REKENEN ALS EEN ROBOT, WIE WIL DAT NOU?

Martin Kindt

Onlangs hoorde Martin Kindt de verzuchting: gelukkig weten de leerlingen weer dat 'delen door een breuk hetzelfde is als vermenigvuldigen met het omgekeerde'. Maar hoe 'gelukkig' is dat en hoe hebben ze dit kunstje geleerd? En een gevaar ligt om de hoek: je moet wel de juiste breuk omkeren! Het verhaal gaat dat zelfs leraren hierbij wel eens in de fout gingen ...

Bijles

Hé, Pawel Wasiljitsj! roept Pelageja Iwanowna haar man wakker. Je moest je liever eens wat met Stepa gaan bemoeien, want die zit over zijn boek gebogen te huilen. Er is weer iets dat hij niet snapt!

Anton Tsjechov (1860 - 1904)

Aldus begint 'Vastenavond', een van die mooie verhalen die Anton Tsjechov in 1887 schreef.[1] Pawel W. gaat dan, zonder zich te haasten, naar de kamer van zoonlief, die hij aantreft met betraande ogen. Hij plaagt hem een beetje, zo van: 'smaakt de wetenschap niet zo lekker na al die pannenkoeken van gisteravond?' Dan volgt er:

- Is er iets wat je niet duidelijk is?
- Ja, kijk ... dat delen van die breuken! antwoordt de jongen boos, hoe je die ene breuk op de andere delen moet ...
- Hm, je bent me ook een rare! Wat is daar nu aan? Daar hoef je toch je hoofd niet over te breken? Leer gewoon de regel van buiten en klaar ben je. Om een breuk op een andere te delen moet je de teller van de ene breuk vermenigvuldigen met de noemer van de andere en dat wordt dan de teller van je deelsom ...

  Nou ja, en dan verder, dan neem je de noemer van de eerste breuk ....
- Ja, dat weet ik allemaal ook wel zonder jou! valt Stepa hem in de rede, (...) je moet me het bewijs laten zien!
- Het bewijs? Goed, geef je potlood en luister. Stel dat we zeven achtsten moeten delen door twee vijfden. Goed. Weet je, kerel, de kneep zit 'm daarin, dat je die breuken de een op de ander delen moet (...). Maar goed, luister. We zullen zo redeneren; stel, dat we die zeven achtsten nu eens niet door twee vijfden, maar door twee, dus alleen door de teller moesten delen. Goed, dat doen we, wat krijgen we dan?
- Zeven zestienden.
- Juist! Knappe jongen! Welnu, kerel de hele kneep zit 'm daarin, dat we ... als we door twee gedeeld hebben, dan krijgen we dus ... Wacht even, daar ben ik zelf in de war geraakt.

Vader weet kennelijk niet meer hoe het verder moet en begint dan te vertellen over de slechte wiskundeleraar die hij vroeger heeft gehad, die geen orde kon houden en voortdurend vastliep in een bewijs. Hij is nog niet klaar met zijn verhaal als moeder hen roept voor het ontbijt. En de schrijver komt in zijn verhaal niet meer terug op het delen van breuken.

Socratisch leergesprek

Ik neem aan dat Tsjechov zelf de achtergrond van de regel 'delen door een breuk is vermenigvuldigen met het omgekeerde' goed begreep en dat hij volstond met het hekelen van wat we nu mechanistisch (of traditioneel) rekenonderwijs noemen. En laten we wel zijn, een verdere uitleg zou wel wat te veel hebben geëist van het uithoudingsvermogen van de gemiddelde lezer. Misschien zal Tsjechov - als een moderne Plato – wel een voortzetting van het afgebroken leergesprek van Pawel Wasilitsj (in de rol van Socrates) en Stepa voor ogen hebben gezweefd. Ik verzin hier zo'n vervolg:

- *Als we door twee hebben gedeeld, dan krijgen we dus een breuk die twee keer zo klein is als zeven achtsten. Ben je het daarmee eens?*
- *Ja.*
- *Dus als je de noemer van een breuk tweemaal zo groot maakt, dan ...?*
- *Dan wordt de breuk tweemaal zo klein.*
- *Mooi zo, en als je nu deelt door een getal dat kleiner is dan twee, wordt de uitkomst dan groter of kleiner dan zeven achtsten?*
- *... groter, ja natuurlijk, groter!*
- *En als dat getal waar je door deelt nu eens vijf keer zo klein is als twee, hoeveel keer zo groot wordt de uitkomst dan?*
- *Eh ... vijf keer zo groot, denk ik.*
- *Ja, zo is het! En hoeveel keer zo klein is twee vijfden in vergelijking met twee?*
- *Vijf keer, vanzelf.*
- *Dus bij deling van zeven achtsten door twee vijfden moet je die zeven zestienden van daarnet nog ...*
- *Met vijf vermenigvuldigen.*
- *En wat komt er dan uit?*
- *Even kijken ..., vijf en dertig zestienden.*
- *Ja, helemaal goed !*
- *Snap je het nu, jongen?*
- *Ik geloof van wel ...*

Ik zeg niet dat de hier gesuggereerde uitleg de meest ideale is, maar het is wel een van de mogelijkheden om het delen door een breuk te leren begrijpen.

De 'algemene' noemer

Ook in de Nederlandse literatuur van de 19de eeuw vond ik iets over breukrekenen. Multatuli's geesteskind Woutertje Pieterse repeteert, als hij in de wachtkamer zit voor een sollicitatiegesprek bij de firma Ouwetijd & Kopperlith, al mijmerend de kennis die hij opgedaan heeft op de basisschool: 'En als er breuken zijn, ... lastig is 't, nu ja, maar ik zoek de algemene noemer.'

Bij een presentatie over breukrekenen heb ik aan de toehoorders wel eens deze inleidende vraag gesteld: *In welke situaties heeft het zin om twee breuken gelijknamig te maken?* Een vraag die reflectie uitlokt en die je daarom ook heel goed aan een klas zou kunnen voorleggen. De verwachte antwoorden kwamen vlot: 'als je breuken wilt optellen of aftrekken' en kort daarna 'of als je wilt weten welke van twee breuken het grootst is'. Het antwoord 'als je ze op elkaar wilt delen' kwam zelden. Voor de lezer die nu zijn wenkbrauwen fronst:

$$\frac{7}{8} : \frac{2}{5} = \frac{35}{40} : \frac{16}{40} = \frac{35}{16} = 2\frac{3}{16}$$

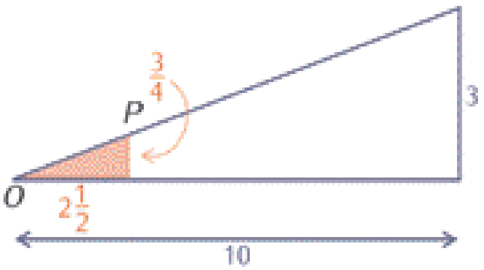
Dit werkt dus ook en ik denk dat het in eerste instantie makkelijker te snappen is dan de befaamde vuistregel die zegt dat je de 'deler-breuk' moet omkeren en dan vermenigvuldigen met de 'deeltal-breuk'. Het risico van het aanleren van het gelijknamig maken van de twee breuken bij een deling is misschien dat de leerlingen dan ook bij vermenigvuldigen 'onder één noemer brengen' (waarom zeggen we trouwens niet 'boven' één noemer?) en dan alleen de tellers vermenigvuldigen'. Tja ...

We kunnen het wel, maar snappen het niet

Stepa in het verhaal van Tsjechov, wilde duidelijk niet rekenen als een robot. Hij nam geen genoegen met een voorgekauwde standaardprocedure, nee, hij wilde een 'bewijs'. 'Bewijs' in zijn eigenlijke rol: om te begrijpen en om overtuigd te raken.
Ik herinner me een voorval van lang geleden. Onze tweeling kwam uit school - ze zaten toen in wat nu groep acht heet, maar toen de zesde klas was – en spraken als het ware uit één mond: 'papa, we hebben iets nieuws geleerd met breuken, we kunnen het wel, maar snappen het niet! Ik kon wel raden waar het over ging, en - mijn beroepseer stond op het spel - ik moest spontaan een didactische oplossing bedenken. Zo kreeg ik de inval dat 'gelijknamig maken' een oplossing bood voor een inzichtelijk resultaat. Via een rijtje van geschikte voorbeelden, waren de problemen voor hen snel opgelost. Althans ze konden nu controleren dat de resultaten overeenkwamen met die van de op school geleerde, raadselachtige regel. Óf en hóe ik toen het verband heb uitgelegd met de procedure die de leraar had voorgeschreven, kan ik me niet meer herinneren.
In dit licht vermeld ik een ervaring van een collega van een paar jaren terug. In een vergadering van een commissie over het rekenonderwijs, werd gevraagd waarom 'delen door een breuk is vermenigvuldigen met het omgekeerde' niet in een lijst van standaard-procedures was opgenomen. Het antwoord van een van de commissieleden luidde: omdat je ook kunt delen door de breuken gelijknamig te maken. 'Dat mag niet' was het antwoord van een wiskundige. Ik kon het niet geloven en besloot een onderzoekje te doen onder natuurkundedidactici. Zo van: hoe reken jij een sommetje als 'zeven achtsten gedeeld door twee vijfden' uit. Eén antwoord was: ik vermenigvuldig ze eerst allebei met 40. En dat is misschien wel de beste aanpak ..

Het hellingmodel

In *Euclides* heb ik eerder enige artikelen[2] gewijd aan het idee om, althans in het voortgezet onderwijs, het rekenen met breuken te koppelen aan het begrip 'helling van een rechte lijn'. Ieder heeft wel eens van 'stijgingspercentage' gehoord en om in plaats daarvan te werken met het quotiënt van verticale en horizontale 'sprong' is geen grote stap. En dat de helling niet verandert als de beide 'sprongen' met dezelfde factor worden vergroot (of verkleind), is intuïtief duidelijk. Schaalvergroting van figuren, daar zijn we bij wijze van spreken vanaf de wieg al mee vertrouwd. In figuur 1 is te zien hoe het rode driehoekje met een factor 4 is vermenigvuldigd.



figuur 1

Figuur 1 kan dienen als illustratie bij:

$$\text{helling}\,OP = \frac{\frac{3}{4}}{2\frac{1}{2}} = \frac{\frac{3}{4}\times 4}{2\frac{1}{2}\times 4} = \frac{3}{10}$$

Twee isomorfe rekenwetten

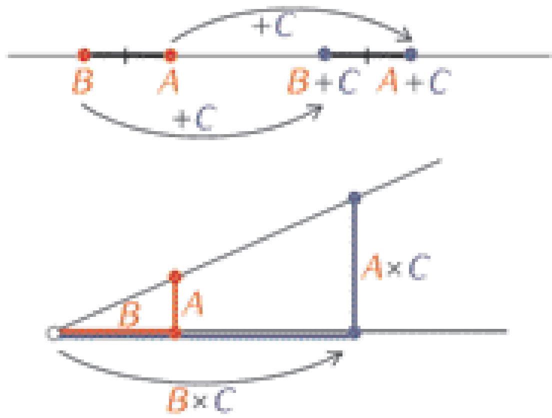
Dat de verhouding van twee getallen hetzelfde blijft als je beide met eenzelfde getal (≠ 0) vermenigvuldigt, is een van de basisprincipes van de verhoudingstabel. Je kunt eigenlijk wel op je klompen aanvoelen dat dit waar is, figuur 1 maakt de zaak aanschouwelijk.

Een isomorfe eigenschap vind je bij het verschil van twee getallen. Als je bij beide getallen hetzelfde getal optelt, verandert het verschil niet. Ook hier zorgt een plaatje - de getallenlijn - voor duidelijkheid in één oogopslag. Naar mijn smaak zouden deze beide eigenschappen, die ik hieronder in formele taal schrijf, meer expliciete aandacht moeten krijgen in het onderwijs.

I	$A - B = (A + C) - (B + C)$ .... (V+)
II	$A : B = (A \times C) : (B \times C)$ .... (D×)

NB: bij II hoort natuurlijk de voorwaarde dat C ≠ 0.

De hierbij passende plaatjes staan in figuur 2:



figuur 2

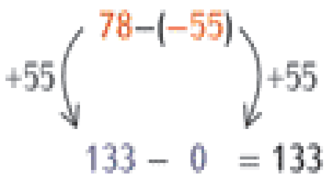
Deze regels kun je voortdurend met succes toepassen, zowel in het basis als in het voortgezet onderwijs.

Uit mijn schooljeugd herinner ik me nog hoe een aantal medeleerlingen moeite had met 'lenen' en 'onthouden' bij aftrekking van getallen met meer dan twee cijfers. Het is niets nieuws als ik zeg dat je handig kunt zijn en de aftrekker eerst wat 'mooier' maken.

Bijvoorbeeld:

Een handige toepassing van regel (V+). En je moet er ook een beetje bij nadenken. Aan degenen die volhouden dat je toch vooral de klassieke procedures erin moet slijpen, en rekenen als een robot, zeg ik: 'mensen moet je niet willen programmeren'. Of om het fraaier met Freudenthal te zeggen: 'It's a human right and dignity to learn by insight and understanding".

Bij het rekenen met negatieve getallen levert regel (V+) ook didactische winst op. Kijk maar;



Eventueel kan een minder rekenvaardige leerling nog wat meer tussenstapjes maken, bijvoorbeeld van die 78 eerst 80 en van die - 55 eerst - 53 maken.

Zulke voorbeelden geven inzicht in de regel die - als de tijd rijp is! - aldus kan worden geformuleerd: '*aftrekken van een getal is optellen met het tegengestelde*'.

Als de tijd rijp is, en dat geldt ook voor de regel waar Stepa in het verhaal van Tsjechov mee worstelde.
Bij de deling die zijn vader als voorbeeld koos, kun je tenslotte ook beide breuken zo vermenigvuldigen dat de tweede breuk 1 wordt:

$$\begin{array}{ccc} & \frac{7}{8} : \frac{2}{5} & \\ \times\frac{5}{2} \swarrow & & \swarrow \times\frac{5}{2} \\ & \frac{35}{16} : 1 = \frac{35}{16} & \end{array}$$

Natuurlijk, je moet dan eerst hebben ingezien dat 'twee breuken zijn elkaars omgekeerde' hetzelfde betekent als 'het product van twee breuken is gelijk aan 1'.
Langs deze weg, waarbij de deler 'geneutraliseerd' wordt, kan de 'standaardprocedure' steunen op inzicht.
De kern van wiskunde is dat het 'waarom' voorafgaat aan het 'hoe'. Dat het 'hoe' (of parten daarvan) meestal meer beklijft (of beklijven) dan het 'waarom' is helaas de realiteit. In zijn beroemd geworden rede[3] in 1934 stelde Dijksterhuis dat *de leerling op elk ogenblik in staat moet zijn, zichzelf en anderen rekenschap te geven van de betekenis van de termen die hij gebruikt en van de motivering van de methoden die hij toepast*. Hooggestemd idealisme? Zeker. Er is echter ook een didactische aspect. Door bij herhaling nadruk te leggen op de 'opbouw' en het 'waarom' kan worden bereikt dat de leerling een basis heeft om een algoritme, zo nodig, zelf te reconstrueren!

Noten

[1] Tsjechov, A., *Verhalen 1886-87*, G.A. van Oorschot, 1954.

[2] Kindt, M. (2015). Breuken op de helling (1) en (2). *Euclides, 90* (5 en 6).

[3] Dijksterhuis E.J. (1934). Epistemisch wiskunde-onderwijs. *Euclides*, *10* (4), pp. 165-213.

Over de auteur

Martin Kindt was leraar, docent lerarenopleiding, leerplanontwikkelaar en onderzoeker. Ook na zijn pensioen is hij nog actief medewerker van het Freudenthal Instituut. E-mailadres: *M.Kindt@uu.nl*