Nelleke den Braber, Geeke Bruin-Muurling, Ronald Keijzer

Ruimte voor nadenken

In het Nederlandse onderwijs speelt het lesboek met daarin opgaven een centrale rol. Het maken van opgaven is een belangrijk middel in het leren van leerlingen. Maar met opgaven is soms iets geks aan de hand: hoe meer je erover nadenkt, hoe groter de kans dat je niet meer op het bedoelde antwoord uitkomt. In dit artikel analyseren we dit fenomeen aan de hand van het concept gemiddelde, in de leerlijn van basis- en voortgezet onderwijs.

Gemiddelde: de praktijk en in school

In het dagelijks taalgebruik geeft het *gemiddelde* vaak weinig reden om te gaan rekenen. De uitspraak '2020 was geenszins een gemiddeld jaar' kent geen getalsmatige onderbouwing, het zegt alleen dat 2020 een jaar is dat anders is dan vele andere jaren. De uitspraak 'In 2020 was de gemiddelde temperatuur op aarde hoger dan in 2019' is weliswaar wél op cijfers gebaseerd, maar er is voor de lezer nog steeds geen directe reden om te gaan rekenen. Eerder reden tot zorg, zoals om die gemiddelde temperatuur die maar blijft stijgen. Daarbij moet de lezer zich realiseren dat zo'n stijgend gemiddelde natuurlijk niet betekent dat alle dagen van het jaar evenveel warmer zijn. Uitschieters kunnen ook zorgen voor een stijgend gemiddelde. Het gemiddelde is een soort slotsom; een samenvatting waarin fluctuaties en ruis worden gedempt. De 'prijs' die we hiervoor betalen is dat we detail kwijtraken. Diezelfde behoefte zie je bij de coronacijfers eind 2020. De dagkoersen zijn vervangen door weekgemiddelden, omdat die de trend beter zichtbaar maken dan de grote schommelingen in aantal positief geteste mensen van dag tot dag. Als mediagebruiker bereken je vaak niet zelf de gemiddelden. Het gaat vooral om interpreteren van de gemiddelde waarde en het redeneren aan de hand van het gemiddelde als concept.

In de (reken-)wiskundeles gaat het daarentegen bij het begrip gemiddelde meestal niet om het beeld van de grote lijnen. In de (reken-)wiskundeles bepaal je het gemiddelde met een formule als: som van de getallen gedeeld door het aantal getallen. Deze vaardigheid lijkt de belangrijkste focus. Een vaardigheid die vraagt om het herkennen van de op te tellen getallen en het vervolgens delen door het juiste getal. Bij lastiger getallen gebeuren deze bewerkingen, zeker in het voortgezet onderwijs, op de rekenmachine.

Aantal goede antwoorden	
Luuk	8
Bram	8
Tess	4
Noor	12

Gemiddelde berekenen:
1 Tel de getallen bij elkaar op.
$8 + 8 + 4 + 12 = 32$

2 Deel de uitkomst door het aantal getallen.
$32 : 4 = 8$

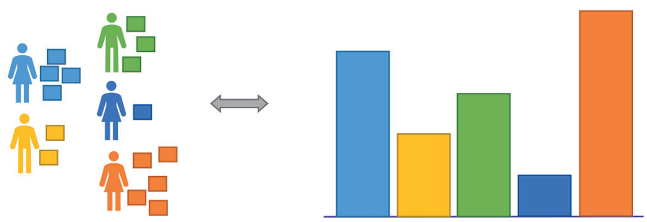
Het gemiddelde van de groep is 8 goede antwoorden.

figuur 1 Wereld in Getallen, groep 7 blok 6FS

In het voorbeeld, zie figuur 1, ligt de nadruk op het uitrekenen van het gemiddelde. Wat het cijfer 8 zegt over de prestatie van deze groep leerlingen, wordt niet besproken.

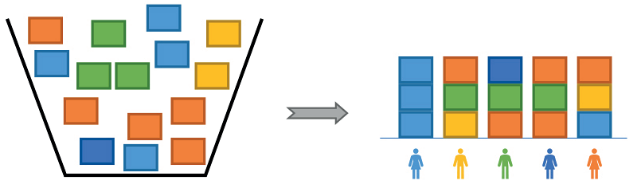
Het gemiddelde als concept

De dagelijkse voorbeelden laten zien dat het concept gemiddelde verschillende kanten heeft. Heb je daarvoor met het aanleren van alleen de procedure voldoende geleerd om uit de voeten te kunnen met het begrip gemiddelde? We bekijken daarom eerst het gemiddelde in meer detail, startend met een aantal meetwaarden, zie figuur 2.



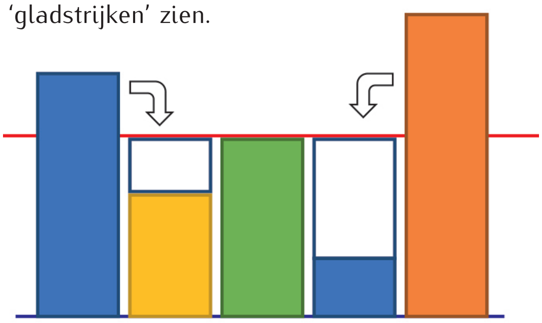
figuur 2 Meetwaarden als basis voor het gemiddelde

Je kunt, zie figuur 3, de formule *som van de getallen gedeeld door het aantal getallen* zien als de opeenvolging van twee stappen: alles bij elkaar leggen ($4 + 2 + 3 + 1 + 5 = 15$ blokjes) en dan eerlijk verdelen (15 blokjes $\div$ 5 personen $= 3$).



figuur 3 Het gemiddelde als 'eerlijk verdelen'.

Er is ook een andere manier: hoeveel moet aan elkaar gegeven worden om gelijk uit te komen. Figuur 4 laat dit 'gladstrijken' zien.

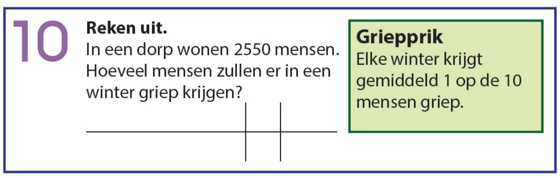


figuur 4 Het gemiddelde als 'geven en nemen' of 'gladstrijken'.

Dit tweede perspectief introduceert het idee van het gemiddelde als een *centrummaat*. Een centrummaat vat als het ware een hoeveelheid aan getallen in één getal samen. Hoe ver die getallen van het gemiddelde afliggen is ook belangrijk, maar die informatie verlies je in het gemiddelde zelf. Je weet alleen dat er boven en onder dat gemiddelde evenveel afwijking is. Je hebt een *spreidingsmaat* nodig om beter inzicht te krijgen in hoe de getallen zich verhouden tot het gemiddelde.

Voorbeeld 1: Griepprik

In figuur 5 staat een opgave voor groep 6, die onderdeel is van een serie opgaven over verhoudingen in de vorm '1 op de ...'.

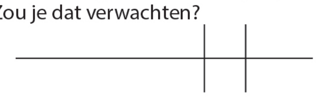


figuur 5 Opgave uit Getal & Ruimte Junior – groep 6

Je kunt dit een traditionele redactiesom noemen. Kenmerkend element in de serie waaruit deze opgave komt is de lege verhoudingstabel. Leerlingen moeten de verhouding 1 op de 10 daarin invullen, samen met het totaal aantal mensen. Dan kunnen ze de context loslaten en rekenen. Bij dergelijke redactiesommen leren leerlingen signalen in de tekst te gebruiken om het bedoelde antwoord uit te rekenen. Hier zijn dat 2550, '1 op de 10' én de lege verhoudingstabel. Impliciet leren ze van dergelijke opgaven dat je elementen die de context typeren beter kunt negeren. Hier moeten ze negeren dat het over griep in de winter gaat en dat de mensen in een dorp wonen. Het woord 'griepprik' blijkt niet relevant. En opvallend genoeg ook het woord 'gemiddeld' niet.
Hoe anders is dat als je de context serieus neemt. 1 op de 10 betekent hier dat 10% van de Nederlanders griep krijgt. Dat betekent niet dat dit getal voor elke subgroep zal gelden, zoals een klein dorp. 1 op de 10 is hier een soort gemiddelde over alle gemeentes in Nederland. Het woord 'gemiddeld' duidt waarschijnlijk op het gemiddelde over een aantal winters heen. De angel van de opgave zit in de formulering: 'Hoeveel mensen zullen er in een winter griep krijgen'. Deze duidt op precisie en is daarom veel te stellig. Immers, bij zo'n kleine groep mensen is zelfs de schatting op basis van 10% gemiddeld over Nederland weinig accuraat voor het werkelijke aantal mensen dat griep zou krijgen. We zien dat in een traditionele redactiesom als deze de focus ligt op de aan te leren of geleerde bewerking. Hier is dat een focus louter op het oefenen met eenvoudige verhoudingen. In de opgave staat wel het woord 'gemiddeld', maar dat het hier om een gemiddelde gaat komt eigenlijk niet naar voren. Ga je hier écht nadenken, dan wordt de gestelde vraag met de gegeven informatie onbeantwoordbaar. Het besef dat een verhouding binnen een grote groep niet één-op-één vertaald kan worden naar een kleine deelgroep komt niet aan de orde. Zou je een dergelijke context echter in het dagelijks leven tegenkomen, dan vragen de getallen wel degelijk om een verdere doordenking van de specifieke kenmerken van de context. In dit geval leidt dat tot de conclusie dat je meer moet weten om te modelleren of schatten hoeveel mensen in dat dorp griep zullen krijgen. Aan het gemiddelde heb je hier immers niet genoeg. Je moet meer weten over de context en in hoeverre die bepalend is voor de spreiding. Rekenen in het maatschappelijke verkeer, het functioneel gebruik van je rekenvaardigheden, vraagt dus om meer dan alleen de technische vaardigheid. Wil je ook die kant van het rekenen aan bod laten komen en leerlingen aanleren om kritisch naar een context te kijken, dan is een kleine aanpassing van een opgave vaak genoeg. Figuur 6 is een bewerking van figuur 5. De aanpassingen zorgen ervoor dat je niet alleen op basis van de signaalwoorden in de tekst de opgave kunt maken. De nieuwe opgave lokt zelfs verbazing uit: niemand krijgt griep. Deze blikwisseling zet aan tot het doordenken van de aanduiding 'gemiddeld'. Dat het om een eiland gaat helpt de leerlingen verder op het spoor van afwijkingen van het gemiddelde. En natuurlijk zet deze aangepaste versie nog steeds aan tot dezelfde berekening als het origineel. De vraag hoeveel griepgevallen >

je grofweg zou verwachten op grond van het gemiddelde komt immers als natuurlijk aan bod. Het verschil is dat nu aan de uitkomst van de deling 2550 : 10 door de doordenking van de context wel de juiste betekenis wordt gegeven. Zo kom je dichter bij essenties van het begrip gemiddelde: het berekende aantal griepgevallen is een indicatie, een schatting. Zo kan dan ook nog met leerlingen besproken worden of het berekende gemiddelde aantal ook echt ergens precies zal voorkomen.

Reken uit.
Op een eiland wonen 2550 mensen.
Niemand krijgt deze winter griep.
Zou je dat verwachten?



Griepprik
Elke winter krijgt gemiddeld 1 op de 10 mensen griep.

figuur 6 Aangepaste opgave

De beschouwing over deze griepprik-opgave leert dat het belangrijk is om oog te hebben voor de context waarbinnen je rekent. Immers, dan pas is het mogelijk om betekenis aan de berekening en getallen te geven. Het helpt leerlingen bovendien om het onderliggende wiskundige concept beter te begrijpen en dat hebben ze nodig wanneer zij het flexibel en creatief in andere situaties willen gebruiken. Laten we verder kijken naar het concept 'gemiddelde' en kijken hoe dit in het voortgezet onderwijs onder de aandacht gebracht wordt van de leerlingen.

Voorbeeld 2: Gemiddeld cijfer

In het voortgezet onderwijs komt het gemiddelde terug en daarnaast als centrummaat benoemd, dat later wordt uitgebreid met het *gewogen gemiddelde*. De centrummaten worden uitgebreid met mediaan en modus. Ook wordt de standaardafwijking als spreidingsmaat geïntroduceerd. Figuur 7 toont een voorbeeld van een opgave waarin de context aansluit bij de belevingswereld van de leerlingen: het gewogen gemiddelde van de behaalde wiskundecijfers.

Voor wiskunde heeft Annette uit B1D de volgende cijfers gehaald: 4,9; 7,3; 7,5 en 6,0.
Bereken haar gemiddelde als alle cijfers even zwaar meetellen.
Bereken haar gewogen gemiddelde als het cijfer 7,3 twee keer en het cijfer 6,0 drie keer meetelt.

figuur 7 Opgaven uit Math4all havo/vwo, klas 1/2

Ondanks dat de context betekenisvol is, richt de methode zich ook hier weer sterk op de technische kant. Het gaat nogmaals om de aanpak 'de som van een aantal getallen gedeeld door het aantal ervan'. Rekening houdend met een gewogen gemiddelde geeft dat:
$(4{,}9 + 2 \times 7{,}3 + 7{,}5 + 3 \times 6{,}0) \div 7$. In de methode krijgen de leerlingen nog een vervolgvraag voorgelegd, zie figuur 8. Die kan met dezelfde aanpak worden beantwoord, ofwel $(5{,}1 + 7{,}3 + 7{,}3 + 7{,}5 + 6{,}0 + 6{,}0 + 6{,}0) \div 7$. Om het antwoord vervolgens af te ronden op een geheel getal.

Annette maakt één toets over. Het cijfer 4,9 wordt een 5,1.
Wat wordt nu haar eindcijfer afgerond op een geheel getal?

figuur 8 Vervolgvraag

Bij deze vervolgvraag is echter ook een andere, efficiëntere, aanpak mogelijk. Als je het concept gemiddelde begrijpt voorbij de instrumentele kant van de berekening, dan zie je dat er in totaal 0,2 punt bij komt. Deze wordt eerlijk verdeeld (uitgesmeerd) over zeven cijfers. Als je dat bedenkt, zie je dat het voor het bepalen van het nieuwe gemiddelde genoeg is om $0{,}2 \div 7$ op te tellen bij het al eerder berekende gemiddelde. Ofwel, bij een reeds bestaande verdeling kan een toevoeging worden 'uitgesmeerd' over de bestaande verdeling. Wanneer het onderwijs hier alleen gericht is op het antwoord, zou je kunnen zeggen dat beide manieren goed zijn. Leerlingen zien dan niet elkaars aanpak. Wanneer de gekozen aanpak het gesprek in de klas wordt en aanpakken worden vergeleken dan kan dat van enorme meerwaarde zijn om concepten beter te doorgronden. Zo geeft een gesprek waarom de tweede aanpak mag en zelfs efficiënter is de kans dieper in te gaan op het concept gemiddelde. En dat niet alleen. Als je leert kijken naar het gemiddelde als dat 'uitsmeren' dan zie je in één oogopslag dat in dit geval de verhoging van de 4,9 naar een 5,1 voor het gemiddelde maar heel erg weinig oplevert. Je zou zelfs kunnen beredeneren dat je beter een toets die vaker meetelt kunt herkansen dan een schriftelijke overhoring die maar één keer meetelt. In dit voorbeeld kom je nog steeds uit op hetzelfde antwoord als je gaat nadenken, het gaat dus niet mis zoals in het eerste voorbeeld. Maar ook hier heeft het bieden van ruimte om na te denken een meerwaarde. Het voorbeeld van het uitrekenen van een gemiddelde en het aanpassen van het gemiddelde als een van de cijfers iets wordt verhoogd kan weer aanleiding geven tot het verkennen van het concept 'gemiddelde'. In deze situatie gaat het vooral mis, als deze kansen in het onderwijs niet met beide handen worden aangegrepen.

Wat is wiskunde?

De twee voorbeelden laten zien dat je op verschillende manieren kunt kijken naar de gegeven context in de opgave of naar de wiskundige kern van de opgave. Ze gaan uit van verschillende ideeën over wat wiskunde is. Vanaf de jaren '80 van de vorige eeuw wordt wiskunde gezien als de wetenschap van patronen en structuren. Deze overeenstemming over de aard van het vak biedt overigens nog genoeg ruimte voor verschil van inzicht in wat wiskunde is. Gaat het bij de patronen en structuren puur om de procedurele kant van de wiskunde, om haar procedures, technieken en wiskundige feiten? Of is wiskunde conceptueel, creatief en zelfs ambigu en gaat het over onderliggende structuren en de samenhang tussen onderwerpen? Is wiskunde door de mens bedacht, of bestaat het ook zonder de mens? Is het een formeel bouwwerk of een menselijke activiteit? Hoe je wiskunde ziet heeft invloed op wat je als het doel van het rekenen-wiskundeonderwijs ziet. Byers[1] neemt het leren van wiskundigen als uitgangspunt. Hij onderscheidt twee perspectieven. Je kunt wiskunde zien als een statisch en formeel bouwwerk. Het gaat dan om een vakgebied dat geregeerd wordt door rigide logica, waarin je als je de regels maar netjes uitvoert, altijd bij het goede antwoord uitkomt. Vanuit dat perspectief ligt het voor de hand om het onderwijs zo in te richten dat leerlingen stukje bij beetje zicht krijgen op dit formele bouwwerk. Daar hoort bij dat je leerlingen rekenregels, stappenplannen of een vaste probleemaanpak aanbiedt. De opgave over de griepprik is daar een voorbeeld van. In de reeks opgaven waar deze opgave één van was, worden de leerlingen getraind om de verhoudingstabel te gebruiken om op het oog gelijkwaardige opgaven op te lossen. Na voldoende oefening hebben ze dit op een gegeven moment wel onder de knie. Deze lesaanpak leidt ertoe dat leerlingen getraind zijn de rekenvaardigheid wel in contexten toe te passen, maar zonder betekenis aan die context toe te kennen. Uitgangspunt blijven de signaalwoorden in de tekst én eventueel toegevoegde rekenaanwijzingen zoals een verhoudingstabel onder de opgave. Traditionele redactiesommen binnen deze lesaanpak zijn gericht op het bieden van een context om de bedoelde berekening uit te voeren. Maar verder doet die context er eigenlijk niet toe. Daardoor zijn ze regelmatig niet echt waarheidsgetrouw en verliezen daarmee betekenis als echte toepassing. De opgaven over het gewogen gemiddelde berekenen om achter je gemiddelde cijfer te komen zijn wel betekenisvol en bieden tal van kansen om het concept gemiddelde beter te leren kennen. Maar dan moeten deze kansen wel gegrepen worden. Onze ervaring leert dat dat nauwelijks gedaan wordt. Het onderwijs richt zich in het algemeen in de dagelijkse lespraktijk toch vooral op het intrainen van rekenwijzen en stappenplannen. Byers betoogt dat wiskunde meer is. De kracht van wiskunde ligt juist in het complexe huwelijk tussen deze logische kant én de meer creatieve, ambigue kant van de wiskunde. Het gaat volgens Byers niet om een keuze tussen deze twee, maar over het samenbrengen van vaste werkwijzen én het flexibel omgaan met de wiskunde. Dat veronderstelt dat het nodig is wiskundige concepten goed te leren begrijpen, maar ook dat het belangrijk is dat je leert dat je op meerdere manieren naar een wiskundig concept kunt kijken. We lieten dit aan het begin van dit artikel zien in figuur 2, 3 en 4. In de metafoor van het alles bij elkaar leggen om het daarna eerlijk te verdelen, vonden we de formule voor het gemiddelde. De metafoor van het 'gladstrijken', waarbij de staven allemaal even lang moeten worden, ondersteunt weer andere aspecten van het begrip gemiddelde, zoals centrummaat. Daarvan leer je dat er precies evenveel afwijking van het gemiddelde boven het gemiddelde als onder het gemiddelde ligt. Daar leer je dat als je proefwerkcijfer iets hoger uitvalt, je alleen maar dat verschil hoeft 'uit te smeren' om je nieuwe gemiddelde te vinden. Dit bredere perspectief op wiskunde betekent dat het alleen aanleren van rekenregels, stappenplannen en standaard probleemaanpak niet voldoende is. Een inzicht dat internationaal steeds breder gedragen wordt.

Perspectief

We lieten in twee voorbeelden zien wat het oplevert als wiskunde wordt gezien als meer dan slechts een formeel bouwwerk en vaststaande rekenregels. Het voorbeeld van de griepopgave laat zien hoe belangrijk het is om na te denken over de context waarin je rekent, en wat de betekenis van het uitgerekende antwoord is. Het voorbeeld van het gewogen gemiddelde laat zien dat het op meerdere manieren naar het gemiddelde kunnen kijken de leerlingen nieuwe inzichten biedt. Het verdiept het concept en resulteert bovendien in een snelle manier om het nieuwe gemiddelde uit te rekenen. Het beeld dat iemand heeft van wiskunde bepaalt ook de doelen die je wilt stellen in het reken-wiskundeonderwijs. De voorbeelden uit de reken-wiskundemethodes die wij lieten zien, maken dat zichtbaar. Bij zowel de griepprik-opgave als de opgave over proefwerkcijfers is het uitgangspunt dat er gewerkt wordt aan het opbouwen van de wiskunde als een logisch, statisch en formeel bouwwerk. We lieten zien dat er maar weinig aanpassingen nodig zijn om de meer conceptuele kant van de wiskunde in te brengen. Dat is nodig; als we dat doen geven we leerlingen de ruimte om in de reken-wiskundeles na te denken. Sterker nog, we geven het signaal af dat nadenken bij wiskunde hoort, in de hoop dat ze een breed beeld van wiskunde ontwikkelen. Dat is winst, want juist deze creativiteit in denken is wat de samenleving van (jonge) mensen vraagt. Een breder beeld van wat wiskunde is betekent natuurlijk niet dat de wiskunde als formeel bouwwerk uit het zicht verdwijnt. Integendeel, op verschillende manieren kijken naar een wiskundig concept is de meest voor de hand liggende manier om het formele bouwwerk zo sterk mogelijk te maken en te leren kennen op een manier dat je er ook >

iets mee kunt. Dit vraagt om reken-wiskundeonderwijs dat leerlingen aan het denken zet en niet onderwijs waar nadenken eigenlijk niet de bedoeling is of zelfs wordt afgeleerd. Een geruststelling dus voor wie zich wel eens zorgen maakt over de aandacht voor basisvaardigheden bij reken-wiskundeonderwijs waarin het nadenken gestimuleerd wordt. Die krijg je er bij deze brede insteek gewoon, in versterkte vorm, bij.

Dit artikel vormt een duo met ons artikel in het septembernummer van *Volgens Bartjens*. Elk van de artikelen is een bewerking voor vo respectievelijk po.

Noten

[1] Byers, W.P. (2010). *How Mathematicians Think*. Princeton, NJ: Princeton University Press.

[2] Met dank aan Ton van der Heiden voor zijn bijdragen aan discussies die tot dit artikel leidde.

Over de auteurs

Nelleke den Braber is docent-onderzoeker wiskundedidactiek bij de eerste- en tweedegraads lerarenopleiding van NHL-Stenden Hogeschool.
E-mailadres: *nelleke.den.braber@nhlstenden.com*
Geeke Bruin-Muurling is zelfstandig vakdidacticus en in allerlei rollen werkzaam in po, vo en mbo. E-mailadres: *G.Bruin-Muurling@hotmail.nl*. Ronald Keijzer is als lector rekenen-wiskunde verbonden aan Hogeschool iPabo, Amsterdam/Alkmaar. E-mailadres: *r.keijzer@ipabo.nl*