ik zet VIJFTIG

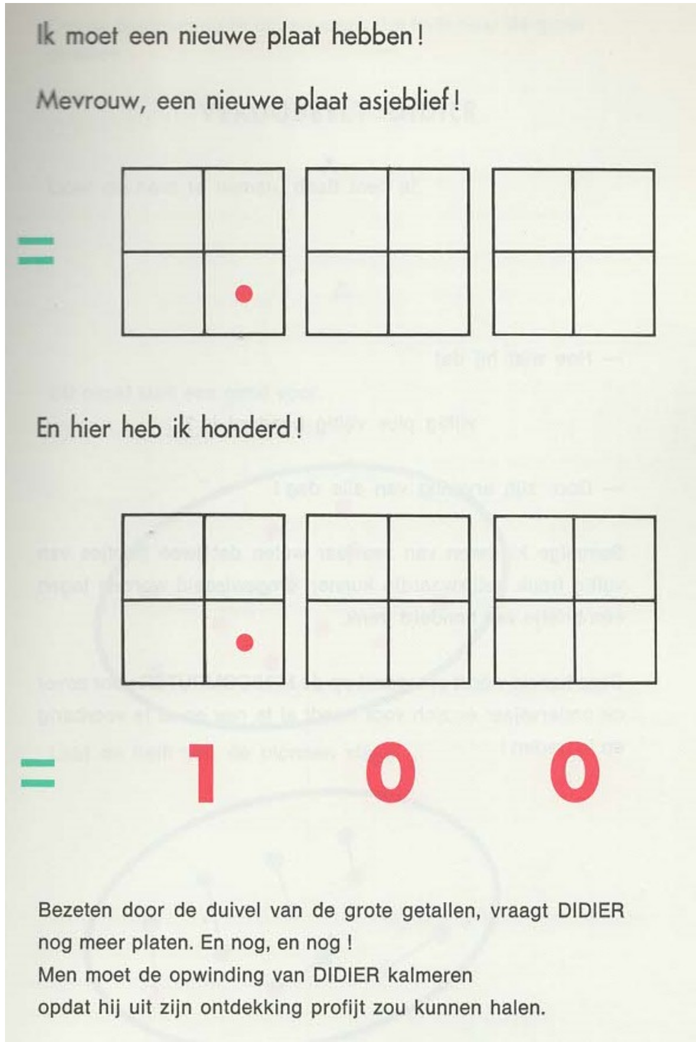
En NOG EENS VIJFTIG

Ik speel!

=

En ik wil nog spelen!

=



Ik moet een nieuwe plaat hebben!

Mevrouw, een nieuwe plaat asjeblief!

=

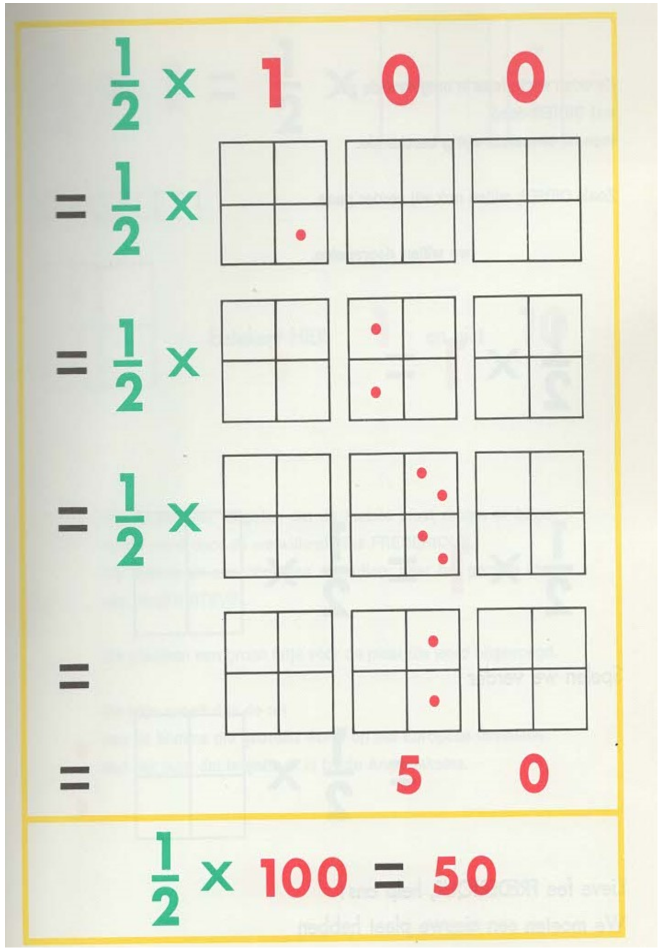
En hier heb ik honderd!

= 1 0 0

Bezeten door de duivel van de grote getallen, vraagt DIDIER nog meer platen. En nog, en nog!
Men moet de opwinding van DIDIER kalmeren opdat hij uit zijn ontdekking profijt zou kunnen halen.

Bron: Georges Papy (1968) *Minicomputer* Bruxelles IVAC (p149, p150 en p151)

Decimalen met de minicomputer


$\frac{1}{2} \times$ 1 0 0

$= \frac{1}{2} \times$

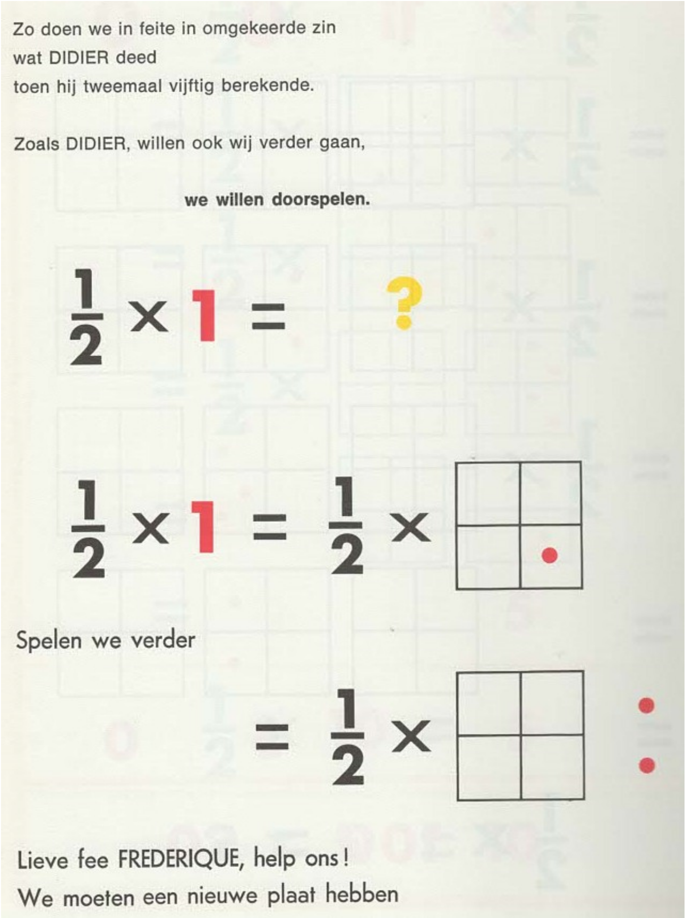
$= \frac{1}{2} \times$

$= \frac{1}{2} \times$

$=$

$=$ 5 0

$\frac{1}{2} \times 100 = 50$


Zo doen we in feite in omgekeerde zin
wat DIDIER deed
toen hij tweemaal vijftig berekende.

Zoals DIDIER, willen ook wij verder gaan,

we willen doorspelen.

$\frac{1}{2} \times 1 =$?

$\frac{1}{2} \times 1 = \frac{1}{2} \times$

Spelen we verder

$= \frac{1}{2} \times$

Lieve fee FREDERIQUE, help ons!
We moeten een nieuwe plaat hebben


$\frac{1}{2} \times 1 = \frac{1}{2} \times$

OPGELET!

betekent HIER 1 en niet 10

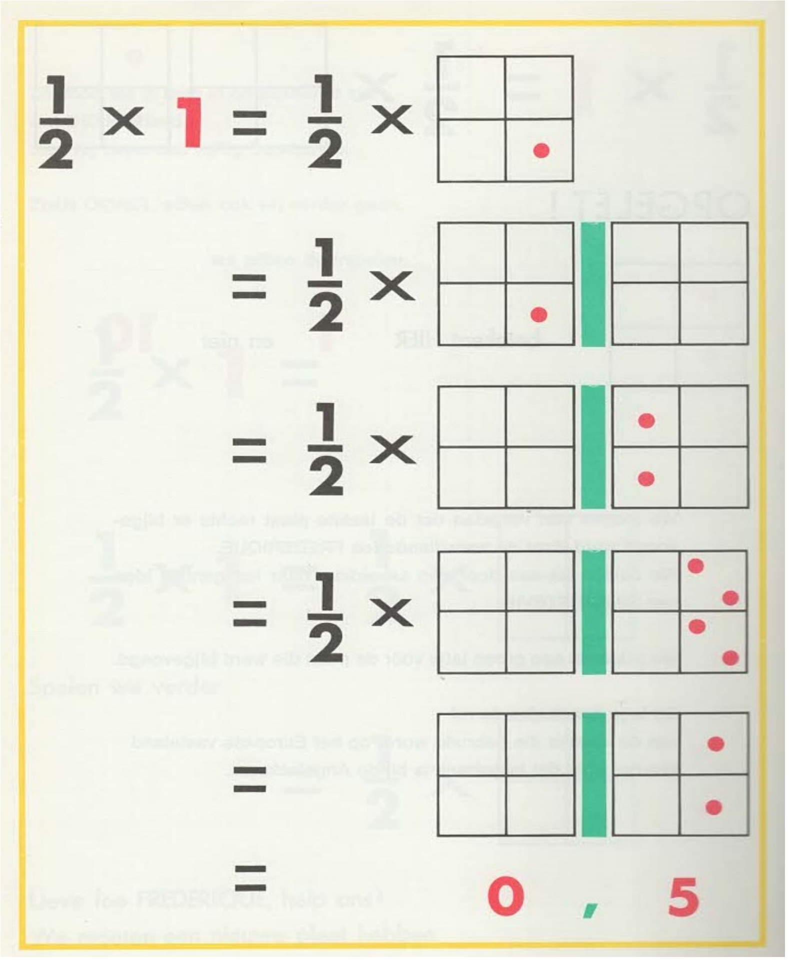
We mogen niet vergeten dat de laatste plaat rechts er bijgevoegd werd door de welwillende fee FREDERIQUE.
We duiden dit aan door een scheiding, naar het geniale idee van SIMON STEVIN.

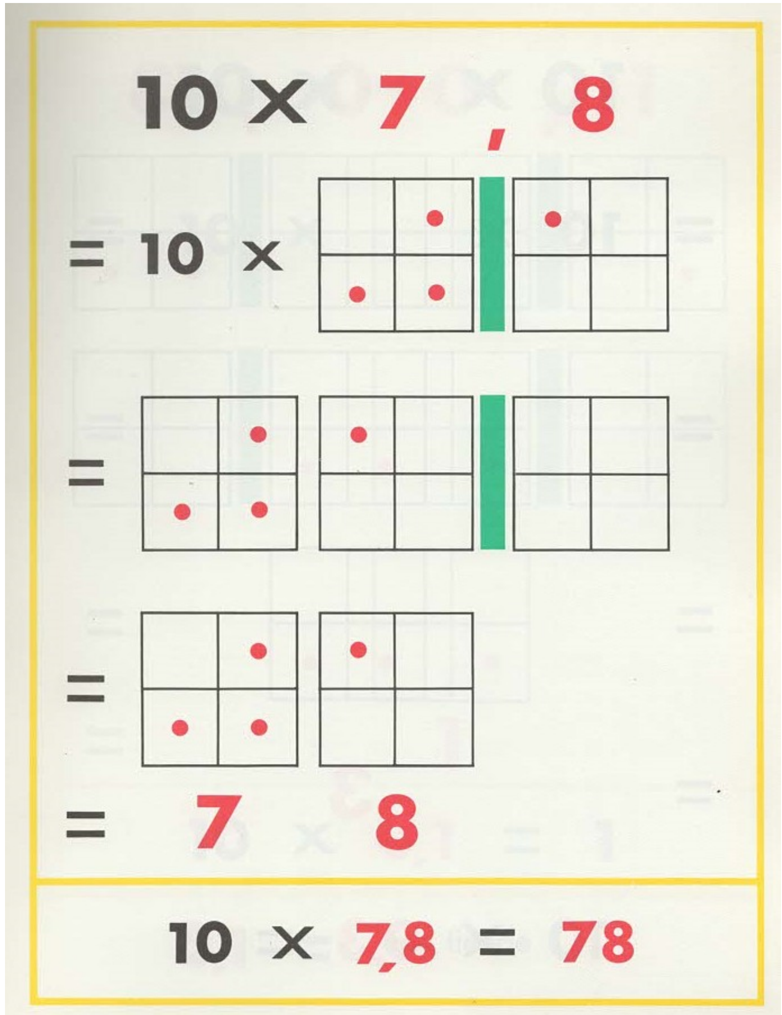
We plaatsen een groen latje vóór de plaat die werd bijgevoegd.

Dit latje speelt dus de rol
van de komma die gebruikt wordt op het Europese vasteland
van het punt dat in gebruik is bij de Angelsaksers.

Bron: Georges Papy (1968) *Minicomputer* Bruxelles IVAC(p161, p162 en p163)

Decimalen met de minicomputer





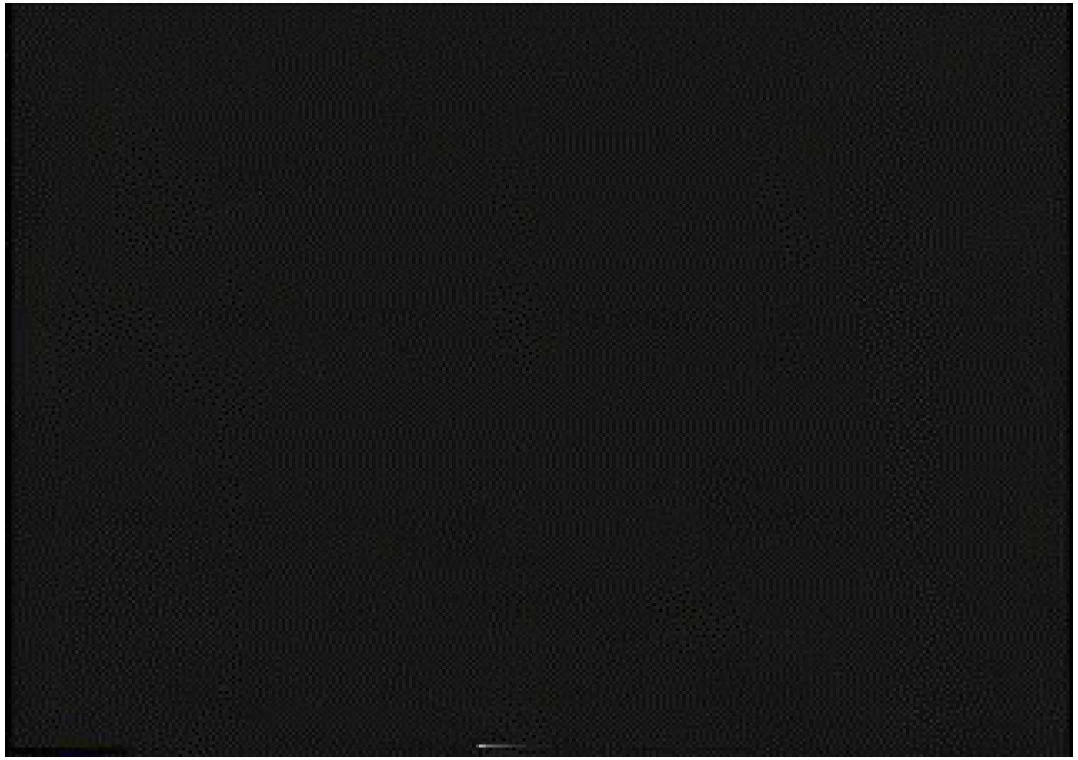
Bron: Georges Papy (1968) *Minicomputer* Bruxelles IVAC (p164 en p167)

KU LEUVEN

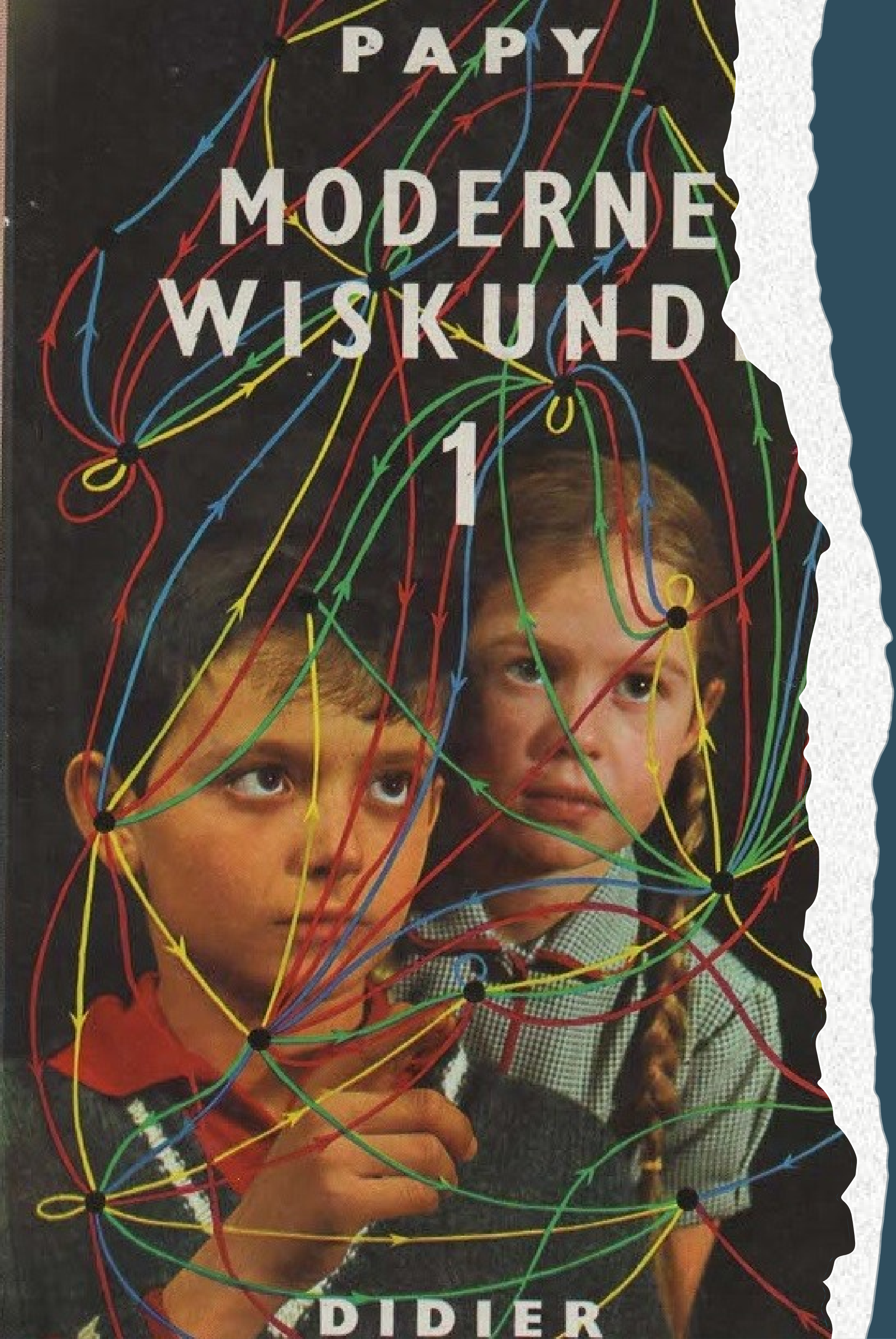
Frédérique’s experimenten met de minicomputer

- Bron: Frédérique Papy (1969) *Minicomputer* Educational studies in Mathematics 2(2/3) Addresses of the First International Congress on Mathematical Education 333-345
- Lenger werd meermaals uitgenodigd om advies en demonstratie lessen te geven in de VS in het kader van het project *Comprehensive School Mathematics Program* CSMP
- Doel CSMP: moderniseren van de inhoud en de onderwijsmethoden van het wiskundeonderwijs

Comprehensive School Mathematics Program CSMP



Bron: http://stern.buffalostate.edu/Movies/index.html



Mathématique Moderne

- Handboekenreeks Mathématique Moderne (MM)
- Auteur Papy met medewerking van Frédérique
- 6 volumes voorzien, 5 verschenen tussen 1963 en 1967
- Vertalingen in verschillende Europese en niet-Europese talen

- Bron: Dirk De Bock en Geert Vanpaemel (2019) Rods, sets and arrows in de reeks History of mathematics education Springer
- Foto: kaft Moderne Wiskunde 1

Mathématique Moderne 1

- Start met verzamelingenleer (eerste vijf hoofdstukken)
- Inleiding tot meetkunde, gebaseerd op verzamelingenleer (hoofdstuk 6)
- Relaties, voorgesteld met behulp van grafen, inclusief functies en transformaties van het vlak (hoofdstukken 7-15)
- Kardinaalgetallen, inclusief definitie van de natuurlijke getallen en de hoofdstelling van Dedekind (hoofdstuk 16)
- De bewerkingen optellen en vermenigvuldigen worden ingevoerd met behulp van functies (hoofdstukken 17 en 18)
- Binair getallensysteem en definitie van de gehele getallen (hoofdstukken 19-20)
- Equipollenties, verschuivingen, puntsymmetrieën en groepen (hoofdstukken 21-24)

Kardinaalgetallen in MM1

DEFINITIE 1. — *Men zegt dat de verzamelingen E en F* **gelijkmachtig** *(of* **equipotent***) zijn of dat ze* **evenveel elementen** *bevatten of ook dat ze* **hetzelfde kardinaalgetal** *hebben asa er een bijectie van E op F bestaat.*

Men schrijft dan $E \# F$ of

$$\#E = \#F$$

(Lees : het kardinaalgetal van E = het kardinaalgetal van F).

$$A \# B \iff \text{er bestaat een bijectie van } A \text{ op } B \iff \#A = \#B$$

Bron: Georges Papy (1965) *Moderne Wiskunde 1* Didier (p263 en p240)

2 — DE NATUURLIJKE GETALLEN

Elke verzameling die gelijkmachtig is met de lege verzameling, is leeg. *Men noemt het kardinaalgetal van de lege verzameling* **nul** *en men schrijft*

$$0 = \#\phi .$$

Alle singletons zijn gelijkmachtig : *men noemt* **een** en men schrijft 1 *het kardinaalgetal der singletons.*

Zo :

$$1 = \#\{0\} .$$

Daar de singletons niet leeg zijn

$$0 \neq 1 .$$

en $\{0, 1\}$ is een *paar.*

Alle paren zijn gelijkmachtig. *Men noemt* **twee** en men schrijft 2 *het kardinaalgetal der paren.*

In 't bijzonder

$$2 = \#\{0, 1\} .$$

De getallen 0, 1, 2 werden gedefinieerd door de formules

$$\begin{aligned} 0 &= \#\phi \\ 1 &= \#\{0\} \\ 2 &= \#\{0, 1\} \end{aligned}$$

Men kan zo verder gaan

$$\begin{aligned} 3 &= \#\{0, 1, 2\} \\ 4 &= \#\{0, 1, 2, 3\} \\ 5 &= \#\{0, 1, 2, 3, 4\} \\ &\dots \\ 27 &= \#\{0, 1, 2, 3, \dots, 26\} \\ &\dots \\ 1.000.000.000 &= \#\{0, 1, 2, 3, \dots, 999.999.999\} \\ &\dots \end{aligned}$$

Je zult gemakkelijk aannemen dat de getallen 0, 1, 2, 3... die alzo bepaald zijn, twee aan twee verschillend zijn.

Deze getallen noemt men **natuurlijke getallen.**

Hun verzameling wordt door ω aangeduid.

Kardinaalgetallen in MM1

3 — ONEINDIGE VERZAMELINGEN

Men noemt **eindige verzameling** elke verzameling waarvan het kardinaalgetal een natuurlijk getal is.

Elke niet-eindige verzameling is een **oneindige verzameling.**

De verzameling ω is een oneindige verzameling.

— Geef andere oneindige verzamelingen.

— Het vlak Π is een oneindige verzameling van punten.
Elke rechte lijn is een oneindige verzameling van punten.
Als a en b verschillende punten zijn, dan is $[a, b]$ een oneindige verzameling punten.
$\mathfrak{L}$ is een oneindige verzameling rechte lijnen.
Voor elke rechte lijn D is *rich* D een oneindige verzameling rechte lijnen.
Voor elk punt x is de verzameling $\mathfrak{L}_x$ van de rechte lijnen die x bevatten, oneindig.
De verzameling 2ω der even natuurlijke getallen is oneindig.

4 — HET GETAL δ

We noemen δ het kardinaalgetal van ω.

$$\delta = \# \omega = \# \{0, 1, 2, 3, \ldots\}.$$

We weten dat

twee verzamelingen hetzelfde kardinaalgetal hebben asa er een bijectie bestaat die de ene op de andere afbeeldt.

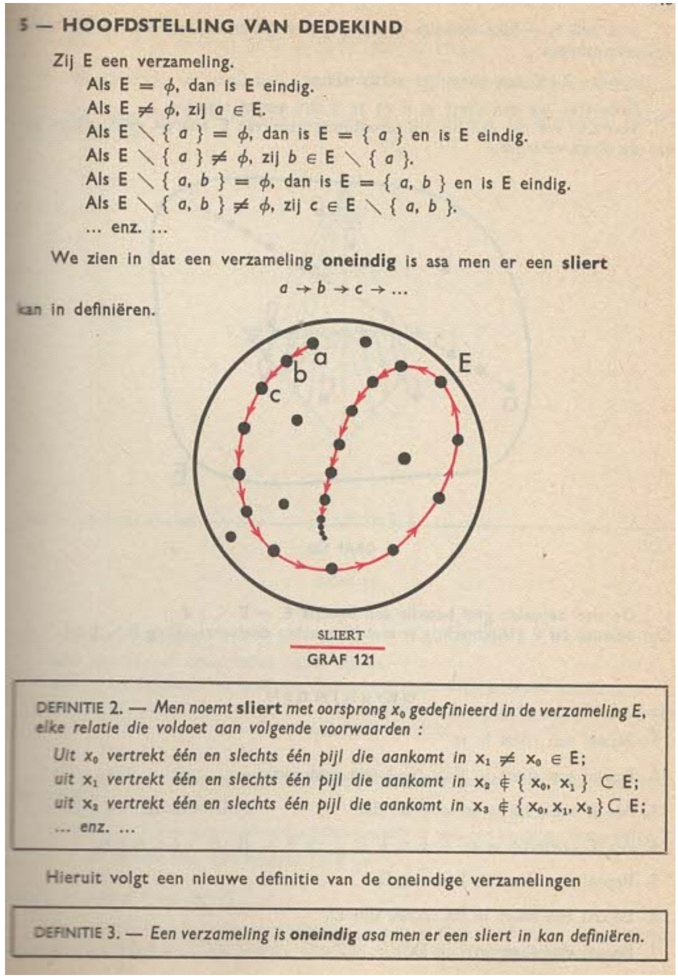
De afbeelding $\omega \to 2\omega : x \to 2x$ is een bijectie.

Dus $$\# 2\omega = \# \omega = \delta.$$

Zo hebben we bewezen dat de *oneindige verzameling* ω *hetzelfde kardinaalgetal heeft als één van haar echte deelverzamelingen.*

Bron: Georges Papy (1965) *Moderne Wiskunde 1* Didier (p241)

Hoofdstelling van Dedekind in MM1



5 — HOOFDSTELLING VAN DEDEKIND

Zij E een verzameling.

Als $E = \phi$, dan is E eindig.
Als $E \neq \phi$, zij $a \in E$.
Als $E \setminus \{ a \} = \phi$, dan is $E = \{ a \}$ en is E eindig.
Als $E \setminus \{ a \} \neq \phi$, zij $b \in E \setminus \{ a \}$.
Als $E \setminus \{ a, b \} = \phi$, dan is $E = \{ a, b \}$ en is E eindig.
Als $E \setminus \{ a, b \} \neq \phi$, zij $c \in E \setminus \{ a, b \}$.
... enz. ...

We zien in dat een verzameling **oneindig** is asa men er een **sliert**

$$a \to b \to c \to \dots$$

kan in definiëren.

SLIERT

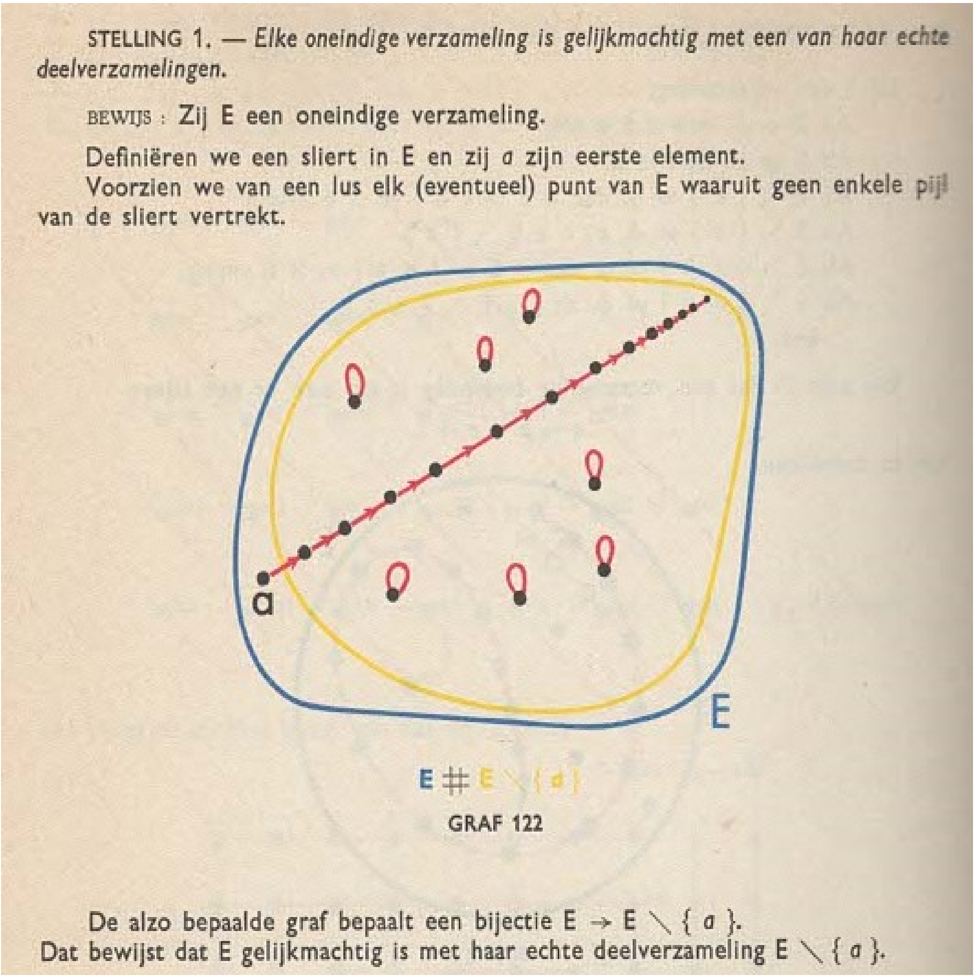
GRAF 121

DEFINITIE 2. — *Men noemt* **sliert** *met oorsprong x_0 gedefinieerd in de verzameling E, elke relatie die voldoet aan volgende voorwaarden :*

Uit x_0 vertrekt één en slechts één pijl die aankomt in $x_1 \neq x_0 \in E$;
uit x_1 vertrekt één en slechts één pijl die aankomt in $x_2 \notin \{ x_0, x_1 \} \subset E$;
uit x_2 vertrekt één en slechts één pijl die aankomt in $x_3 \notin \{ x_0, x_1, x_2 \} \subset E$;
... enz. ...

Hieruit volgt een nieuwe definitie van de oneindige verzamelingen

DEFINITIE 3. — *Een verzameling is* **oneindig** *asa men er een sliert in kan definiëren.*



STELLING 1. — *Elke oneindige verzameling is gelijkmachtig met een van haar echte deelverzamelingen.*

BEWIJS : Zij E een oneindige verzameling.

Definiëren we een sliert in E en zij a zijn eerste element.
Voorzien we van een lus elk (eventueel) punt van E waaruit geen enkele pijl van de sliert vertrekt.

$E \# E \setminus \{ a \}$

GRAF 122

De alzo bepaalde graf bepaalt een bijectie $E \to E \setminus \{ a \}$.
Dat bewijst dat E gelijkmachtig is met haar echte deelverzameling $E \setminus \{ a \}$.

Bron: Georges Papy (1965) *Moderne Wiskunde 1* Didier (p243 en p244)

Hoofdstelling van Dedekind in MM1

STELLING 2. — *Elke verzameling die gelijkmachtig is met een van haar echte delen is oneindig.*

BEWIJS : Zij E een verzameling die gelijkmachtig is met een van haar echte delen P.

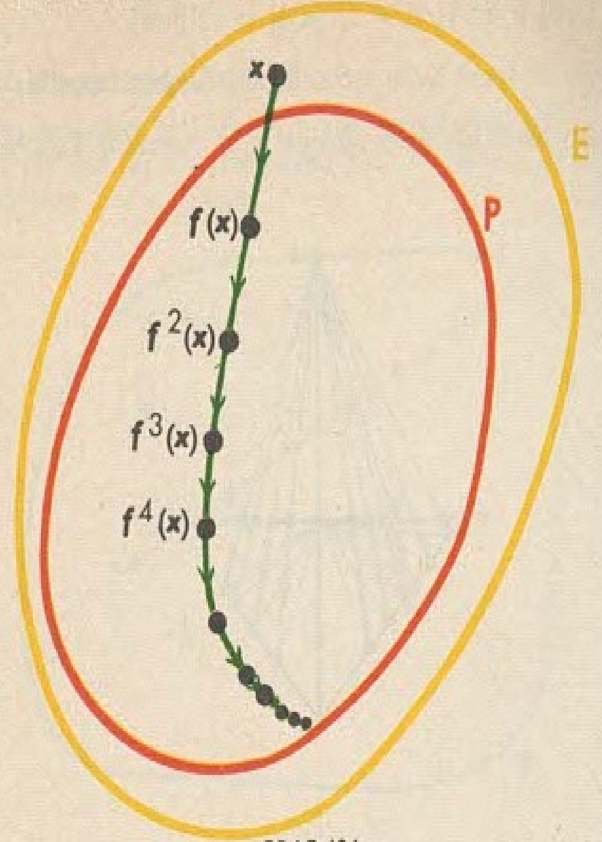
Er bestaat dus een bijectie $f : E \to P$.
Zij $x \in E \setminus P$.
$f(x) \in P$ en dus $f(x) \neq x$.

De bijectie beeldt twee verschillende punten x, $f(x)$ af op twee verschillende punten $f(x)$, $f^2(x) = f(f(x))$ van P. Dus zijn x, $f(x)$ en $f^2(x)$ verschillend, enz.

Door de stellingen 1 en 2 samen te vatten verkrijgen we

HOOFDSTELLING 2 **(Dedekind). — Een verzameling is oneindig asa zij gelijkmachtig is met een van haar echte delen.**

Zo construeren we een sliert in E, dus is E oneindig.

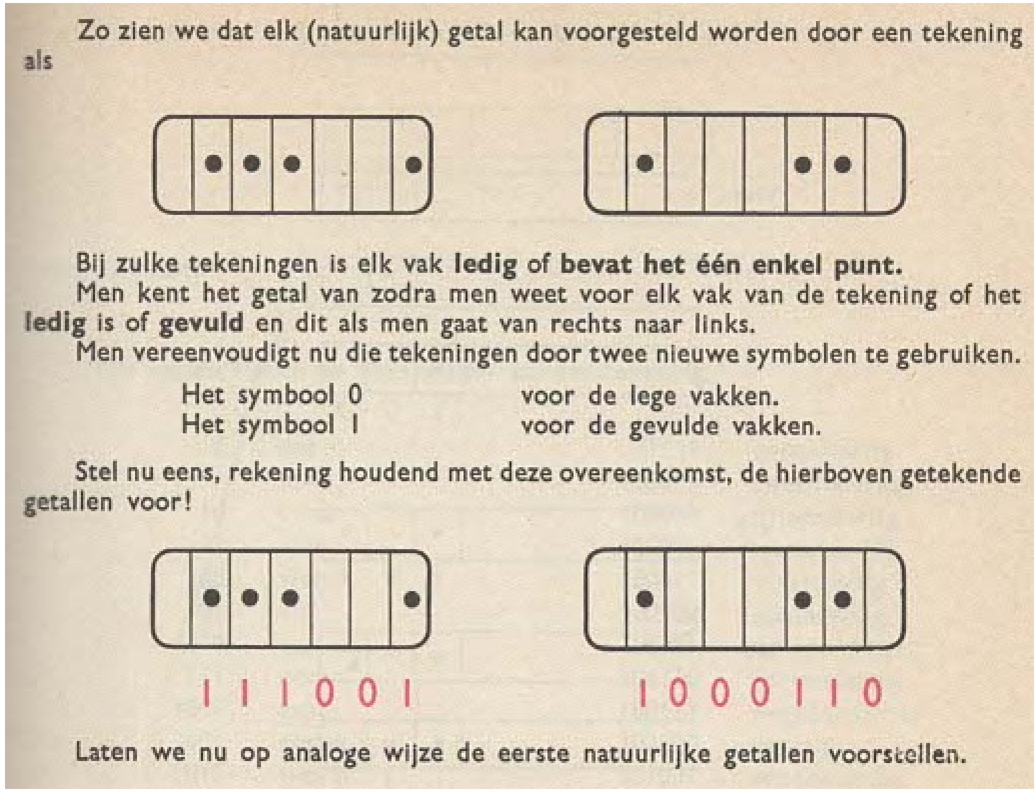


GRAF 124

Bron: Georges Papy (1965) *Moderne Wiskunde 1* Didier (p245 en p246)

KU LEUVEN

Binair getallensysteem in MM1



Zo zien we dat elk (natuurlijk) getal kan voorgesteld worden door een tekening als

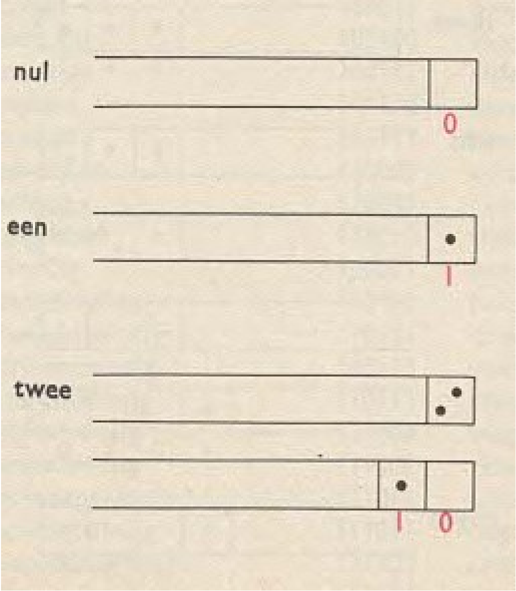
Bij zulke tekeningen is elk vak **ledig** of **bevat het één enkel punt.**
Men kent het getal van zodra men weet voor elk vak van de tekening of het **ledig** is of **gevuld** en dit als men gaat van rechts naar links.
Men vereenvoudigt nu die tekeningen door twee nieuwe symbolen te gebruiken.

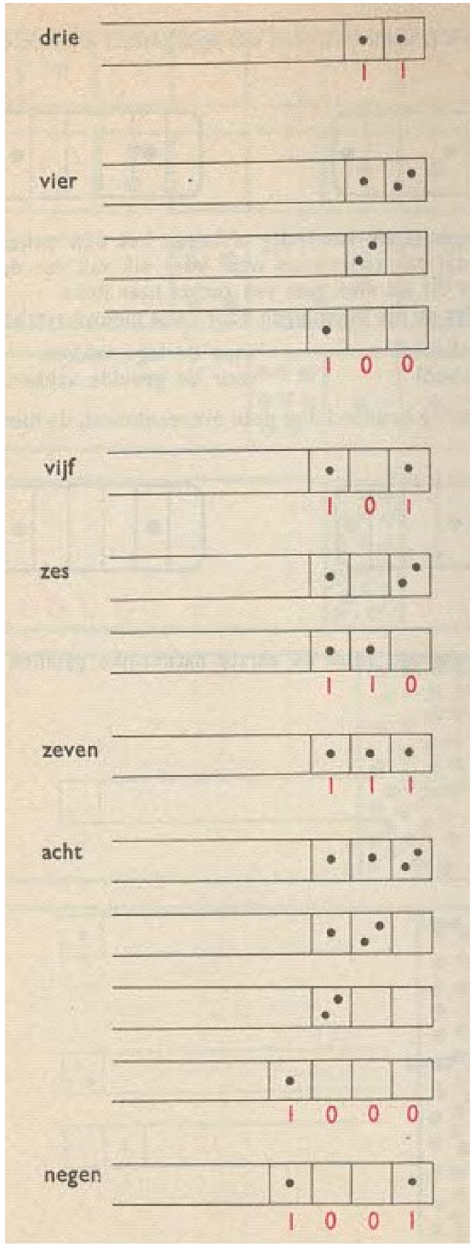
Het symbool 0 voor de lege vakken.
Het symbool I voor de gevulde vakken.

Stel nu eens, rekening houdend met deze overeenkomst, de hierboven getekende getallen voor!

I I I 0 0 I   I 0 0 0 I I 0

Laten we nu op analoge wijze de eerste natuurlijke getallen voorstellen.





Bron: Georges Papy (1965) *Moderne Wiskunde 1* Didier (p301 en p302)

Optellen van binaire getallen in MM1

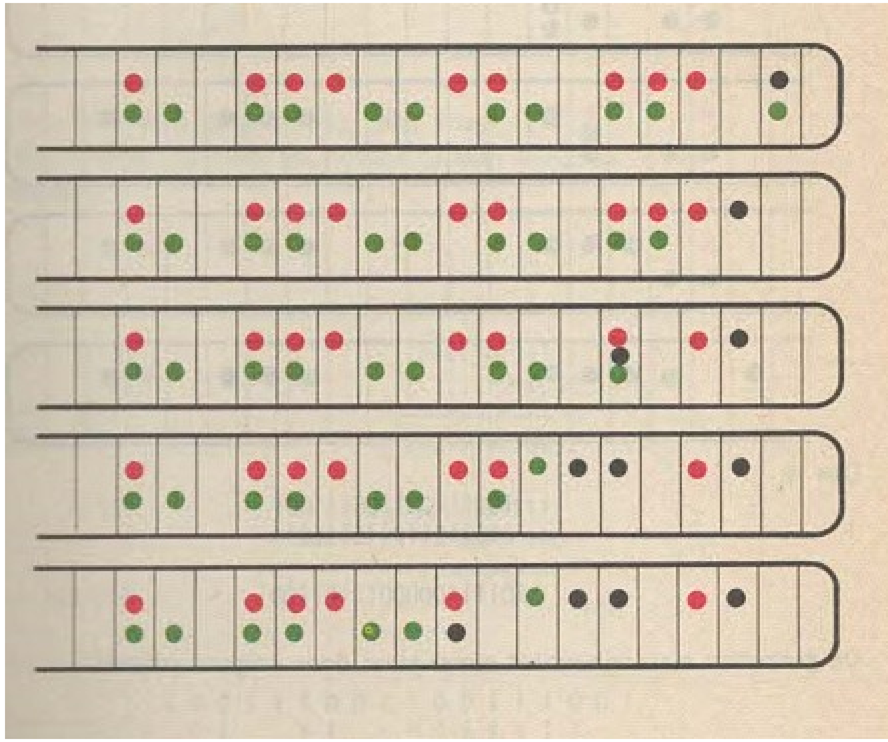
3 — OPTELLING IN HET TWEETALLIG STELSEL

We willen volgende (binaire) getallen optellen :

100111001100111001
110110110110110011

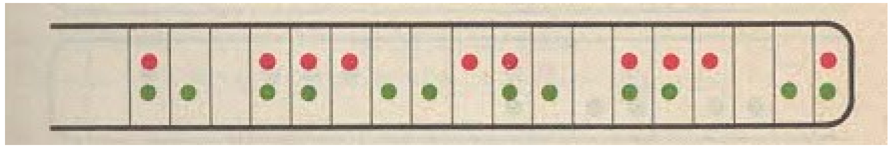
We stellen die getallen voor door rode en groene schijfjes op het telraam.

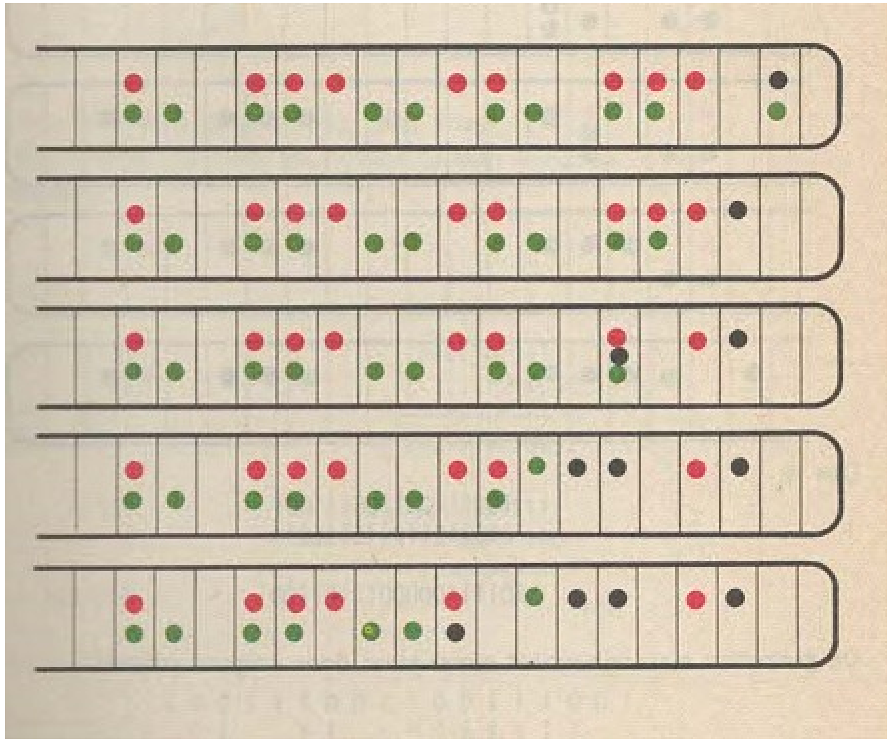
We passen nu de regel van het tweetallig stelsel toe : een schijf in een vak stelt het dubbele voor van een schijf in het vak er rechts juist naast.
We stellen in het zwart de schijven voor die in een vak binnenkomen.

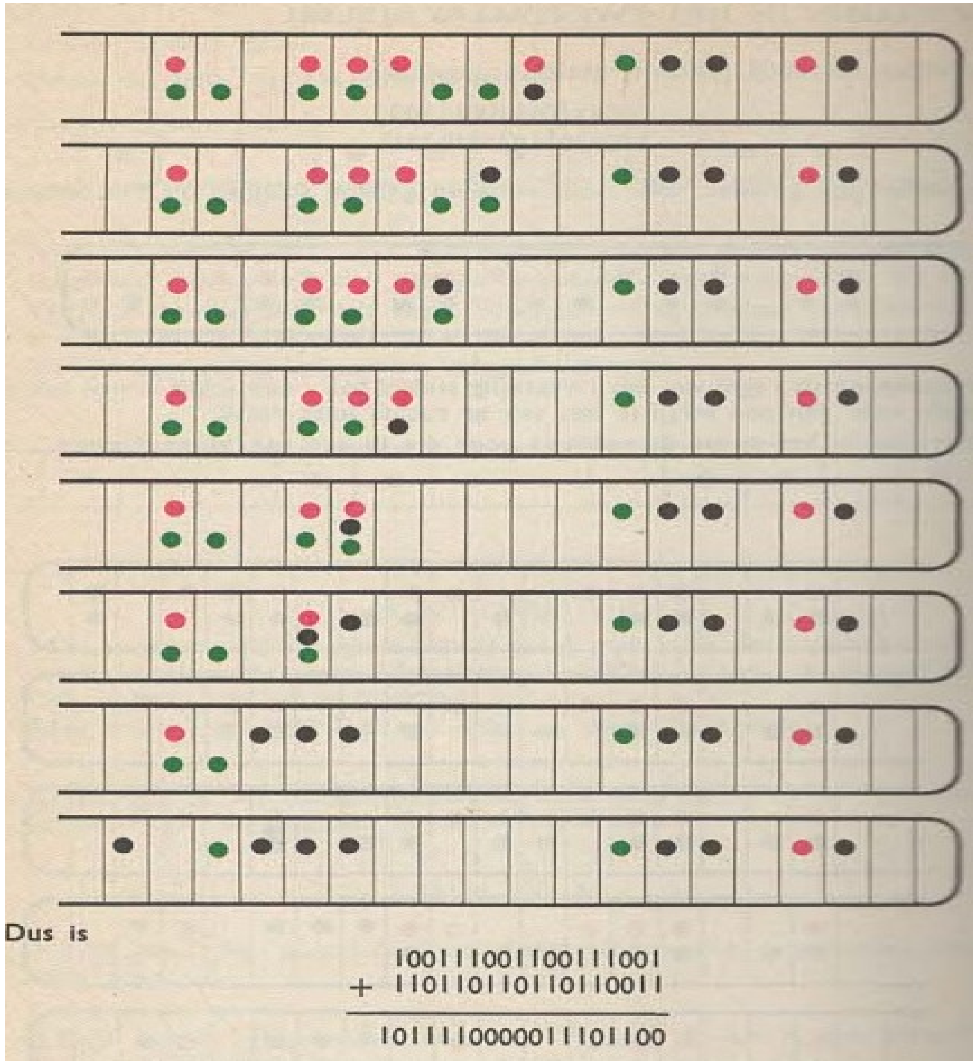


Bron: Georges Papy (1965) *Moderne Wiskunde 1* Didier (p307)

Optellen van binaire getallen in MM1



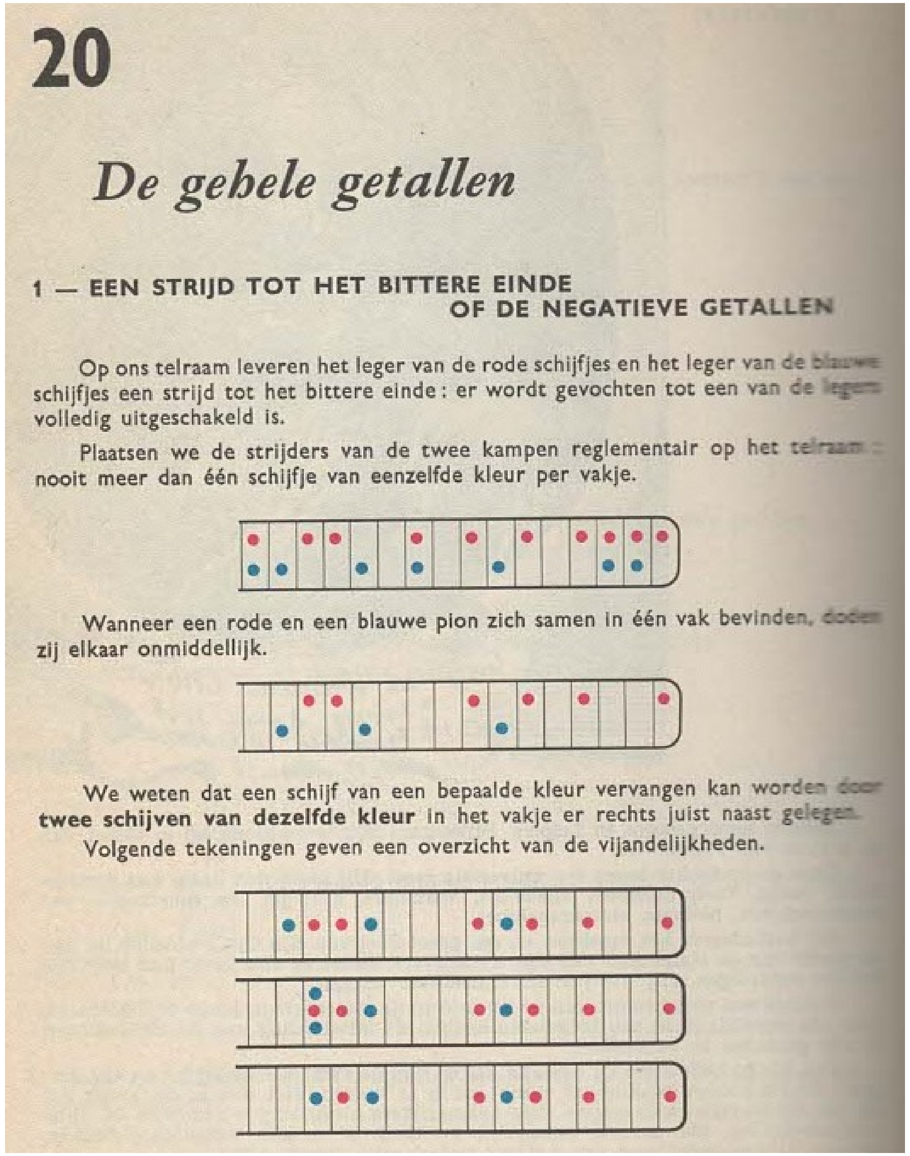




Bron: Georges Papy (1965) *Moderne Wiskunde 1* Didier (p307 en p308)

KU LEUVEN

De gehele getallen in MM1


20

De gehele getallen

1 — EEN STRIJD TOT HET BITTERE EINDE
OF DE NEGATIEVE GETALLEN

Op ons telraam leveren het leger van de rode schijfjes en het leger van de blauwe schijfjes een strijd tot het bittere einde : er wordt gevochten tot een van de legers volledig uitgeschakeld is.

Plaatsen we de strijders van de twee kampen reglementair op het telraam : nooit meer dan één schijfje van eenzelfde kleur per vakje.

Wanneer een rode en een blauwe pion zich samen in één vak bevinden, doden zij elkaar onmiddellijk.

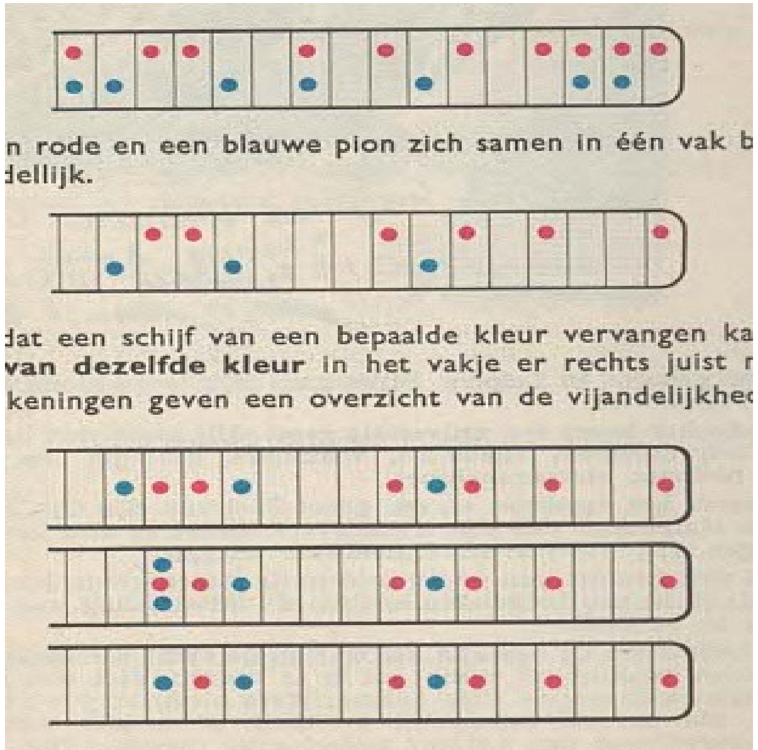
We weten dat een schijf van een bepaalde kleur vervangen kan worden door **twee schijven van dezelfde kleur** in het vakje er rechts juist naast gelegen.

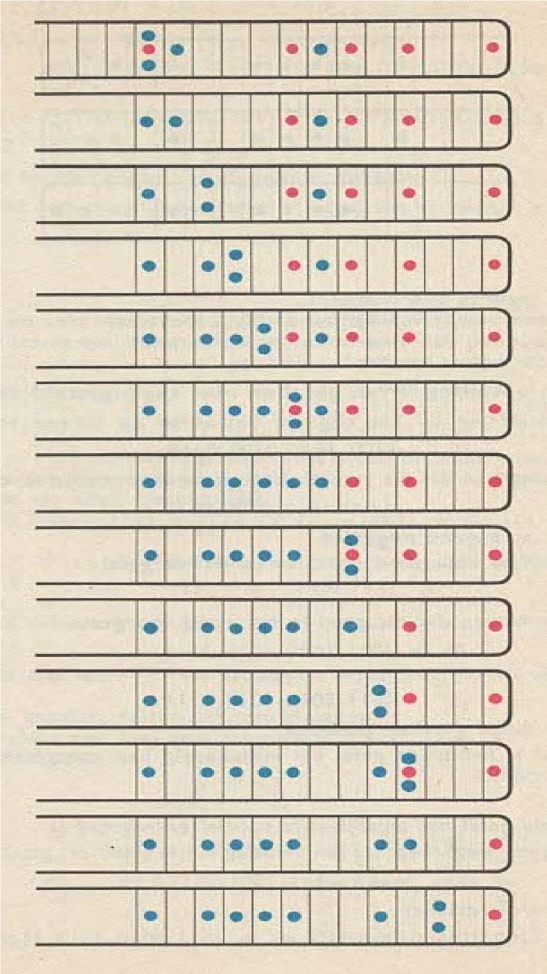
Volgende tekeningen geven een overzicht van de vijandelijkheden.

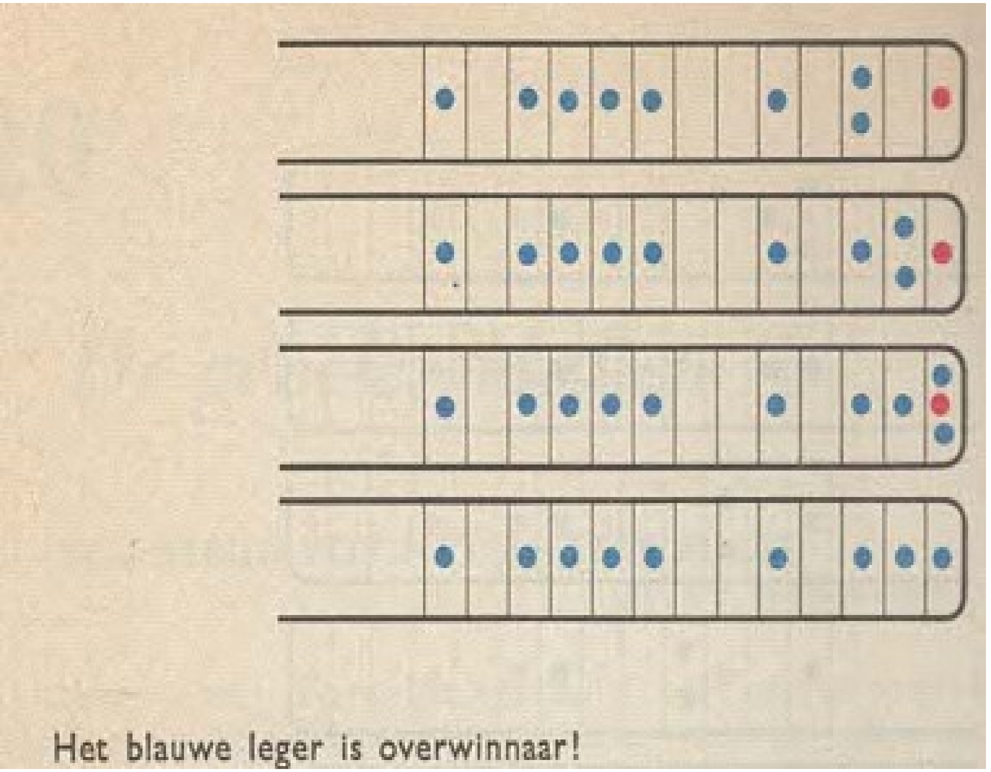
Bron: Georges Papy (1965) *Moderne Wiskunde 1* Didier (p316)

KU LEUVEN

De gehele getallen in MM1







Bron: Georges Papy (1965) *Moderne Wiskunde 1* Didier (p316, p317 en p318)

KU LEUVEN

Mathématique Moderne 2

- Het vlak en de structuur op het vlak (eerste vijf hoofdstukken)
- Reële getallen, orde en optelling (hoofdstukken 6 en 7)
- Stelling van Thales, homothetieën (hoofdstukken 8 en 9)
- Vermenigvuldigen van reële getallen, inclusief breuken (hoofdstuk 10)
- Scalaire vermenigvuldiging van vectoren (hoofdstuk 11)
- Geordend veld van de reële getallen (hoofdstukken 12-13)
- Rationale getallen (geordend veld, aftelbaarheid, dicht deel van) en irrationale getallen (hoofdstuk 14)
- Vectorruimten, rechte lijnen in het vlak, halve vlakken en ongelijkheden, verandering van ijk op een rechte lijn (hoofdstukken 15-18)

De gegradueerde rechte lijn en reële getallen in MM2

Aldus bekomen we een gegradueerde rechte lijn.

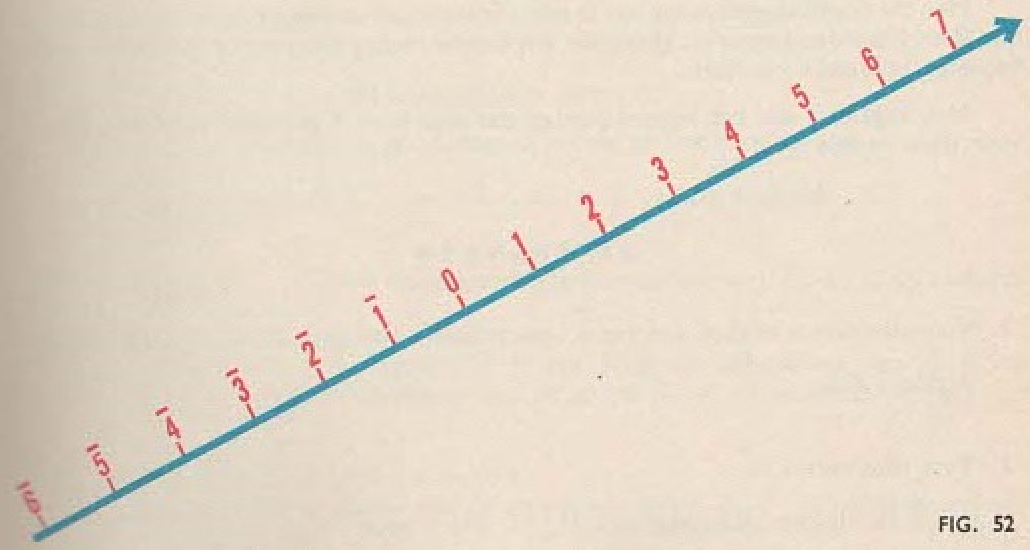


FIG. 52

Dikwijls zal het nuttig zijn de rechte lijn binair te gradueren.

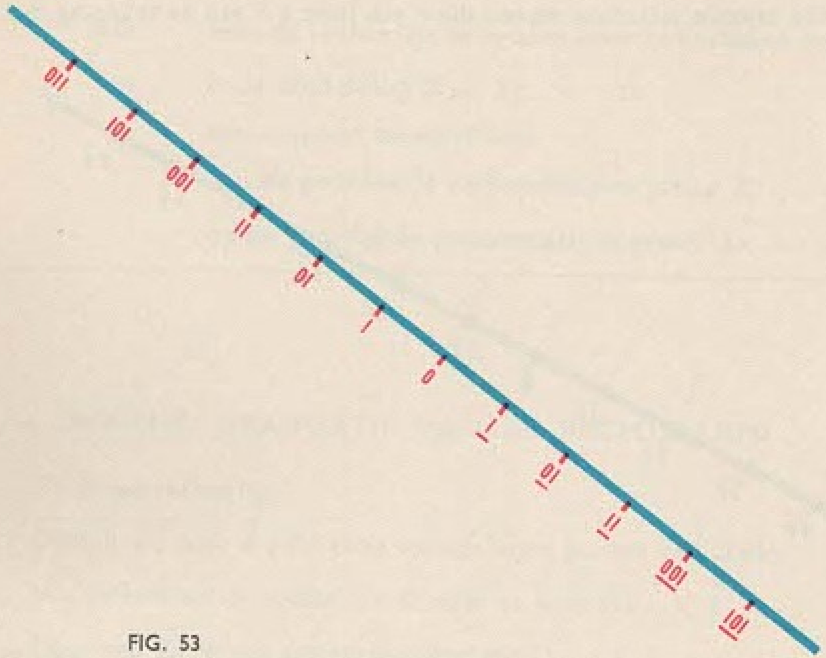


FIG. 53

De verzameling van de begrensde binaire getallen volstaat niet om alle punten van de rechte lijn D_{01} te bepalen.

Elk reëel getal bepaalt één en slechts één punt van D_{01}
Elk punt van D_{01} wordt bepaald door één en slechts één reëel getal.

Bron: Georges Papy (1967) *Moderne Wiskunde 2* Didier (p53, p54, p95 en p105)

Vermenigvuldigen van begrensde binaire getallen in MM2

7 — VERMENIGVULDIGING VAN DE BEGRENSDE BINAIRE GETALLEN

Gegeven een begrensd binair getal $b = 101101,110111 > 0$

$$
\begin{array}{r}
101101,110111 \\
101101,110111 \\
\hline
\end{array}
$$

$$10b = (1 + 1)\,b = 1b + 1b = b + b = 1011011,101110$$

$$10\,(-b) = -(10b) = -1011011,10111$$

$$
\begin{aligned}
10 \times 1110,11101 &= 11101,1101 \\
10 \times 110111 &= 10 \times 110111,0 = 1101110 \\
10^4 \times 1110,11101 &= 10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 1110,11101 \\
&= 10 \times 10 \times 10 \times 11101,1101 \\
&= 10 \times 10 \times 111011,101 \\
&= 10 \times 1110111,01 \\
&= 11101110,1 \\
10^7 \times 1101,1101 &= 10^7 \times 1101,1101000 = 11011101000 \\
10^5 \times 0,001011 &= 000101,1 = 101,1 \\
10^3 \times 10111 &= 10^3 \times 10111,000 = 10111000 \\
10^3 \times (-1011,1011) &= 10 \times 10 \times 10 \times (-1011,1011) \\
&= 10 \times 10 \times (-10111,011) \\
&= 10 \times (-101110,11) \\
&= -1011101,1
\end{aligned}
$$

Men bekomt het produkt van een begrensd binair getal met 10^n, door de komma n plaatsen naar rechts te verzetten.

Bron: Georges Papy (1967) *Moderne Wiskunde 2* Didier (p310)

Vermenigvuldigen van begrensde binaire getallen in MM

Gegeven een begrensd binair getal a en $n \in \omega$

We willen het produkt $b = 10^{-n} . a$ berekenen.

$$b = 10^{-n} . a$$

$$\Updownarrow$$

$$b = (10^{n})^{-1} . a$$

$$\Updownarrow$$

$$a = 10^{n} . b$$

(§ 1, blz. 290)

(H. 10, § 6, eig. 2, blz. 220)

Men bekomt het produkt van een begrensd binair getal met 10^{-n} door de komma n plaatsen naar links te verzetten.

$$10^{-2} \times 1010{,}1011 = 10{,}101011$$

$$10^{-5} \times 10{,}11101 = 0{,}0001011101$$

$$10^{-6} = 10^{-6} \times 1 = 0{,}000001$$

$$10^{-n} = 10^{-n} \times 1 = 0{,}\underbrace{00 \ldots 01}_{n \text{ cijfers}} \qquad (\text{voor elke } n \in \omega_0)$$

$$10110{,}1101 = 101101101 \,.\, 10^{-4}$$

$$-1101{,}011011 = (-1101011011) \,.\, 10^{-6}$$

Bron: Georges Papy (1967) *Moderne Wiskunde 2* Didier (p311)

Stelling van Cantor in MM2

STELLING VAN CANTOR

Geen enkele rij elementen van]0; 1[bevat alle elementen van]0; 1[

Met andere woorden :

STELLING VAN CANTOR

]0; 1[is niet aftelbaar

BEWIJS :

Gegeven een rij elementen van]0; 1[

1) $0, b_1\, b_2\, b_3\, b_4\, b_5\, b_6\, b_7$ enz. $= b$
2) $0, c_1\, c_2\, c_3\, c_4\, c_5\, c_6\, c_7$ enz. $= c$
3) $0, d_1\, d_2\, d_3\, d_4\, d_5\, d_6\, d_7$ enz. $= d$
4) $0, e_1\, e_2\, e_3\, e_4\, e_5\, e_6\, e_7$ enz. $= e$
5) $0, f_1\, f_2\, f_3\, f_4\, f_5\, f_6\, f_7$ enz. $= f$
6) $0, g_1\, g_2\, g_3\, g_4\, g_5\, g_6\, g_7$ enz. $= g$
7) $0, h_1\, h_2\, h_3\, h_4\, h_5\, h_6\, h_7$ enz. $= h$

enz.

Deze rij bevat niet het reëel getal $a = 0, a_1\, a_2\, a_3\, a_4\, a_5\, a_6\, a_7$ enz. $\in\ ]0; 1[$ waar de cijfers a_i verschillend zijn van 0 en 9 en zó zijn dat

$a_1 \neq b_1$ zodat $a \neq b$
$a_2 \neq c_2$ zodat $a \neq c$
$a_3 \neq d_3$ zodat $a \neq d$
$a_4 \neq e_4$ zodat $a \neq e$
$a_5 \neq f_5$ zodat $a \neq f$
$a_6 \neq g_6$ zodat $a \neq g$
$a_7 \neq h_7$ zodat $a \neq h$

enz. h.m.b.w.

DEFINITIE

$$\boxed{\gamma = \#\, \mathbf{R} = \#\,]0; 1[}$$

Het kardinaalgetal γ wordt ook nog het **continuüm** genoemd.

]0; 1[is oneindig; dus $\delta \leq \gamma = \#\,]0; 1[$

en volgens de stelling van Cantor is $\delta \neq \gamma = \#\,]0; 1[$

Zodat $\delta < \gamma$

STELLING VAN CANTOR

R is niet aftelbaar

$$\boxed{\delta < \gamma = \#\, \mathbf{R}}$$

— Orden de kardinaalgetallen die je kent.

— $0 < 1 < 2 < \ldots < n < n + 1 < \ldots < \delta < \gamma$

$$\boxed{\begin{array}{c} \omega \subset \mathbf{Z} \subset \mathbf{Q} \subset \mathbf{R} \\ \omega \neq \mathbf{Z} \neq \mathbf{Q} \neq \mathbf{R} \\ \delta = \#\, \omega = \#\, \mathbf{Z} = \#\, \mathbf{Q} < \#\, \mathbf{R} = \gamma \end{array}}$$

Bron: Georges Papy (1967) *Moderne Wiskunde 2* Didier (p350 en p351)

Mathématique Moderne 3, 4, 5 en 6

- MM3: '*… et voici Euclide*', inclusief transformaties en groepen
- MM4: is nooit verschenen (zou over reële functies gaan)
- MM5: inleiding tot discrete wiskunde
- MM6: herhaling meetkunde voor 12- tot 15-jarigen (deel 1), het Euclidisch vectorvlak, inclusief matrices, determinanten en complexe getallen (deel 2)

Een korte blik naar de New Math in de VS

- In de jaren ‘50 werd de ontwikkeling van innovatieve programma’s voor het secundair onderwijs aangemoedigd
- University of Illinois Committee on School Mathematics (UICSM) was zo’n programma
- Natuurlijke getallen werden ingevoerd als klassen van verzamelingen die een één-op-één verband kennen
- Gehele getallen werden ingevoerd als equivalentieklassen van geordende paren van natuurlijke getallen
    - Positieve gehele getallen werden voorgesteld door paren waarin en negatieve getallen werden voorgesteld door paren waarin
    - 0 is gedefinieerd als de equivalentieklassen van alle paren

Gehele getallen volgens UICSM

[2.04] 02-22

An <u>integer</u> is a <u>class</u> of <u>all</u> the integer representatives which are equivalent to a given integer representative.

Thus, for example, the integer of which (3, 7) is a representative is a <u>class</u> of <u>all</u> integer representatives which are equivalent to (3, 7). Using dots to indicate indefinite continuation, we can represent this class by:

[(0, 4), (1, 5), (2, 6), (3, 7), (4, 8), (5,9), (6, 10), ...]

Where each successive pair is obtained from the previous pair by adding 1 to each natural number of the pair. (Prove that adding 1 to each member of the pair always gives another representative of the same integer.) Another example of an integer is the class:

[(15, 0), (16, 1), (17, 2), (18, 3), (19, 4), (20, 5), . .]

Bron: David Lindsay Roberts (2023) *The rise of the American New Math Movement: How national security anxiety and mathematical modernism disrupted the school curriculum* in Dirk De Bock (Ed) *Modern Mathematics An International Movement?* Springer

Besluit

- Mgr Georges Lemaître stelde een hybride getallensysteem voor, binaire tekens met decimale plaatsing in omgekeerde volgorde
- Georges De Witte stelde een getallensysteem met basis 16 voor
- Papy’s minicomputer is gebaseerd op het hybride getallensysteem van Lemaître, de tekens of symbolen zijn pionnen in vier vakken in een vierkant
- In Papy’s boekenreeks Mathématique Moderne worden natuurlijke getallen gedefinieerd als kardinaalgetallen van verzamelingen, gehele getallen als het resultaat van een ‘strijd tot het bittere eind’, reële getallen als metingen en rationale getallen als een dicht deel van de reële getallen
- UICSM definieerde natuurlijke getallen als klassen van verzamelingen en gehele getallen als equivalentieklassen

Referenties

- Dirk De Bock (2022) Frédérique Papy-Lenger, the mother of modern mathematics in Belgium in A. Karp Advances in the history of mathematics education, International studies in the history of mathematics and its teaching
- Dirk De Bock en Geert Vanpaemel (2019) Rods, sets and arrows in de reeks History of mathematics education Springer
- Georges De Witte (1956) Zal de mens het van de automaten leren? Technisch wetenschappelijk tijdschrift 25(2) Antwerpen
- Frédérique Papy (1969) *Minicomputer* Educational studies in Mathematics 2(2/3) Addresses of the First International Congress on Mathematical Education 333-345

Referenties (vervolg)

- Anton Glaser (1981) *History of binary and other nondecimal numeration*
- Georges Lemaître (1954) *Calculons sans fatigue* Ed. Nauwelaerts Louvain
- Georges Lemaître (1955) *Pourquoi de nouveaux chiffres?* Revue des Questions Scientifiques 126(3) 379-398
- Georges Papy (1968) *Minicomputer* Bruxelles IVAC
- Georges Papy (1965) *Moderne Wiskunde 1* Didier
- Georges Papy (1967) *Moderne Wiskunde 2* Didier
- David Lindsay Roberts (2023) *The rise of the American New Math Movement: How national security anxiety and mathematical modernism disrupted the school curriculum* in Dirk De Bock (Ed) *Modern Mathematics An International Movement?* Springer

Dank u voor uw aandacht
Vragen?