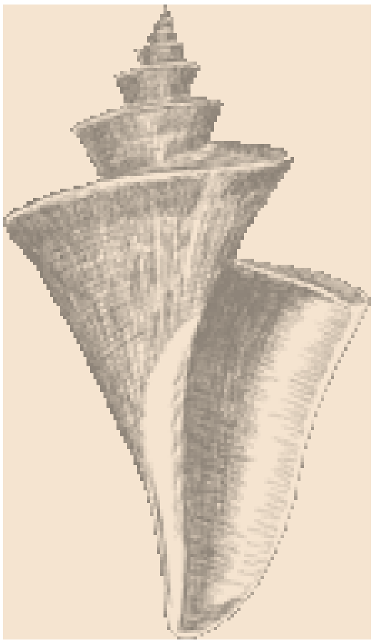
Nationale Wiskunde Dagen 2016

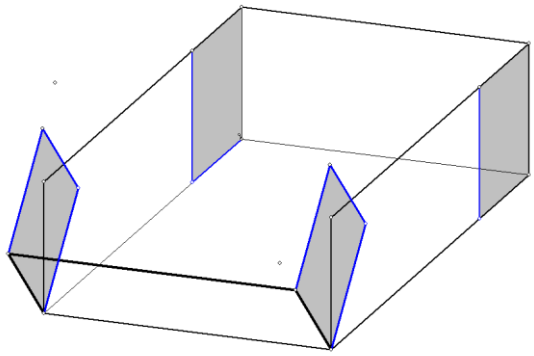
Hand – out   workshop

Van vlak naar volume



Marjan Botke & Rob van Oord

. doos zonder deksel



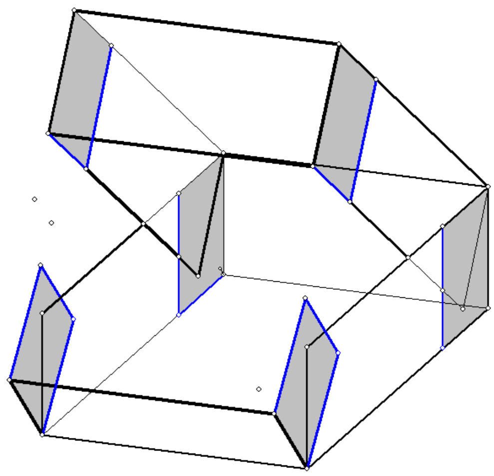
Neem een rechthoekig stuk papier waaruit de doos wordt gemaakt, waarvan de afmetingen vast staan.
Neem een A4-tje (30 bij 21 cm) of een rechthoek van b.v. 20 bij 13 cm.
Wat is de hoogte van de doos met maximale inhoud?

Vouw er een bakje zonder deksel mee met hoogte 5 cm.
Hoe groot is nu de inhoud?

Wat is het verband tussen de lengte cq de breedte van de doos en de gekozen hoogte?

Noem de hoogte x, en stel een formule op van de inhoud.
Voor welke waarde van x is de inhoud maximaal?

. doos met deksel



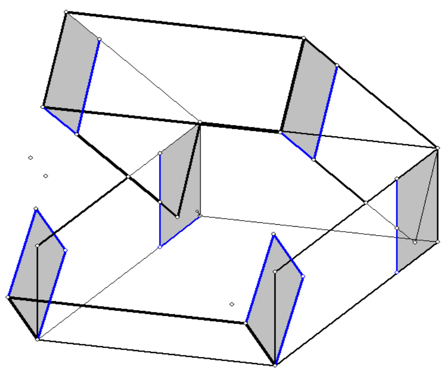
Neem een rechthoekig stuk papier van b.v. 30 bij 15 cm.
Wat is de hoogte van de doos met maximale inhoud?

Vouw er een doos mee waarbij de dekselrand ook helemaal over de doos past.
De hoogte van de deksel is dan net zo hoog als de doos zelf.
Neem de hoogte van de doos b.v. 4 cm.
Hoe groot is nu de inhoud?

Wat is het verband tussen de lengte cq de breedte van de doos en de gekozen hoogte?

Noem de hoogte x, en stel een formule op voor de inhoud.
Voor welke waarde van x is de inhoud maximaal?

. vierkante doos uit strook karton met gegeven breedte (pizzadoos)



Neem een strook papier van 15 cm breedte en 30 cm lengte.
Wat is de hoogte van de pizzadoos met maximale inhoud?

Vouw er een pizza doos uit met hoogte van 3 cm.
Je houdt een stukje van de strook over.
Hoe groot is nu de inhoud?

Wat is het verband tussen de lengte cq de breedte van de doos en de gekozen hoogte?

Noem de hoogte x, en stel een formule op voor de inhoud.
Voor welke waarde van x is de inhoud maximaal?

NWD 2016 workshop Van vlak naar volume antwoorden werkblad bakjes

. doos zonder deksel:

stel de afmetingen van het rechthoekig stuk papier (karton) a bij b

Inhoud = $x\cdot(a-2x)(b-2x) = 4x^3 - 2(a+b)x^2 + ab\cdot x$

max van Inhoud als Inhoud' = 0; $12x^2 - 4(a+b)x + ab = 0$

$D = 16(a+b)^2 - 48ab$; $x = \frac{4(a+b)-\sqrt{D}}{24}$ geeft max van Inhoud

bij a=30 en b=21 wordt dit $I = x(30-2x)(21-2x) = 4x^3 - 102x^2 + 630x$;

$I' = 12x^2 - 204x + 630 = 0$ geeft max als $x = \frac{204-\sqrt{11376}}{24} = 4{,}056$

. doos met deksel

stel de afmetingen van het rechthoekig stuk papier (karton) a bij b

Inhoud = $x \cdot ½\,(a-3x)(b-2x) = 3x^3 - (a + 1½b)x^2 + ½ab \cdot x$

max van Inhoud als Inhoud' = 0; $9x^2 - 2(a + 1½b)x + ½ab = 0$

$D = (2a+3b)^2 - 18ab$; $x = \frac{(2a+3b)-\sqrt{D}}{18}$ geeft max van inhoud

bij a=30 en b=15 wordt dit $I = ½x(30-3x)(15-2x) = 3x^3 - 52½x^2 + 225x$;

$I' = 9x^2 - 105x + 225$ geeft max als $x = \frac{105-\sqrt{2925}}{18} = 2{,}83$

. doos met vierkante bodem

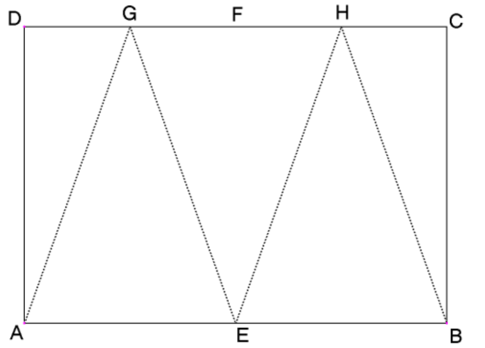
stel de breedte van de strook papier a

Inhoud = $x \cdot (a-2x)^2 = 4x^3 - 4ax^2 + a^2x^2$

max van Inhoud als Inhoud' = 0; $12x^2 - 8a \cdot x + a^2 = 0$

$D = 64a^2 - 48a^2 = 16a^2$; $x = \frac{8a-4a}{24} = \frac{a}{6}$ geeft max van inhoud

bij a=15 is inhoud max als de hoogte x = 2,5 cm en de bodem een vierkant van 10 bij 10 cm



. viervlak

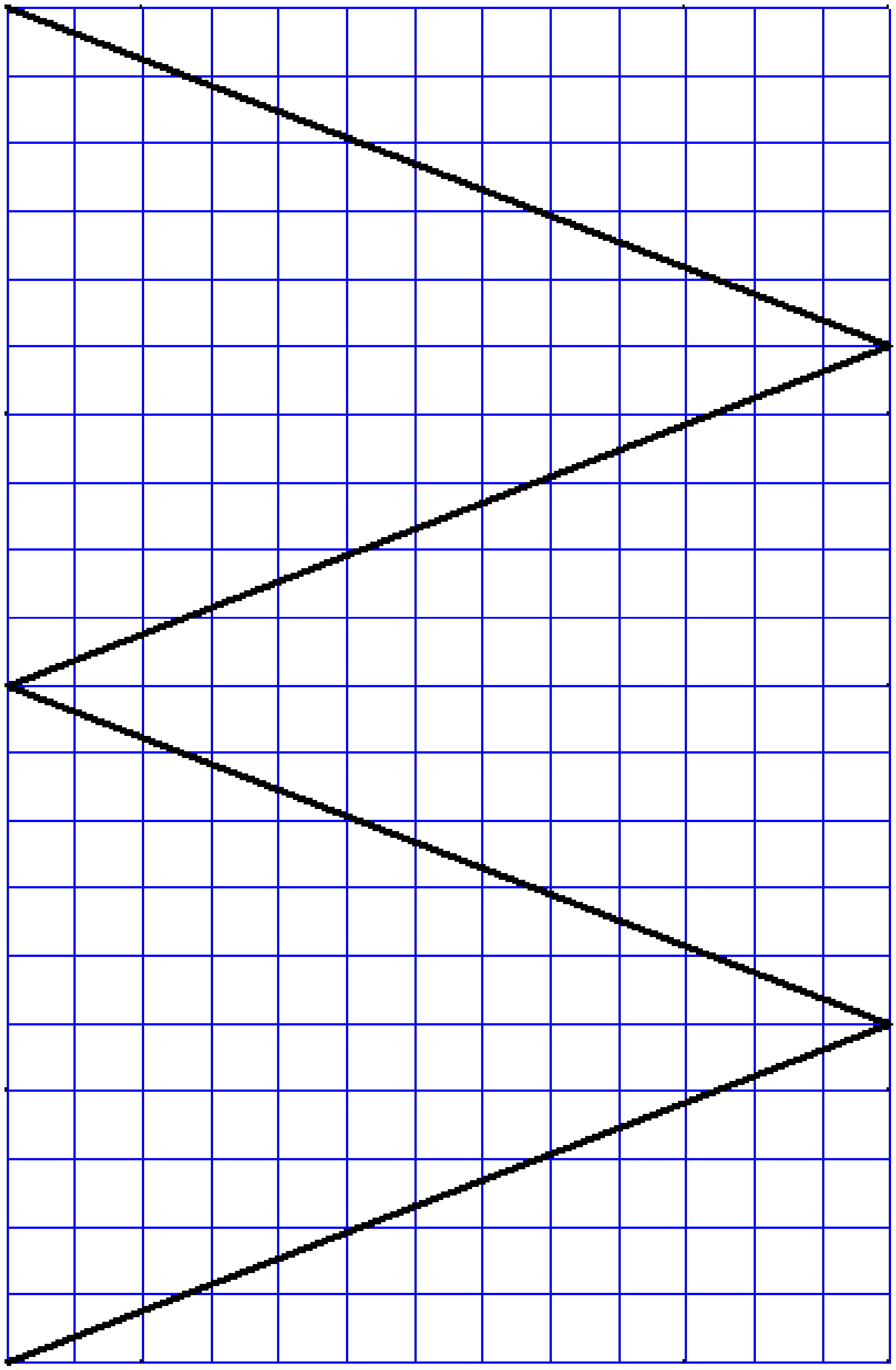
Vouw een viervlak uit een A4-tje of een rechthoek van 20 bij 13 cm.
Hoe groot is de inhoud?

Maak kleine knikvouwtjes voor het midden van AB, CD, DF en FC.
Vouw de lijnstukken AG, EG, EH en BH.

Vouw EA naar EB, GD naar GF en HC naar HF.

. ander viervlak

Je kunt ook op een andere manier een viervlak vouwen uit een A4-tje.
Met M het midden van AD en N het midden van BC, vouw EF, EM, FM, EN en FN, en breng de punten A, B, C en D bij elkaar. Je hebt dan viervlak EFMN.

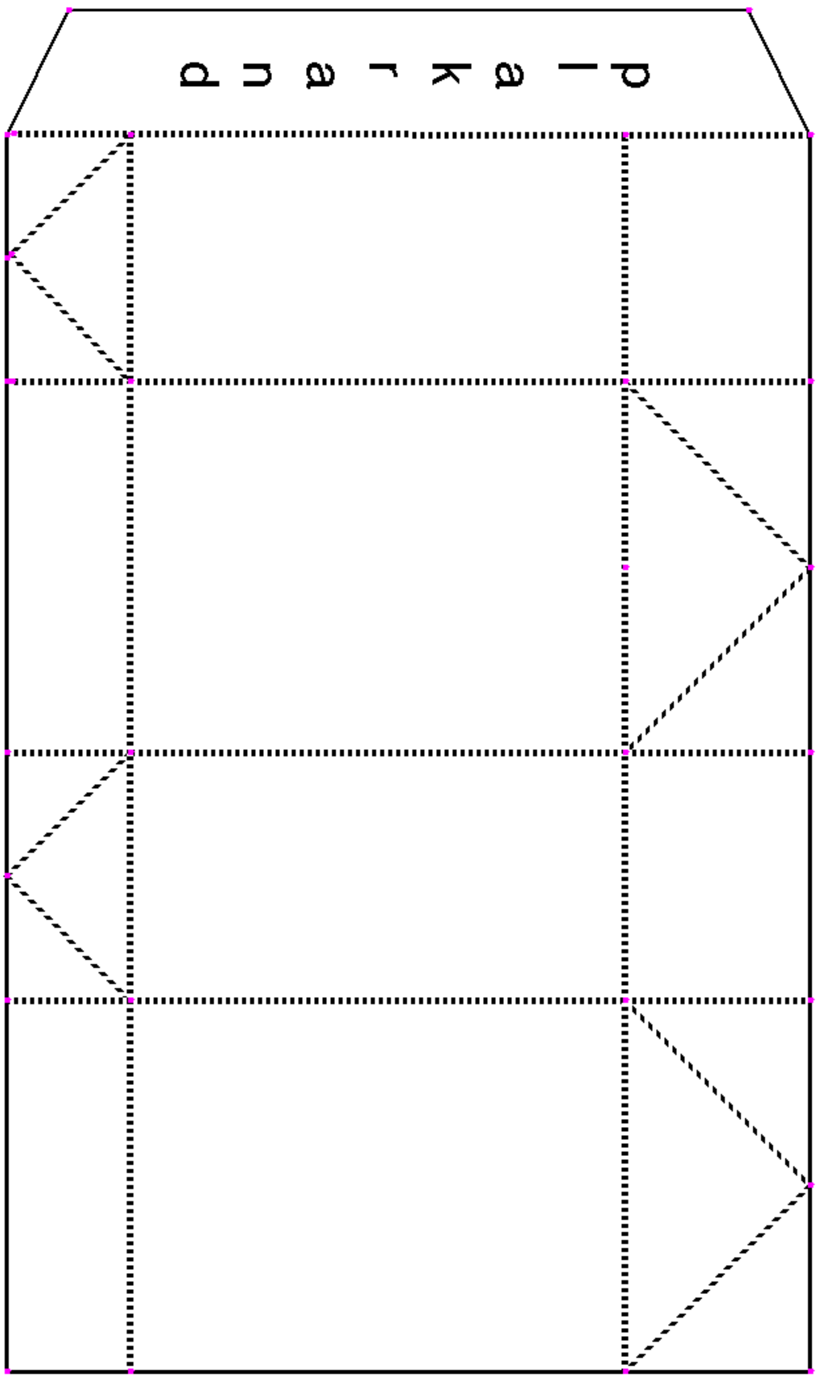


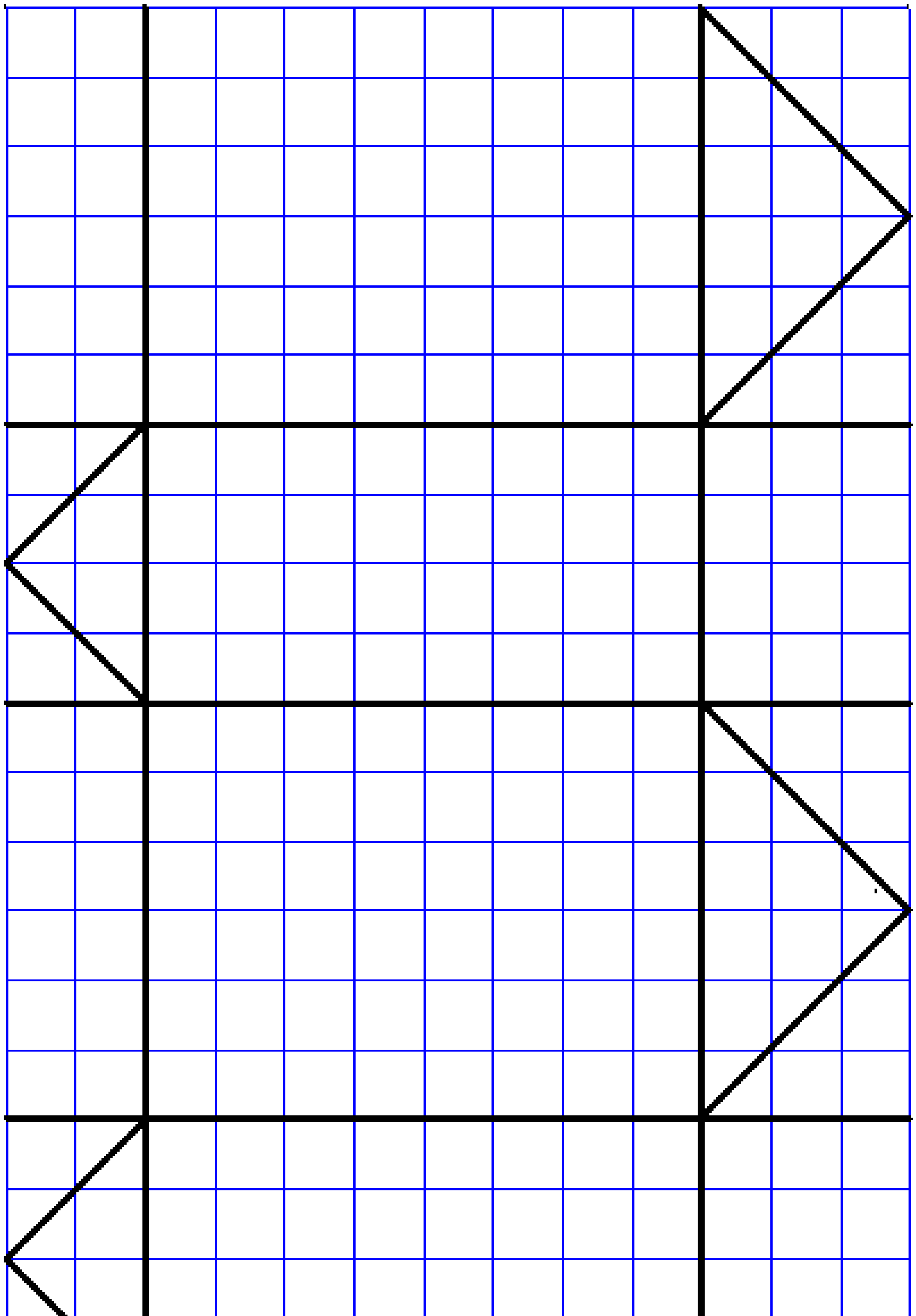
. cellofaan van koffiepakken

Hieronder zie je twee bouwplaten van een koffiepak uit een rechthoek van 20 bij 13 cm.
In de bouwplaten hebben de driehoekige flappen schuine zijden van 6 en 4 cm.
Knip hem uit en vouw de stippellijnen. De driehoekige flappen moeten naar buiten gevouwen worden,.
Hoe groot is de inhoud?

Je kunt de driehoekige flappen (het moeten 45^{o}-90^{o}-45^{o} driehoeken blijven) variëren, b.v. met schuine zijden 3 en 7 cm. Bewijs dat bij het variëren de hoogte van alle pakken even groot is.
Teken daarvoor een bouwplaat op ruitjes in een rechthoek van 20 bij 13 cm.
Bewijs dat het pak met een vierkante bodem de grootste inhoud heeft.
De inhoud van dit maximum is even groot als die van het viervlak uit de rechthoek van 20 bij 13 cm .

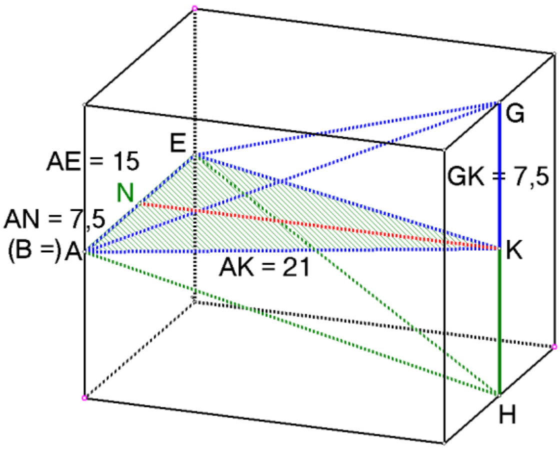
Meer hier over staat in de hand-out van de workshop “Cellofaan van koffiepakken” NWD 2007.





NWD 2016 workshop Van vlak naar volume   antwoorden werkblad viervlak en koffiepakken

. inhoud (2 x half) viervlak:



zet het viervlak in de ruimte met een zijde GH van 15
loodrecht op tafel; het viervlak wordt in het midden
door een horizontaal vlak in twee gelijke delen verdeeld
C, D en F komen in een zelfde punt (noem dit K) bij elkaar

de totale inhoud is dan:
2 x $^1/_3$ x oppervlakte driehoek AEK x hoogte half viervlak =
2 x $^1/_3$ x (½ x AE x KN) x GK =
2 x $^1/_3$ x ½ x 15 x $\sqrt{}(21^2 - 7{,}5^2)$ x 7,5 =
5 x $\sqrt{384{,}75}$ x 7,5 = 5 x 19,615 x 7,5 = 735,564 cm^3

uit rechthoek van 20 bij 13 cm:
2 x $^1/_3$ x [½ 10x$\sqrt{}(13^2 - 5^2)$] x 5 = $^1/_3$ x 10 x 12 x 5 = 200 cm^3

. inhoud cellofaan van koffiepakken

afmetingen van het pak: 2a bij 2b (met 2a+2b=10) bij 13 – (a + b) = 8: I = 2a·2b·8
2a+2b=10 geeft 2b = 10 – 2a; dus I = 2a·(10 – 2a)·8; max als a=2,5, dan ook b=2,5, dus vierkante bodem
I_{max} = 5 x 5 x 8 = 200

. inhoud ander viervlak uit A4-tje:
2 x $^1/_3$ x ½ x 21 x $\sqrt{}(15^2 - 10{,}5^2)$ x 10,5 = 7 x 10,71 x 10,5 = 787,2 cm^3

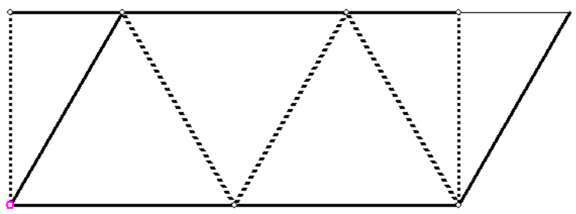
. inhoud ander viervlak uit rechthoek van 20 x 13:
2 x $^1/_3$ x ½ x 13 x $\sqrt{}(10^2 - 6{,}5^2)$ x 6,5 = $^1/_3$ x 13 x 7,60 x 6,5 = 214,0 cm^3

.

. tetraëder

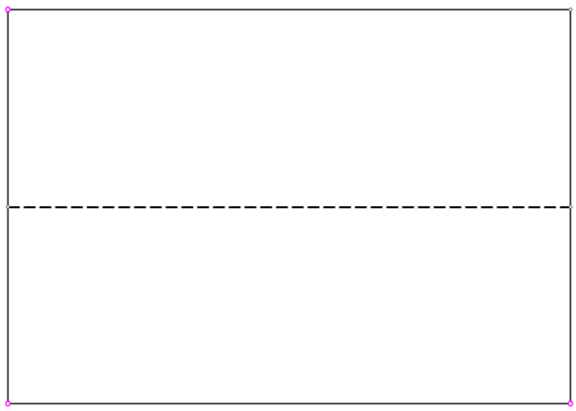
Vouw een viervlak uit een half A4-tje (van 30 bij 15,5 cm) of een strook van 24 bij 6√3 cm.

Hoe groot is de inhoud?



APPENDIX

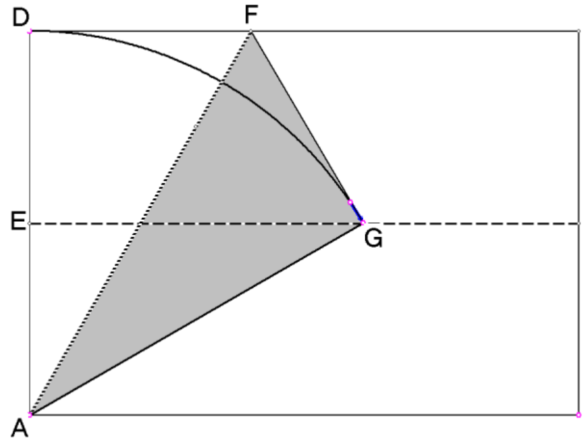
. Hoe vouw je een hoek van 60º?



Vouw de rechthoek in de lengte doormidden.

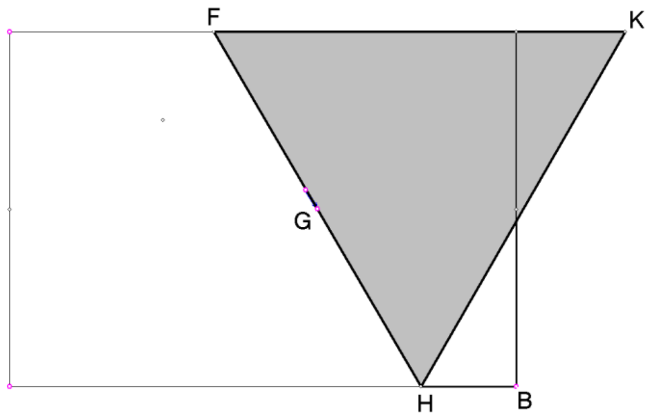
Maak een vouw (AF) vanuit het hoekpunt linksonder(A) door het hoekpunt linksboven (D) naar de middenvouw te brengen (G).
Driehoek AFG is dan het spiegelbeeld van driehoek AFD.
Bewijs dat hoek DAG 60º is. (Teken lijnstuk DG.)
Bewijs dat hoek AFG 60º is.

Vouw nu verder door de lijn FG te vouwen (FH).
Punt A komt dan op lijn DF te liggen (K).
Hoek F is nu in drie gelijke hoeken verdeeld.
Die zijn allemaal 60º.



Zo doorgaand krijg je allemaal gelijkzijdige driehoeken.
Voor een bouwplaat van een tetraëder heb je er 4 nodig.
Probeer hoe je zo voordelig mogelijk 4 gelijkzijdige driehoeken uit een A4-tje kunt vouwen.

het is ook mogelijk om met origami uit een vierkant vouwblaadje een tetraëder te vouwen.

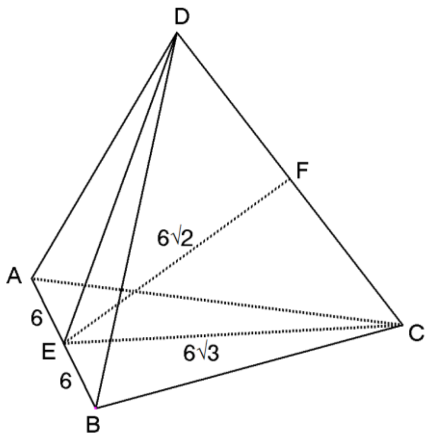


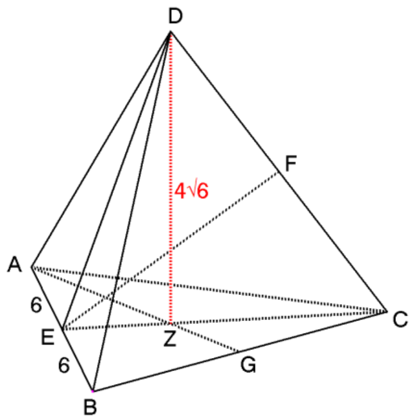
NWD 2016 workshop Van vlak naar volume   antwoorden werkblad tetraëder

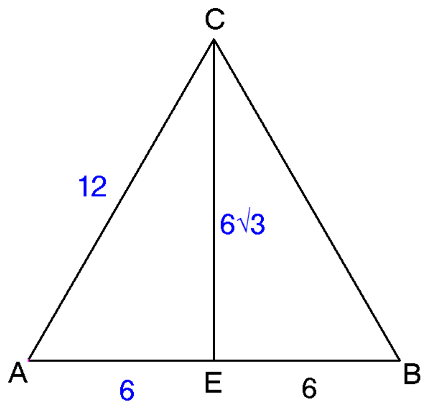
inhoud = 1/3 · oppvl drhk ABC · hoogte = 1/3 · (½ · AB · EC) · DZ = 1/3 · ½ · 12 · 6√3 · 4√6 = 144√2

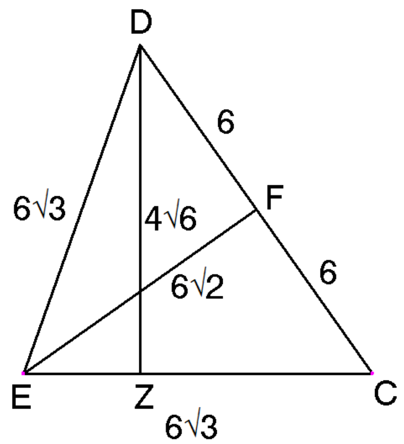
Berekening van DZ, uitgaande van een tetraëder met zijden van 12.
ΔABC en ΔABD zijn gelijkzijdig; dus DE = CE = 6√3 (verhouding 2:1:√3 = 12:6:6√3 in b.v. ΔAED);
dus ΔCDE is gelijkbenig met tophoek E. EF deelt ΔCDE in twee gelijke driehoeken CFE en DFE.
In ΔCFE is ∠CFE = 90º , met de stelling van Pythagoras: EF = $\sqrt{EC^2 - FC^2} = \sqrt{3 \cdot 36 - 36} = \sqrt{2 \cdot 36} = 6\sqrt{2}$

Z is het zwaartepunt van ΔABC; bijgevolg staat DZ loodrecht op de bodem ABC.
De oppervlakte van ΔCDE = ½ · EC · (hoogte) DZ maar ook = ½ · CD · (hoogte) EF;
gevolg is dat EC · DZ = CD · EF, dus 6√3 · DZ = 12 · 6√2; dus DZ = 4√6



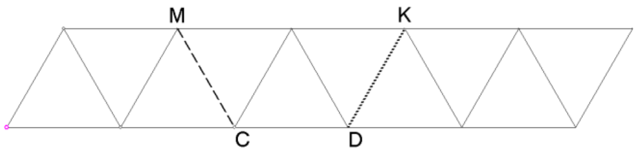




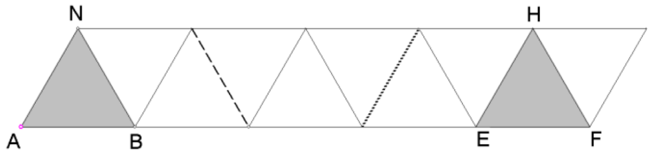


. hexaflex

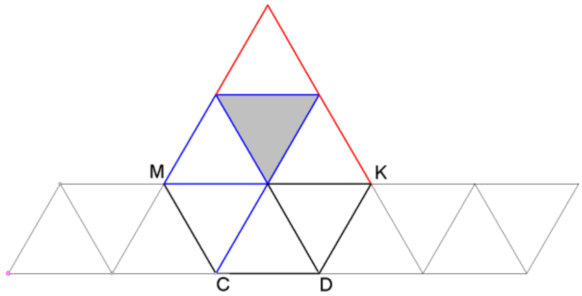
Knip de bouwplaat met 10 gelijkzijdige driehoeken uit.
Vouw alle driehoekjes om over de getekende lijntjes.
Leg de strook weer open voor je.
Vouw langs CM voor om, en over DK achter om.



Breng de omgevouwen driehoek EHF boven op de omgevouwen driehoek ABN (beide gearceerd).



Vouw driehoek FGH achter om naar driehoek ABN.
Plak deze driehoeken op elkaar.

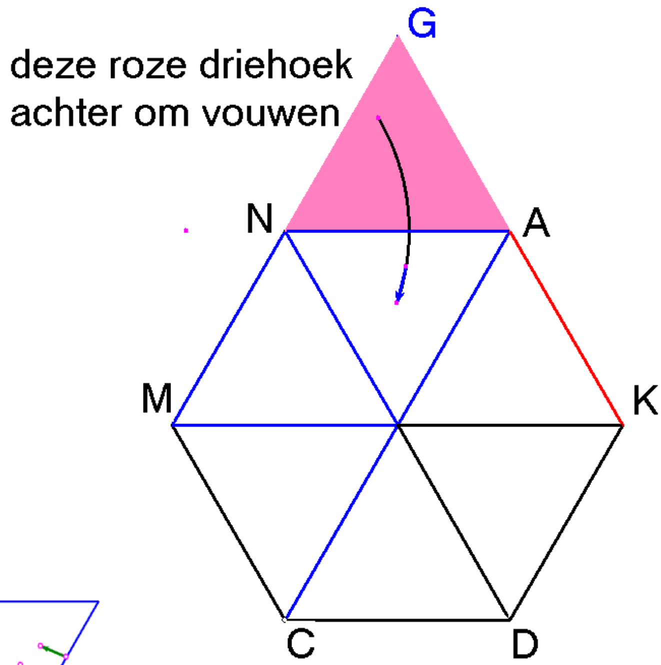


Er zijn 18 vlakjes die afwisselend per zes te zien zijn.
Door uit te zoeken welke zes tegelijk zichtbaar zijn kun je van te voren leuke patronen aanbrengen.
Er zijn dan drie verschillende aanzichten te maken.

Zorg er voor dat de driehoeken ABN en FGH (op de voorkant) niet beschreven worden, die worden immers op elkaar geplakt.

Door op de juiste manier de driehoekjes als in een peper en zout stelletje in een punt te knijpen, kun je doordraaien naar een volgende zichtlaag.

Probeer het maar.

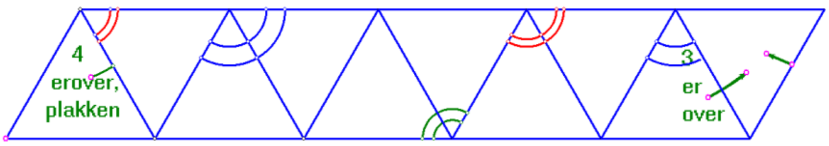


Het is leuk als je van te voren al patroontjes aanbrengt op de driehoekjes die met zes bij elkaar horen.

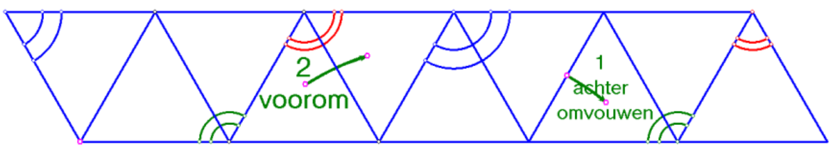
Daarvoor plak je hem eerst in elkaar en zet op elke naar boven gedraaide zeshoek een patroon.
Dan weer open maken en als voorbeeld naast een nieuwe bouwplaat leggen.

Hieronder zie je een schema van een voor- en achterkant.

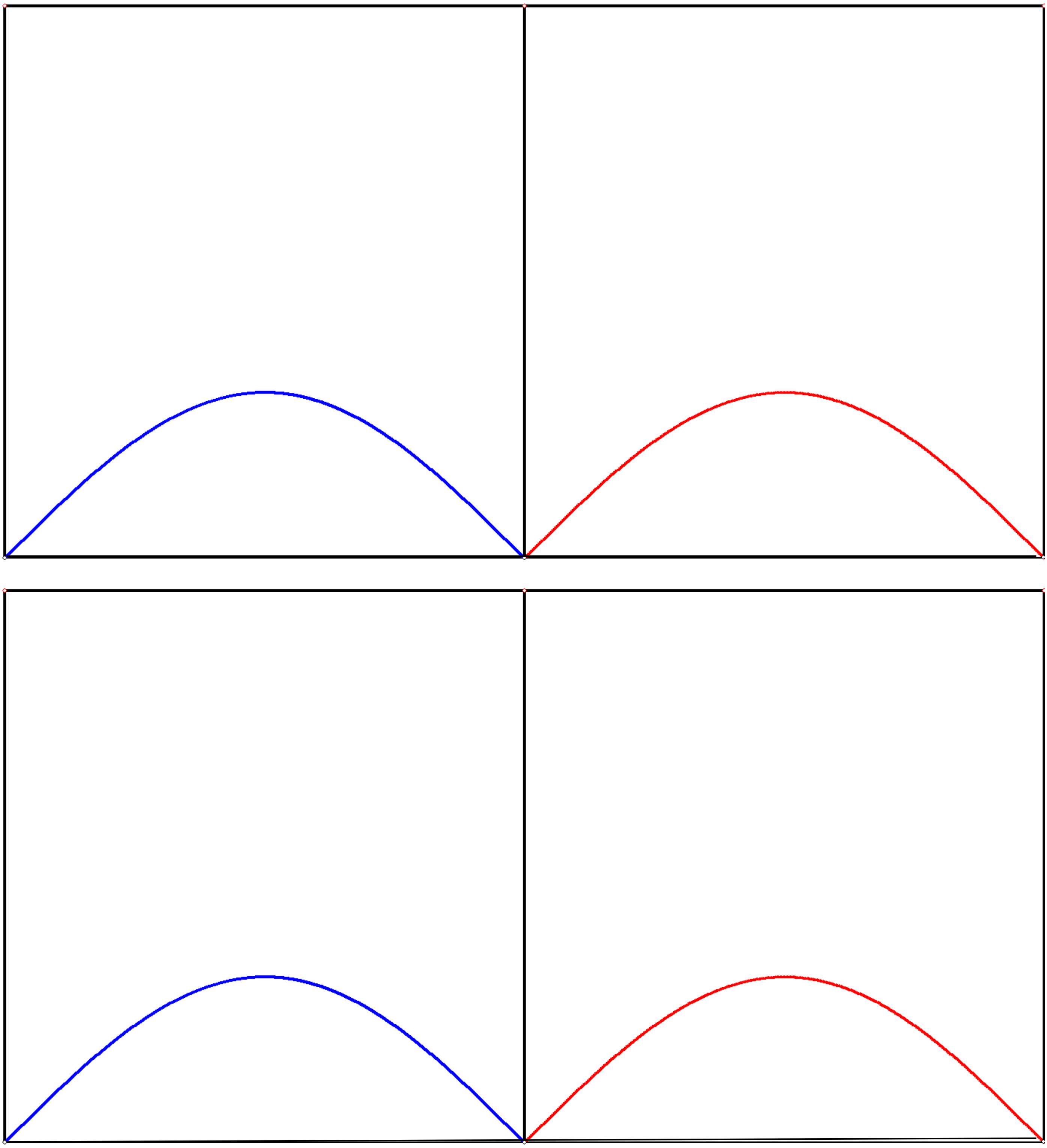
voorkant



achterkant

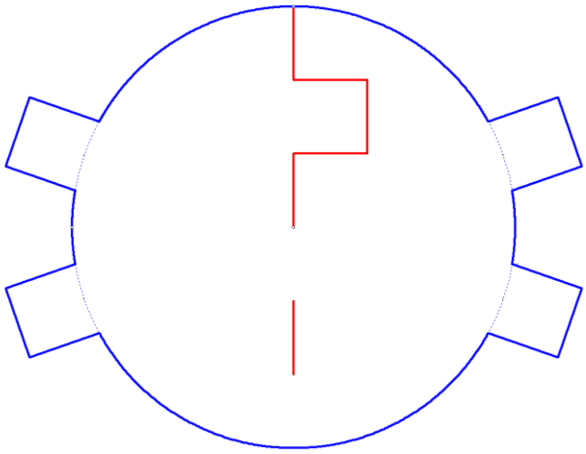


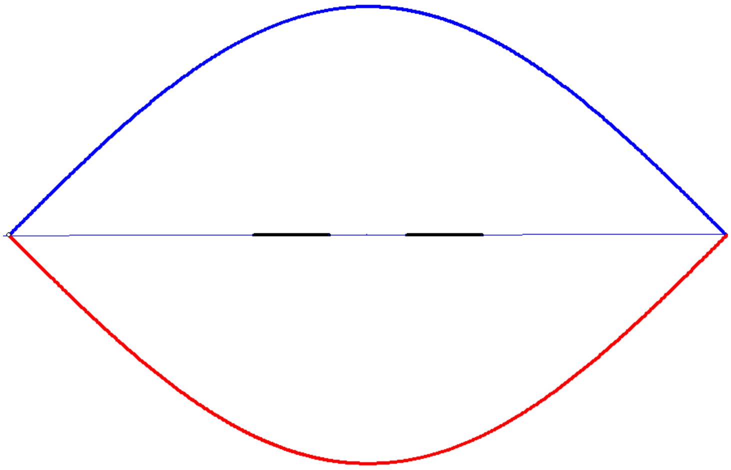
. knip de 4 partjes sinusoïden en de twee cirkels met doorsteekslipjes uit.
. knip de zigzag-sleuven in beide cirkels uit, snijd de aparte lijnstukjes open, en schuif ze in elkaar.
. plak de 4 partjes eroverheen tot een (dubbel) kloostergewelf.
. rits de sinusoïde lijnen op de kokerdelen voorzichtig.
. maak 2 tot 4 stukken koker met straal 3 cm en deuk de uiteinden aan een kant in.
. bewijs dat de welflijnen (= doorsnede van de twee kokers) als je ze platdrukt sinusoïden zijn.
. bereken de inhoud van een kloostergewelf // kruisgewelf van kokers met straal 1 m.

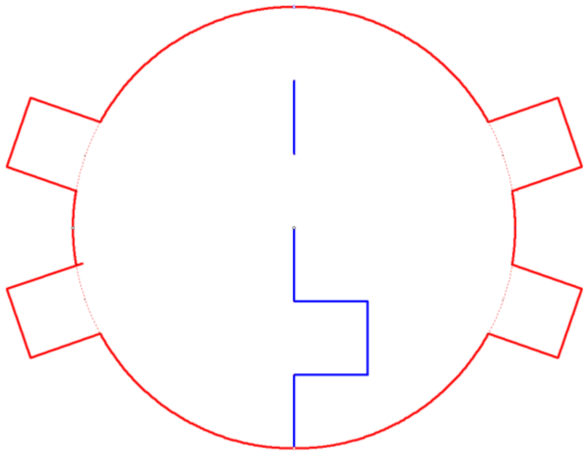


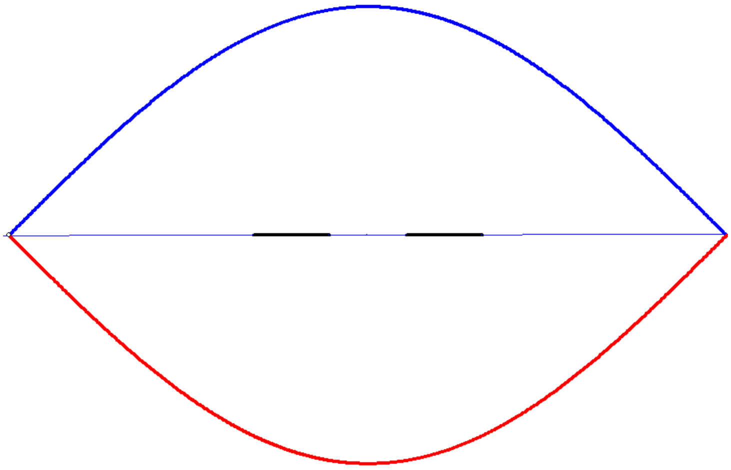
NWD 2016 workshop Van vlak naar volume werkblad kruisgewelf

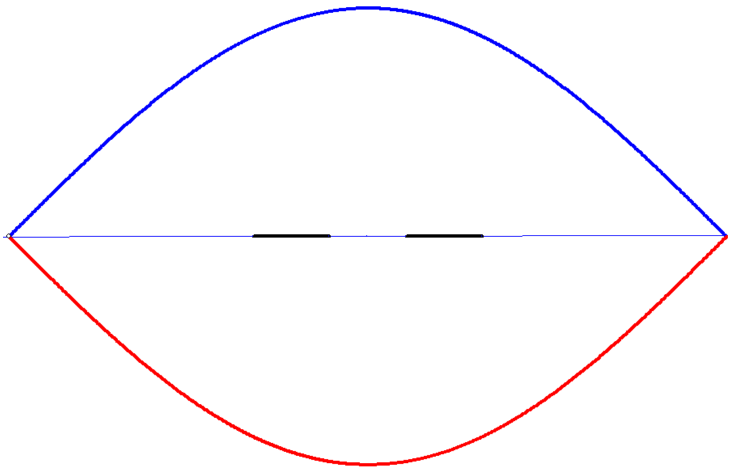
uitknippen

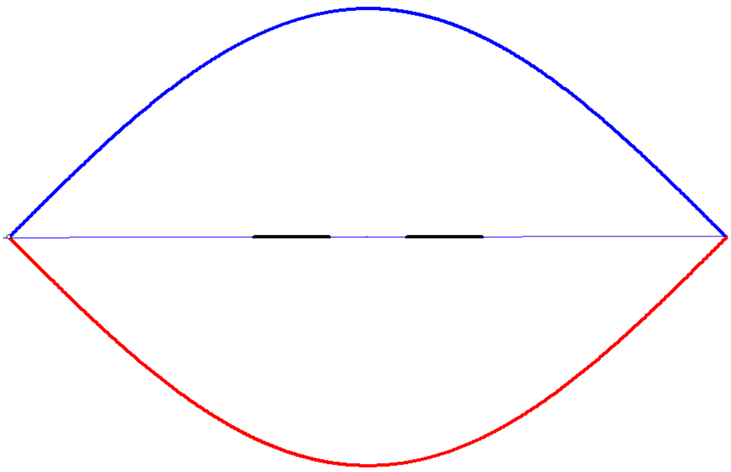












Een *tongewelf* is een halve koker (cilinder) die je krijgt als je de koker over een vlak door de as doormidden zaagt.

Een *kruisgewelf* bestaat uit twee even grote en even hoge tongewelven die elkaar loodrecht snijden.

De ruimte van het kruisgewelf dat precies binnen beide tongewelven zit wordt *kloostergewelf* genoemd.

Wanneer je twee even grote kokers (cilinders) loodrecht door elkaar laat lopen dan vormen de doorsnedenlijnen een dubbel kloostergewelf.

De doorsnedenlijnen zijn twee ellipsen (*welflijnen*). Ze snijden elkaar in de kruin. Je krijgt de ellipsen door een koker onder 45° op de as door te zagen.

Als je de doorgezaagde koker openknipt in de richting van de as, en de koker vervolgens plat drukt, dan zijn de welflijnen sinusoïden in het vlak.

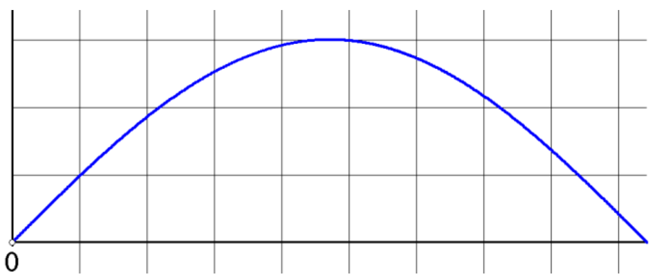
Omgekeerd: als je papier met sinusoïden als rand omkrult tot een koker met straal gelijk aan de amplitude van die sinusoïde, dan ontstaat schuin (onder 45° met de as) afgezaagde koker.

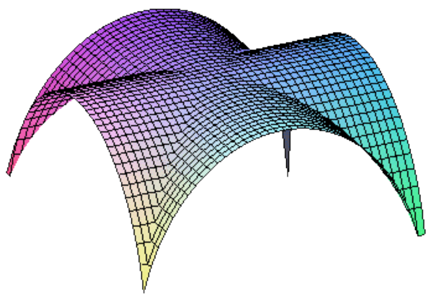
Om een totale doorsnede van twee even grote kokers te maken moet je dus vier partjes maken die uit twee gespiegelde sinusoïden (over een halve periode) bestaan.

Als je een gewone koker indeukt aan het uiteinde met twee flapjes, dan ontstaan vanzelf twee (halve) welflijnen.

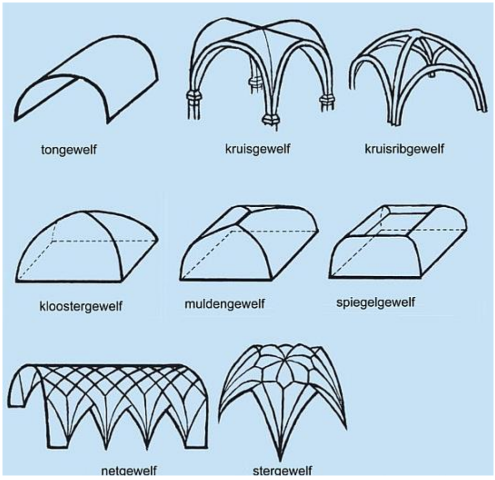
Omdat je in feite een deel van de koker spiegelt in een vlak onder 45° heeft het ingedeukte flapje ook de vorm van een deel van een (even grote) koker.

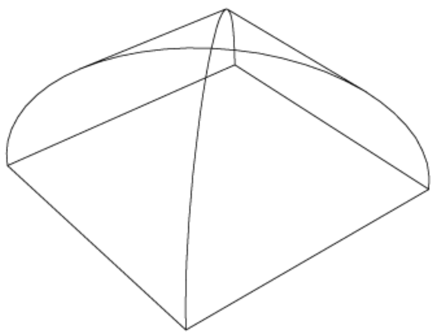
Bij hoek φ in de horizontale cirkel hoort booglengte φ op die cirkel.
Dan is de y-coördinaat gelijk aan sinφ.
Maar omdat het doorsnijdingsvlak een hoek maakt van 45° met het horizontale vlak (met de cirkel er in), is het verticale lijntje van het punt op de cirkel tot aan het hellende vlak ook sinφ.
Bij het platdrukken van het ronde stuk papier wordt de halve cirkel een lijnstuk met lengte π.
Voor elke booglengte φ vanaf het begin is de hoogte sinφ. De platgedrukte ellips is dus een sinusoïde.



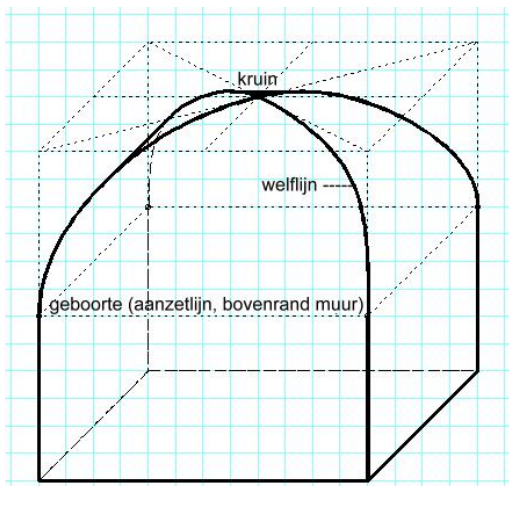


kruisgewelf

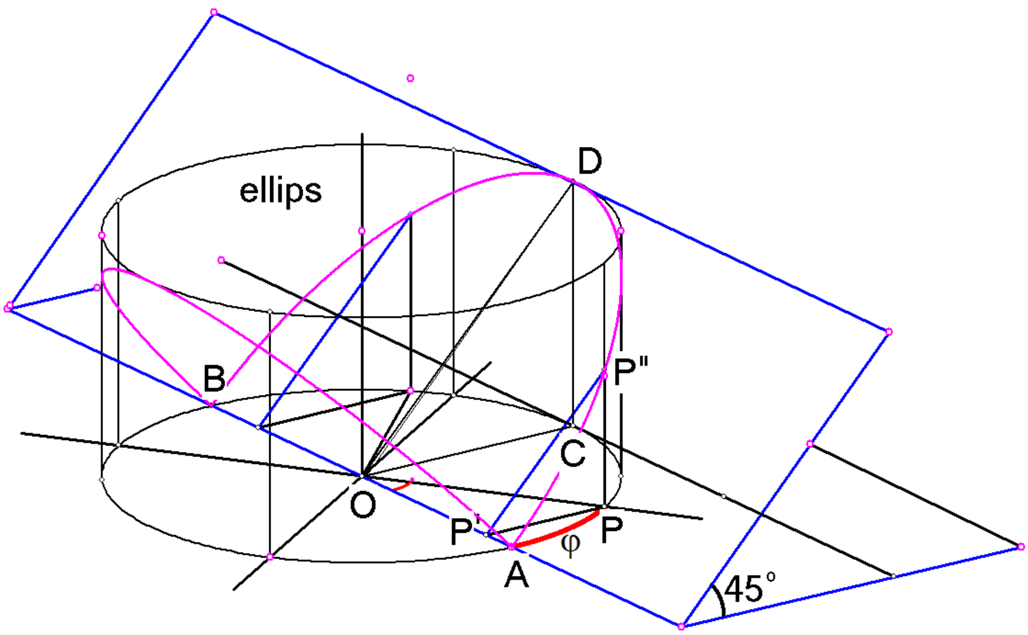




kloostergewelf



Probeer in het plaatje het bewijs te vinden.



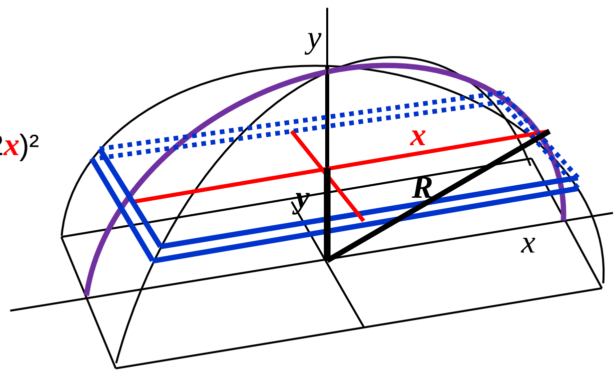
Bewijs met hulp:
Noem ∠ POP' = φ, dan is de booglengte AP φ radialen.
OA = 1 (= straal eenheidscirkel, R = 1)
P'P = sinφ
Het vlak met de ellips maakt een hoek van 45 º met de bodem, dus ∠ PP'P" = 45 º
P"P staat loodrecht op de bodem, dus is ∠ P'PP" = 90 º
driehoek PP'P" is "geodriehoek", dus PP" = P'P = sinφ
bij elke booglengte φ (radialen) is het verticale lijnstuk (PP") dus gelijk aan sinφ
dus bij platleggen van de ellips (op de cilinderwand) krijg je een sinus

De inhoud van een (half) kloostergewelf:

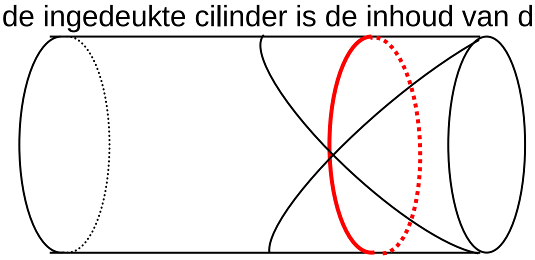
Berekening bij een koker met straal R.
De cirkelboog heeft straal R.
$x^2 + y^2 = R^2$ geeft $x^2 = R^2 - y^2$

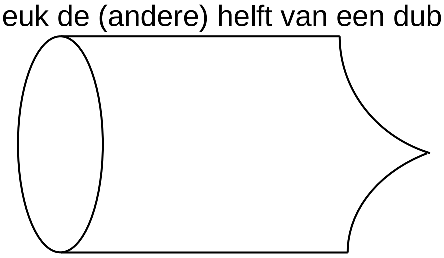
vierkant balkje met dikte Δy op hoogte $\boldsymbol{y}$, $0<y<R$, heeft inhoud $(2\boldsymbol{x})^2$
dus totale inhoud is:

$$\int_0^R (2x)^2 dy = \int_0^R 4x^2 dy = \int_0^R 4(R^2 - y^2) dy = 4\left[R^2 y - \tfrac{1}{3} y^3\right]_0^R$$
$$= 4(R^3 - \tfrac{1}{3} R^3) = \tfrac{8}{3} R^3$$



Bij de ingedeukte cilinder is de inhoud van de deuk de (andere) helft van een dubbel kloostergewelf.


kruisgewelf in de cilinder


ingedeukte cilinder

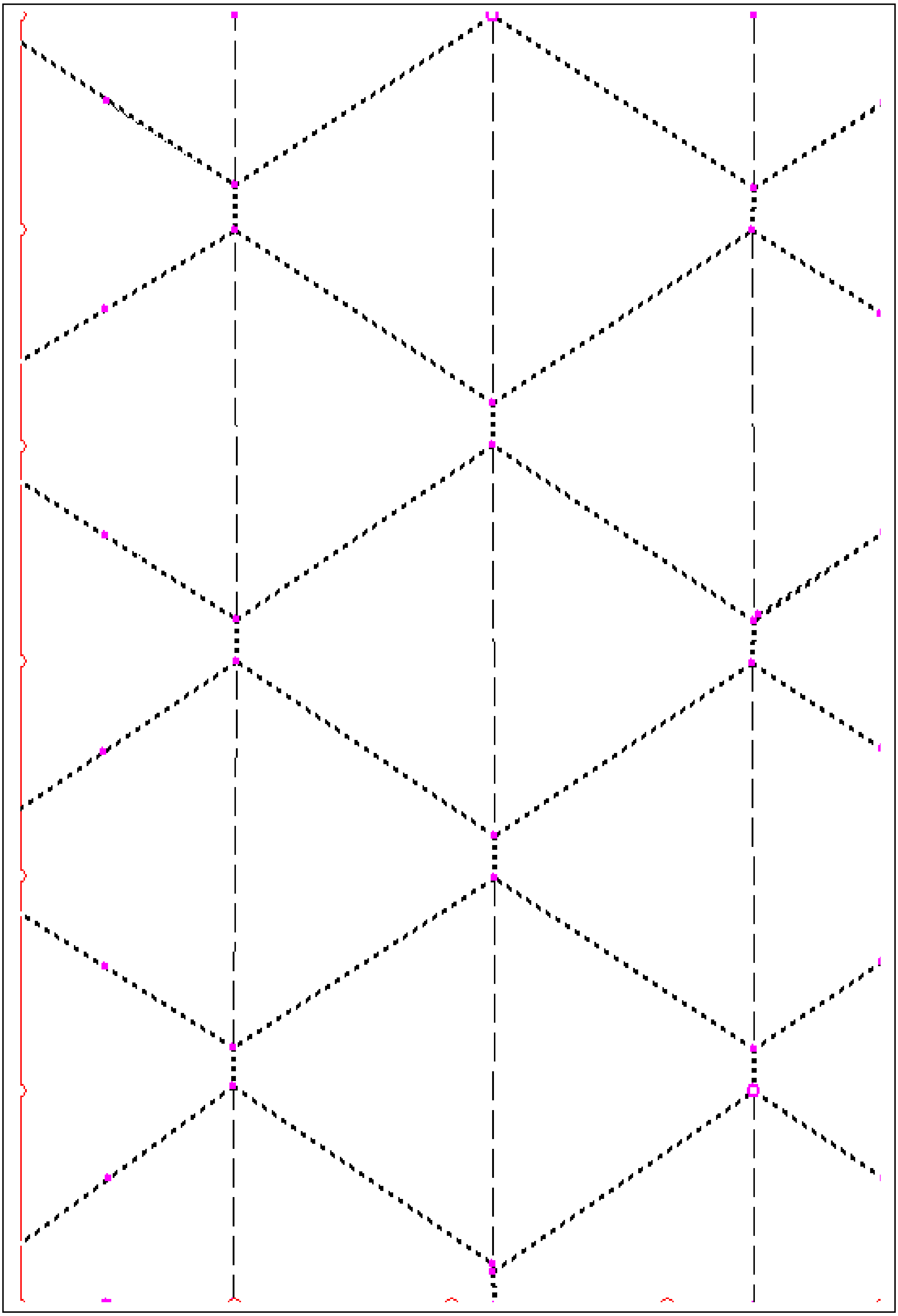
$R = \dfrac{21}{2\pi} = 3{,}342$; inhoud ingedeukte koker met h=30, is $\pi R^2 h - {}^8/_3 R^3$ = 953,25 cm^3 of

$R = \dfrac{30}{2\pi} = 4{,}775$; inhoud ingedeukte koker met h=21, is $\pi R^2 h - {}^8/_3 R^3$ = 1213,75 cm^3

. lampenkappen

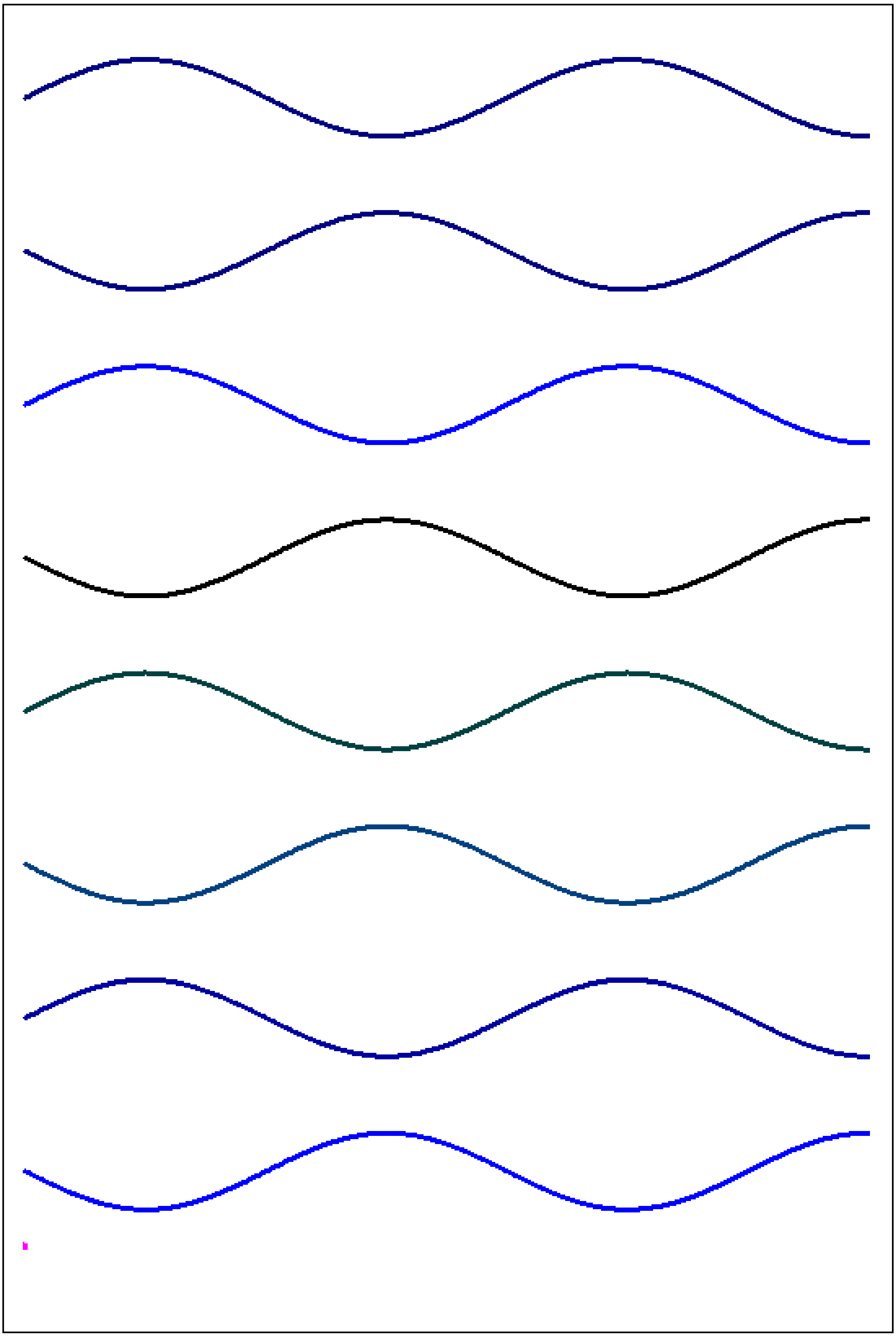
Neem een van de bouwplaten en rits de sinusoïden met een scherp voorwerp.
Dit moet uit de losse hand. Dus doe het voorzichtig.
Vouw de lampenkap en plak de koker dicht.

bouwplaat 1 (vergroten naar A4)

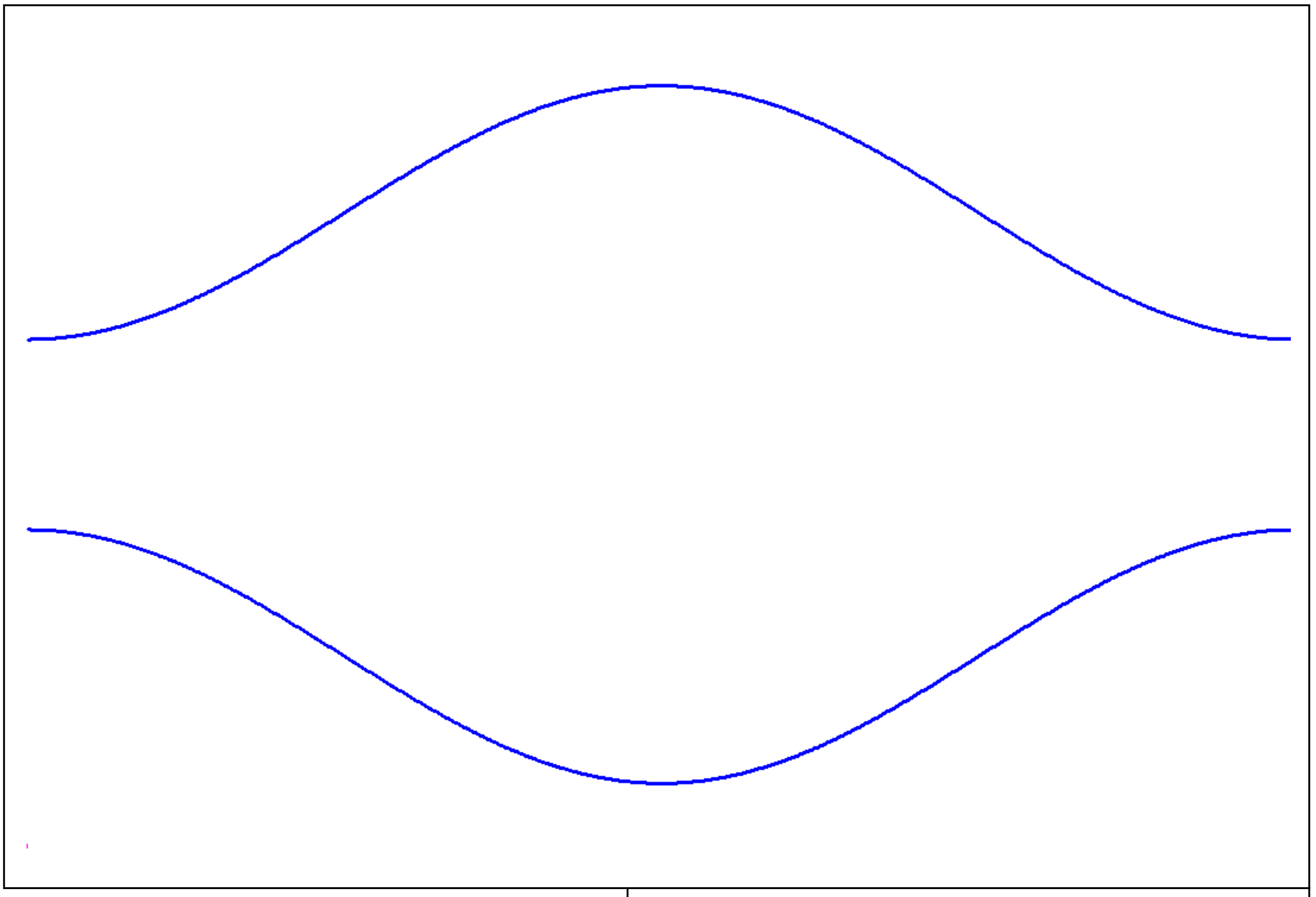


NWD 2016 workshop Van vlak naar volume werkblad lampenkappen

bouwplaat 2 lamp IKEA (eventueel vergroten naar A4)



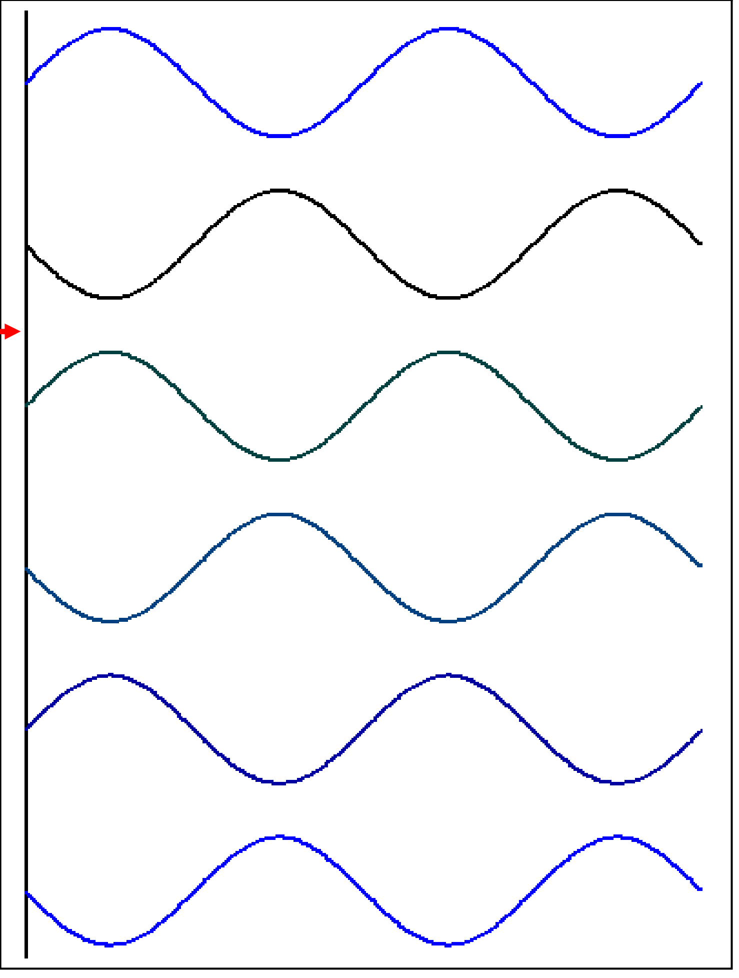
bouwplaat 3 module (maak er drie en plak ze aan elkaar)



bouwplaat 4
(vergroten naar A4)

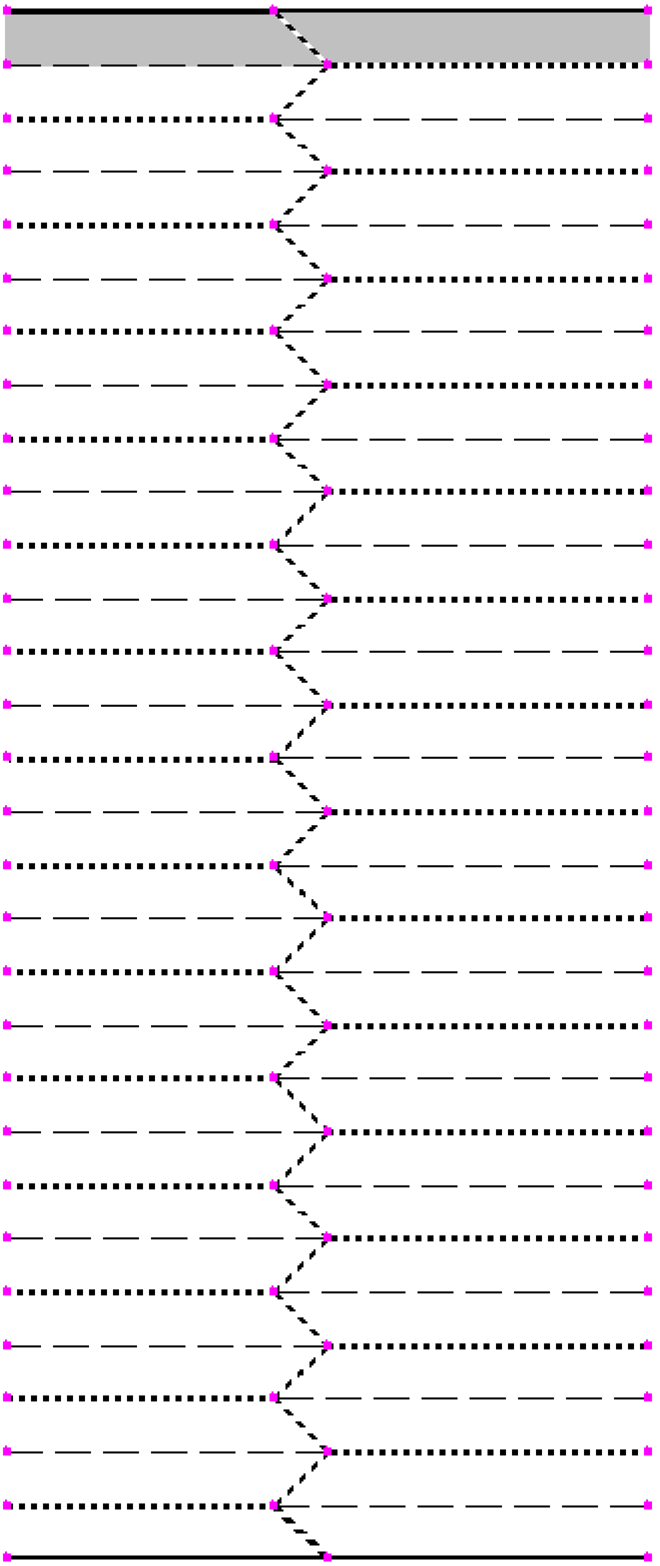
een variant waarbij de “deuken” halve cilinders worden krijg je als je niet 6 maar 4 van de sinussen gebruikt

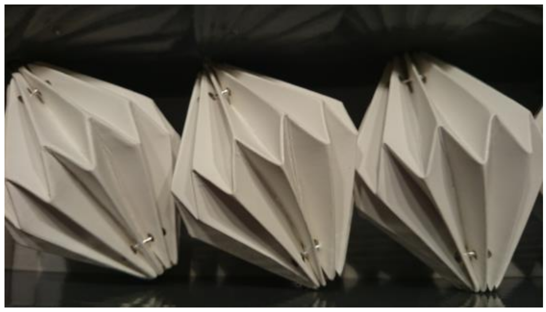
dan hier de bouwplaat afknippen



bouwplaat 5 lampen PRAXIS
(waren verkrijgbaar met kerst in een slinger van 10 LEDlampjes op batterij)

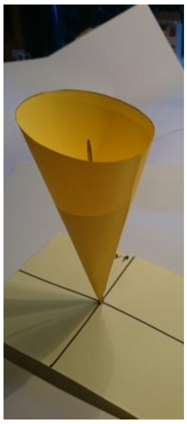
– – – – – – – – – = dalvouw
·························· = bergvouw



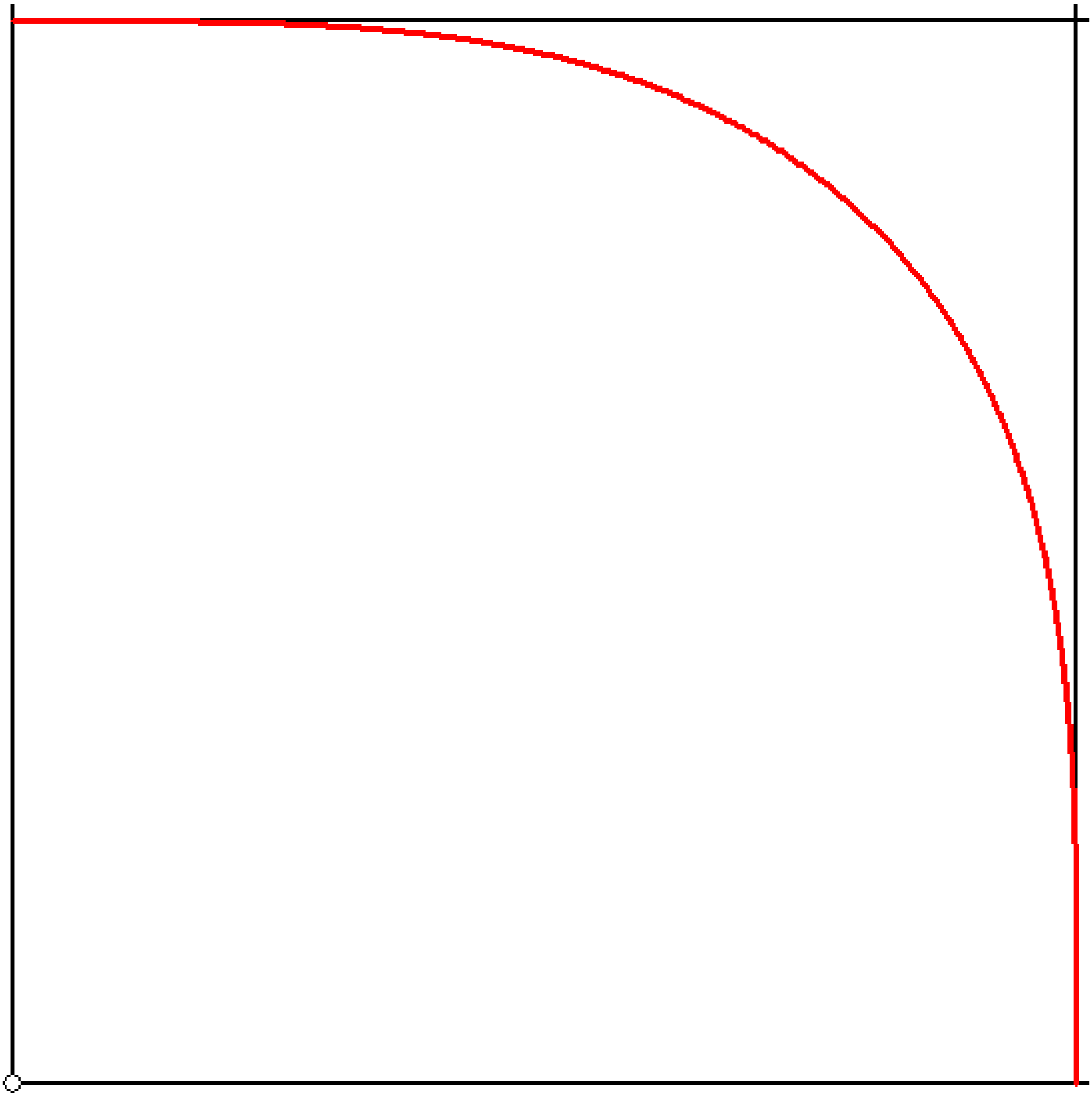


NWD 2016 workshop Van vlak naar volume werkblad patatzak

patatzak kleine oplossing



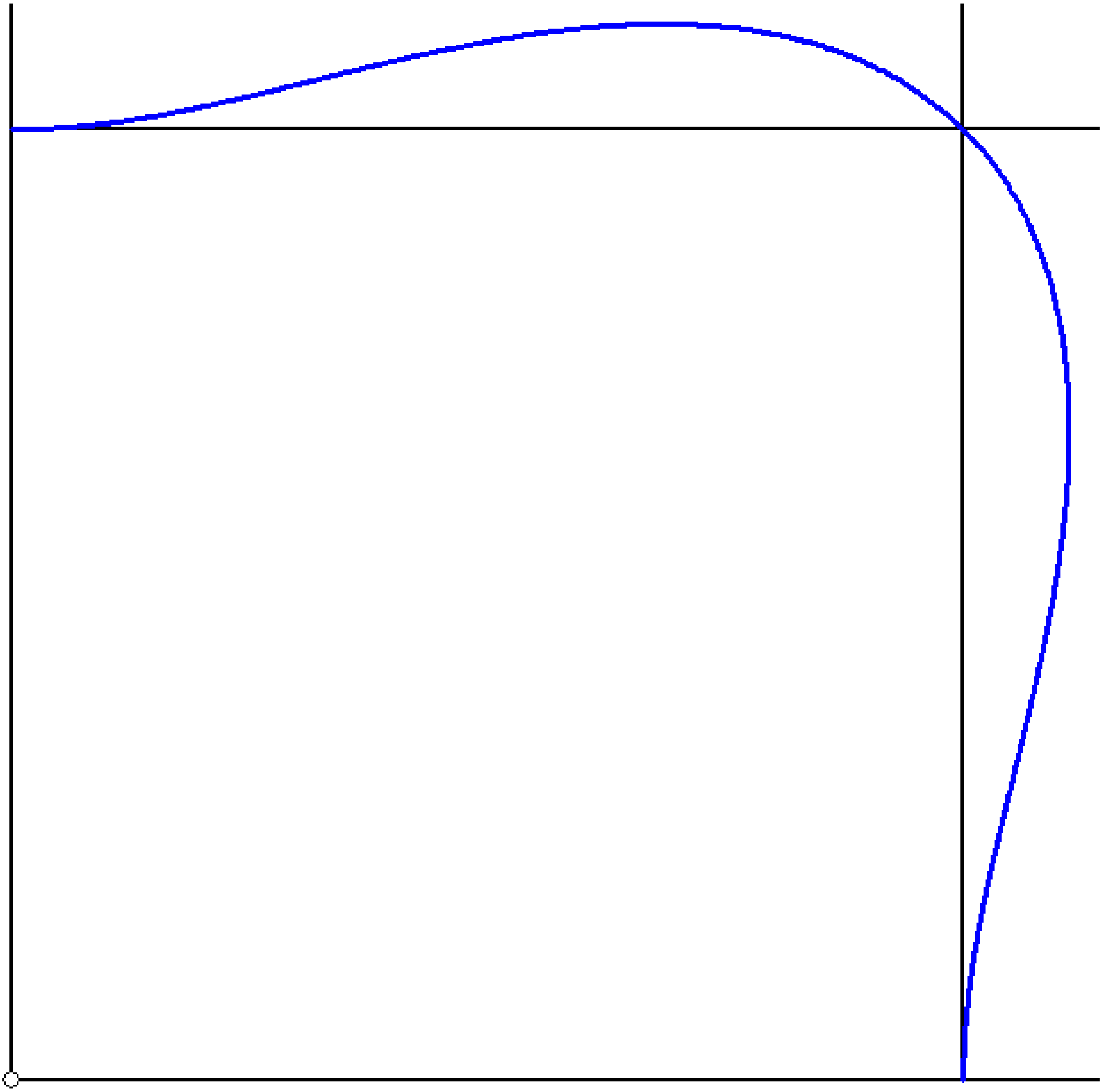
knip de bouwplaat uit langs de rode lijn
maak een kegelvorm door de linkerrand op de onderrand te plakken



NWD 2016 workshop Van vlak naar volume werkblad patatzak

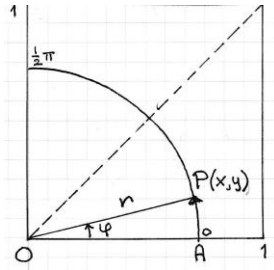
patatzak grote oplossing

knip de bouwplaat uit langs de rode lijn
maak een kegelvorm door de linkerrand op de onderrand te plakken



Naar de oplossing. Wat is de feitelijke vraag?
Waar komt een punt P van de rand van de oplossing in de ruimte terecht?

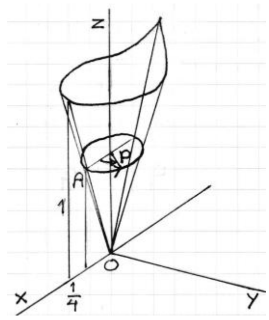
De oplossing stap voor stap, met heel veel dank aan Agnes Verweij.



1 Neem vierkant blaadje met assenstelsel Oxy. Zet een punt P er op.
In poolcoördinaten ligt P op een cirkelboog met straal r. :
$P(x,y) = P(r\cos\varphi, r\sin\varphi)$.

[voor later: Stel de zijde van het blaadje 1, dan is A(0,1) het hoekpunt linksboven.]

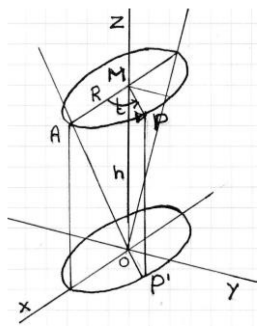
2 Vouw het blaadje dubbel (platte patatzak) en plak een rand dicht.
P komt nu op de andere kant van het blaadje. Even omschakelen.



3 Duw de aan een kant dichtgeplakte driehoek open tot een deel van een kegel.
P ligt nu op een cirkel met straal R waarvoor geldt:
$2\pi R = \frac{1}{4} \cdot 2\pi r$, ofwel $R = \frac{1}{4} r$ (R : r = 1 : 4).
Voor de halve tophoek α geldt: $\sin\alpha = (\frac{R}{r} =)\ \frac{1}{4}$,

dus $\tan\alpha = \frac{1}{\sqrt{15}}$. Later komen we hier nog op terug.
Even toelichten:

$h = \sqrt{r^2 - R^2} = \sqrt{r^2 - (\frac{1}{4} r)^2} = \sqrt{\frac{15}{16} r^2} = \frac{1}{4} r\sqrt{15}$, dus $\tan\alpha = \frac{\cancel{\frac{1}{4}} r}{\cancel{\frac{1}{4}} r\sqrt{15}} = \frac{1}{\sqrt{15}}$.

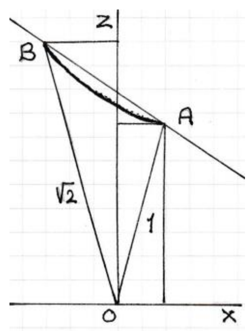


4 Zet de kegel in een ruimtelijk assenstelsel met de top in O en de plaknaad boven de x-as.
P komt nu op een cirkel met straal R op hoogte h terecht:

$P(x = R\cos t,\ y = R\sin t,\ z = h)$

[voor later: Punt A komt nu in (¼, 0, ¼ √15) terecht.]

5 Voor de hoek t die P nu in de ruimte maakt tov Oxz-vlak geldt $t = 4\varphi$.
Immers: φ gaat van 0 tot ½ π, terwijl t van 0 tot 2π gaat.
$P(x = R\cos t,\ y = R\sin t,\ z = h)$ geeft $P(x = \frac{1}{4} r\cos(4\varphi),\ y = \frac{1}{4} r\sin(4\varphi),\ z = \frac{1}{4} r\sqrt{15})$



6 We gaan de kegel snijden met het vlak door A, loodrecht op OA, evenwijdig aan de y-as. Draai de tekening naar het vooraanzicht in het Oxz-vlak.
De doorsnede is dan een (dalende) lijn.

7 Vlak $z = ax + b$ heeft helling $-\tan\alpha = -\frac{1}{\sqrt{15}}$;

door punt (¼ , 0, ¼ √15) geeft $b = \frac{4}{\sqrt{15}}$.

Dus vlak $z = -\frac{1}{\sqrt{15}} x + \frac{4}{\sqrt{15}}$.

8 Dit vlak snijden met de kegel waar P op ligt:

$\frac{1}{4} r\sqrt{15} = -\frac{1}{\sqrt{15}} \cdot \frac{1}{4} r\cos(4\varphi) + \frac{4}{\sqrt{15}}$ geeft $r = \frac{16}{15 + \cos(4\varphi)}$

9 Terug naar het vouwblaadje:

$x = r\cos\varphi$ wordt $x = \dfrac{16}{15+\cos(4\varphi)}\cos\varphi$, en $y = r\sin\varphi$ wordt $y = \dfrac{16}{15+\cos(4\varphi)}\sin\varphi$.

Voer deze formules in op de GR voor een parameterkromme en zie de oplossing!

10 Vergelijkbaar vind je de oplossing voor het vlak door de twee eindpunten van het tot kegeldeel open geduwde vouwblaadje.
Daar heeft OB de lengte $\sqrt{2}$.

De oplossing die je dan vindt is:

$$x = r\cos\varphi = \frac{4-2\sqrt{2}}{1+(3-2\sqrt{2})\cos(4\varphi)}\cos\varphi = \frac{(4-2\sqrt{2})\cos\varphi}{1+(3-2\sqrt{2})\cos(4\varphi)}$$

en

$$y = r\sin\varphi = \frac{4-2\sqrt{2}}{1+(3-2\sqrt{2})\cos(4\varphi)}\sin\varphi = \frac{(4-2\sqrt{2})\sin\varphi}{1+(3-2\sqrt{2})\cos(4\varphi)} \;.$$