

# Katern Algebraïsche vaardigheden 3

|                                                                  |    |
|------------------------------------------------------------------|----|
| §1 Rekenen met breuken, verhoudingen en procenten .....          | 4  |
| §2 Rekenen met machten, wortels, exponenten, en logaritmen ..... | 11 |
| §3 Rekenen met haakjes.....                                      | 24 |
| §4 Formules en grafieken van standaardfuncties.....              | 30 |
| §5 Redeneren met formules en grafieken .....                     | 37 |
| §6 Formules maken en modelleren.....                             | 48 |
| §7 Probleemaanpak en Gemengde opgaven.....                       | 56 |
| §8 Formatieve opdrachten .....                                   | 68 |

Auteurs: Peter Kop en Erik van Barneveld

Datum: maart 2022

## Woord vooraf aan leerlingen en docenten

### Aan leerlingen

In dit katern over algebraïsche vaardigheden staan hopelijk al een hoop dingen die je al weet/kan. Via uitgebreide oriëntatie door de centrale vragen moet je proberen uit te zoeken wat je al weet/kan en wat nog niet. In de V-vragen krijg je ondersteuning als je problemen hebt met de centrale vragen. Na de antwoorden op de centrale vragen volgen de algebraïsche bouwstenen: wat te onthouden (parate kennis en vaardigheden). We hebben geprobeerd om het aantal algebraïsche bouwstenen te beperken. Als er heel veel algebraïsche bouwstenen zouden zijn dan heb je problemen met “alles” te onthouden en te bedenken “wanneer moet ik wat gebruiken”. We kiezen daarom liever voor een wat kleiner algebraïsch gereedschapskistje en besteden meer aandacht aan de oefening om deze functioneel te gebruiken. In de oefenopgaven die volgen is onderscheid gemaakt tussen standaardopgaven (T1), die je effectief en efficiënt moet kunnen oplossen, en opgaven die het probleem oplossen oefenen (T2), dat wil zeggen om te oefenen om het algebraïsche gereedschapskistje te gebruiken in niet standaard situaties. De paragraaf Probleemaanpak en Gemengde opgaven bevat grotere opgaven die het probleem oplossen verder oefenen. Het is niet de bedoeling al deze opgaven te maken: meer is niet altijd beter. Overleg met je docent welke opgaven je het beste kunt oefenen.

### Aan docenten:

In de katernen Algebraïsche Vaardigheden staat betekenisvol algebra onderwijs centraal. Onderzoek naar symbol sense, in het bijzonder inzicht in algebraïsche formules van Peter Kop, vormt een inspiratiebron voor deze katernen (<https://www.universiteitleiden.nl/nieuws/2020/10/vriendschap-sluiten-met-algebraïsche-formules>). Dit katern bevat dezelfde paragrafen-structuur als de katernen algebraïsche vaardigheden voor klas 4 en klas 5. In vergelijking met klas 5 is meer aandacht voor het rekenen met letters, het redeneren met formules, het

gebruik van formules bij andere vakken, en modelleren. Daarnaast zijn de T2 vraagstukken complexer.

Bij klassikale besprekingen van gemengde opgave kan de docent gebruik maken van het framework voor probleemaanpak bij algebra dat in de paragraaf Probleemaanpak staat. Daarin wordt aan de hand van herkenningsniveaus (probleem familie herkennen, probleem opdelen in sub-problemen, kenmerken van probleem herkennen, en geen herkenning) heuristieken besproken. Bij het begeleiden van leerlingen die werken aan gemengde opgaven kan de docent hints geven op basis van dit framework. De formatieve opdrachten in de laatste paragraaf zouden ook als extra opdrachten voor specifieke doelgroepen van leerlingen gebruikt kunnen worden.

Een indicatie voor studielast van de paragrafen: totaal 18 lessen (ongeveer 6 weken

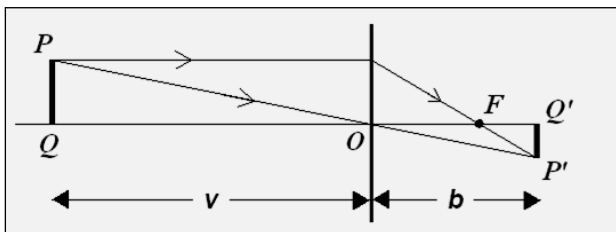
§1 2 lessen; §2 2 lessen; §3 2 lessen; §4 3 lessen; §5 3 lessen; §6 3 lessen ; §7 3 lessen

## §1 Rekenen met breuken, verhoudingen en procenten

### A. Centrale vragen

#### CV 1 Lenzen-formule

In de natuurkunde wordt de lenzenformule gebruikt. Deze lenzenformule geeft het verband tussen de brandpuntsafstand, voorwerpsafstand en de beeldafstand:  $\frac{1}{f} = \frac{1}{v} + \frac{1}{b}$ , waarbij  $f$  staat voor de brandpuntsafstand,  $b$  voor de beeldafstand (de afstand van het beeld tot de lens) en  $v$  voor de voorwerpsafstand (de afstand van het voorwerp tot de lens). Zie figuur.



Deze formule zie je ook wel in de vorm:  $b = \frac{1}{\frac{1}{f} - \frac{1}{v}}$  of  $b = \frac{f \cdot v}{v - f}$

Laat zien hoe beide formules volgen uit de gegeven lenzenformule  $\frac{1}{f} = \frac{1}{v} + \frac{1}{b}$

#### CV 2 Rekenen met breuken

Misschien weet je al goed hoe je met breuken moet rekenen als er enkel getallen staan. Gebruik die kennis de formules steeds om te schrijven tot één breuk, dus van de vorm  $\frac{\dots}{\dots}$ :

a.  $y1 = \frac{2}{x+4} + \frac{x}{x-3} = \dots$

b.  $y2 = \frac{3x}{x+1} \cdot \frac{x}{x-2} = \dots$

c.  $y3 = \frac{\frac{3}{x-4}}{\frac{x}{x-2}}$

d.  $y4 = x + 5 \cdot \frac{1}{x-2}$

e.  $y5 = \frac{p}{a} + \frac{q}{b} = \dots$

f.  $y6 = \frac{p}{a} \cdot \frac{q}{b} = \dots$

g.  $y7 = \frac{\frac{p}{q}}{\frac{q}{b}} = \dots$

h.  $y8 = p \cdot \frac{q}{b} = \dots$

## CV 3 Procenten bij medicijnen

- Een kindje van 9 kg moet driemaal daags van een bepaald medicijn 10 microgram per kg lichaamsgewicht toegediend krijgen. Op de afdeling is een 0,003 % oplossing. Een 1% oplossing wil zeggen: 10 mg per ml.  
Hoeveel ml moet er per keer toegediend worden.
- Een potje voedingssupplement Vitamine D3 bevat 120 tabletten. Er wordt een dagdosering van 3 tabletten geadviseerd. Op het potje staat dat deze dagdosering 60% is van de aanbevolen dagelijkse hoeveelheid Vitamine D3. Hoeveel tabletten zou je nodig hebben voor de volledige aanbevolen dagelijkse hoeveelheid Vitamine D3?

## CV 4 Algebraïsche formules lezen

Welke expressies zijn niet gelijkwaardig met  $y = \frac{60}{x}$ ; x is steeds positief

$$a \gg y = 12x^{-1} \cdot 5$$

$$b \gg y = \frac{12}{x^2} \cdot 5x$$

$$c \gg y = \frac{60 + x}{x^2}$$

$$d \gg y = 60 \cdot \frac{1}{x}$$

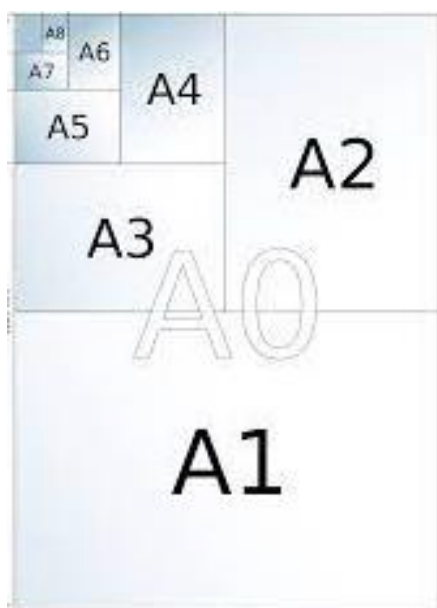
$$e \gg y = \frac{6}{x} \cdot \frac{10}{x}$$

$$f \gg y = \frac{6}{x} + \frac{54}{x}$$

$$g \gg y = \frac{30}{x} \cdot 2$$

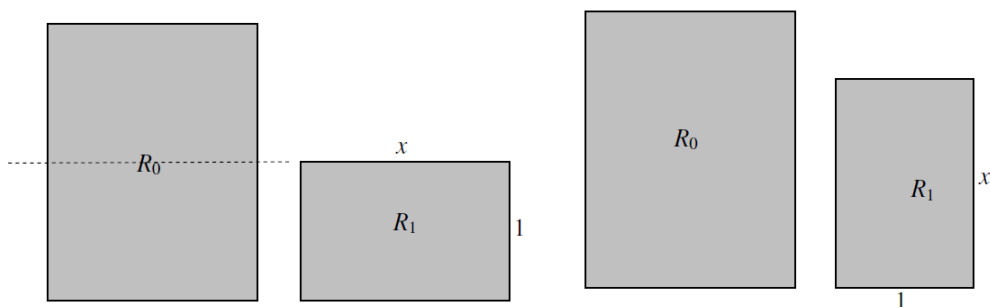
## CV 5 Verhoudingen

A4 is het papierformaat dat veel gebruikt wordt, bij bijvoorbeeld proefwerken en examens. Als je zo'n A4'tje dubbelvouwt krijg je weer een rechthoek die *gelijkvormig* is, het A5 formaat. Die kun je ook weer dubbelvouwen zodat je een A6 formaat krijgt. Enzovoort. Hieronder zie je een figuur waarin men begonnen is met A0 formaat.



In onderstaande figuur is een exemplaar uit deze serie genomen. We hebben die  $R_0$  genoemd. Na dubbelvouwen krijgen we  $R_1$ , die gelijke verhouding van zijden heeft. De verhouding van de zijden van  $R_1$  noemen we  $x : 1$ . In de rechter figuur is de rechthoek  $R_1$  gedraaid.

- a. Wat is de verhouding van de zijden van  $R_0$ ?



- b. Leg uit dat uit de gelijke verhoudingen van de zijden van  $R_0$  en  $R_1$  volgt dat  $x = \sqrt{2}$

Indien je moeite had met deze centrale vragen kijk dan eerst naar onderstaande V opgaven

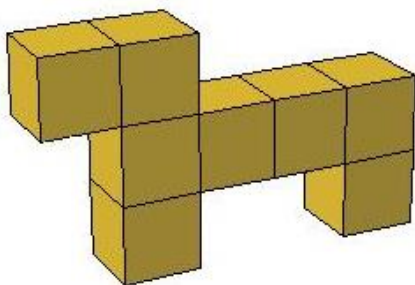
### V Opgave V1

Schrijf de antwoorden met 1 breuk:

- $5 \cdot \frac{3}{20} =$
- $7 \cdot \frac{2b}{a} =$
- $\frac{1}{3} \cdot \frac{4}{5} =$
- $\frac{1}{3} \cdot \frac{a}{3} =$
- $\frac{1}{5} - \frac{1}{6} =$
- $\frac{1}{4} - \frac{a}{3} =$
- $\frac{3}{4} + \frac{2}{5} =$
- $\frac{b}{4} + \frac{a}{3} =$

### V Opgave V2

Hieronder zie je een model van een (dieren)lichaam D dat is opgebouwd uit 8 dezelfde kubusjes, met ribbe  $R$ . We nemen ter vereenvoudiging aan dat ons dier twee poten heeft.



De lengte van het dier is  $5R$  (5 blokjes lang), de breedte  $1R$ , de oppervlakte  $O = 34R^2$ , en de inhoud (Volume)  $V = 8R^3$ .

a. Ga dit na.

Iemand ziet een dergelijk model-dier van houten blokjes en wil zelf ook zo'n model-dier maken, maar dan met vier keer zo grote blokjes. Dit dier noemen we D4 model-dier.

Als R 4 x zo groot wordt dan wordt de breedte 4 x zo groot.

b. Maar hoeveel keer zo groot wordt de lengte? En oppervlakte? En inhoud?

Grote dieren hebben grote poten. We kijken nu naar het gewicht dat een poot per vierkante cm (cm<sup>2</sup>) moet dragen.

c. Vergelijk het model-dier D en het model-dier D4 met betrekking tot het gewicht dat een poot per vierkante cm (cm<sup>2</sup>) moet dragen.

## Antwoord op de centrale vragen

## B. Theorie (om te onthouden) en opgaven

**Theorie: breuken, verhoudingen en procenten**

Breuken kun je zien als “deel van geheel”, verhouding, procent, getal, en als deling; de context bepaalt wat bedoeld wordt.

Bij het rekenen met breuken (breuk als getal) kun je enkel gelijksoortige (gelijknamige) breuken optellen; deze strategie kun je ook gebruiken bij delen; bij vermenigvuldigen is de basis steeds  $1/3 \cdot 1/5 = 1/15$  (visualiseer  $1/3$  deel van een vijfde taart of chocoladereep)

Bij de berekening van procenten zijn verschillende strategieën: gebruik verhoudingstabel, gebruik vermenigvuldiging (5% van ... is hetzelfde als  $0,05 \cdot \dots$ ), of gebruik uitschrijven via 1%

Bij verhoudingen is de basis steeds het totaal van de verhoudingsgetallen vergelijken met het totaal dat verdeeld moet worden (verdeel 150 in verhouding 2:3; verhoudingsgetallen zijn opgeteld  $2+3=5$ ; dus de eerste krijgt  $2/5 \cdot 150$  en de tweede  $3/5 \cdot 150$ )

Bij minder vaak voorkomende opgaven zoals omrekenen van snelheden, concentraties, enz. kun je het beste uitschrijven.

Bij gelijkvormige figuren (bijvoorbeeld vierhoeken) en lichamen (bijvoorbeeld balken) geldt dat als de afmetingen  $a$  keer zo groot zijn dan is de oppervlakte  $a^2$  keer zo groot en de inhoud  $a^3$  keer zo groot.

De rekenregels voor breuken kun je ook formeler opschrijven (aangevuld met getallenvoorbeelden)

| Algemene regel                                              | voorbeeld                                                      |
|-------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------|
| $A \cdot \frac{B}{C} = \frac{AB}{C}$                        | $5 \cdot \frac{2}{3} = \frac{10}{3}$                           |
| $\frac{A}{B} \cdot \frac{C}{D} = \frac{AC}{BD}$             | $\frac{2}{5} \cdot \frac{2}{3} = \frac{4}{15}$                 |
| $\frac{A}{B} + \frac{C}{D} = \frac{AD + BC}{BD}$            | $\frac{2}{3} + \frac{4}{5} = \frac{2 \cdot 5 + 3 \cdot 4}{15}$ |
| Als $\frac{A}{B} = \frac{C}{D}$ dan $A \cdot D = B \cdot C$ | als $\frac{3}{6} = \frac{1}{2}$ dan $2 \cdot 3 = 6 \cdot 1$    |
| Als $\frac{A}{B} = C$ dan $B \cdot C = A$                   | als $\frac{6}{3} = 2$ dan $2 \cdot 3 = 6$                      |

**T1 Opgave 1**

Schrijf als 1 breuk

$$a. \frac{8 \cdot 37 + 5 \cdot 37 + 37}{37 + 37 + 37 + 37} =$$

$$b. \frac{40(x-1) \cdot (x+2)^2}{4(x-1) \cdot (x+2)} =$$

$$c. \frac{1}{a+1} \cdot \frac{a}{a-1} =$$

$$d. \frac{1}{x} - \frac{x+1}{x-1} =$$

$$e. \frac{\frac{x-1}{x}}{x+1} =$$

$$a. (x+2) \cdot \frac{2x}{4(x+2)} =$$

$$b. \frac{1}{x-2} + \frac{2x}{x+2} =$$

$$c. \frac{1}{x-2} \cdot \frac{2x}{x+2} =$$

$$f. \frac{1}{x-1} / \frac{2x}{x+2} =$$

**T1 Opgave 2**

Schrijf als één breuk.

$$a. k = \frac{6}{L-1} \cdot \frac{2}{L^2}$$

$$b. k = \frac{3}{p^2} - \frac{2}{p^3}$$

$$c. G = \frac{20}{x} - \frac{30}{10-x}$$

$$d. T = 3t \cdot \frac{t}{t+2}$$

$$e. b = 3a + 1 + \frac{1}{a+1}$$

**T1 Opgave 3**

Schrijf in de aangegeven vorm

$$a. \frac{40x+3x^2}{x^2} = \frac{\dots}{\dots} + \dots$$

$$b. \frac{40(x-1)(x+2)^2}{4(x-1) \cdot (x+2)} = \dots$$

$$c. \frac{40(x-1)+(x+2)^2}{4(x-1) \cdot (x+2)} = \frac{\dots}{\dots} + \frac{\dots}{\dots}$$

**T2 Opgave 4**

$$a. \text{ Gegeven is } \frac{3K+8}{6} = \frac{3p+1}{p}; \text{ schrijf K in de vorm: } K = a \cdot p + b$$

$$b. \text{ Gegeven is } y = \frac{10}{2x+1}; \text{ druk x uit in y}$$

c. Gegeven is  $y = \frac{4x}{2x+1}$ ; druk  $x$  uit in  $y$

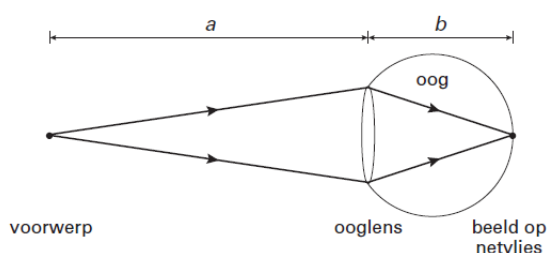
d. Gegeven is  $\frac{3K+g}{6} = \frac{3p+g}{p}$ ; schrijf  $K$  in de vorm:  $K = a \cdot p + b$

## T2 Opgave 5

Om een voorwerp op verschillende afstanden scherp te kunnen zien heeft de mens de mogelijkheid om te accommoderen, dat wil zeggen de sterkte van zijn ogen aan te passen, zodat er een scherp beeld op zijn netvlies komt. Om een voorwerp op een afstand  $a$  van het oog scherp te kunnen zien is een bepaalde sterkte  $S$  van het oog nodig. Voor deze sterkte  $S$  gebruiken we het volgende model:  $S = \frac{a+b}{a \cdot b}$

Hierbij is:

- $a$  de afstand in meters tussen het voorwerp en de ooglenz;
- $b$  de afstand in meters tussen het netvlies en de ooglenz;
- $S$  de sterkte in dioptrieën (dpt).



Iemand heeft een rechteroog met  $b = 0,018$  m. Hij kan de sterkte van zijn rechteroog variëren van 58 tot en met 63 dpt.

- Bereken op welke afstanden dit rechteroog voorwerpen scherp kan zien. Rond de grenswaarden in je antwoord af op twee decimalen.
- Beredeneer aan de hand van de formule dat, bij vaste waarde van  $b$ , als  $a$  heel groot wordt dat  $S$  nadert naar .....
- Toon aan dat de formule ook te schrijven is als  $S = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$
- Stel dat  $b$  constant is. Beredeneer aan de hand van de formule hoe  $S$  moet veranderen als  $a$  kleiner wordt.

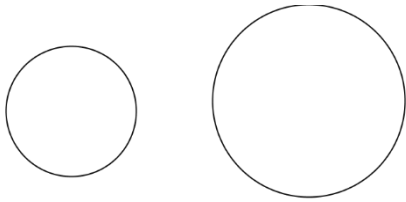
## T1 Opgave 6

Maak een breuk  $\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} = \frac{\dots}{\dots}$

## T2 Opgave 7

In de Bosatlas wordt vaak cirkels gebruikt om landen te vergelijken.

Hieronder zie je voor twee landen aangegeven hoeveel inwoners er wonen. Links land A en rechts land B.



De verhouding van de oppervlakten geeft de verhouding van de inwonersaantallen.

De oppervlakte van cirkels kun je berekenen met de formule:  $Opp = \pi \cdot R^2$ , waarbij de straal  $R$  is.

In land A wonen 5 miljoen mensen.

- a. Meet de stralen van de cirkels en bereken daarmee hoeveel mensen er in land B wonen.
- b. In land C wonen 120 miljoen mensen. Bereken de straal van de cirkel die het inwonersaantal in land C geeft

## T1 | Opgave 8

Hoeken kunnen gemeten worden in graden en in radialen. Het aantal graden en het aantal radialen is rechtevenredig met elkaar, waarbij  $360^0$  overeenkomt met  $2\pi$  radialen.

Maak een formule waarmee je bij een gegeven aantal graden ( $a$  graden) het aantal radialen kunt berekenen.

Maak ook een formule waarbij je bij een gegeven aantal radialen ( $b$  rad) het aantal graden kunt berekenen.

## §2 Rekenen met machten, wortels, exponenten en logaritmen

### A. Centrale vragen

#### CV 6 Machtsfuncties

In deze opgave kijken we naar het verband tussen gewicht (G) en hersengewicht (H) van een zoogdier (beide in gram):  $H = 0,16G^{\frac{2}{3}}$

|                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                   |                                                                                        |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------|
| <b>Machtsfunctie</b><br>Schrijf een aantal andere formules op die gelijkwaardig zijn. Hieronder enkele suggesties. Vul deze aan zodat ze kloppen en verzin er nog enkele.<br>$H = 0,06G^{\frac{2}{3}} + \dots$ ; $H = 0,16G^{\frac{1}{3}} \cdot \dots$ ; $H = 0,16\sqrt[3]{G}$ ; $H = (\dots \cdot G)^{\frac{2}{3}}$ ; $H = 0,16\frac{\dots}{G}$ ;<br>$H = \dots$ | Schets de grafiek van bij deze formule.                                                |
|                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                   | Leg uit dat uit de formule van H volgt:<br>$\log(H) = \frac{2}{3}\log(G) + \log(0,16)$ |
| Maak de omkeer formule, dus een formule van de vorm $G = \dots$                                                                                                                                                                                                                                                                                                   | Toon aan dat H steeds op dezelfde wijze verandert als G twee keer zo groot wordt.      |

#### CV 7 exponentiele functie

De halfwaardetijd is de tijd die nodig is om de hoeveelheid van het geneesmiddel in het bloed te halveren. Bij veel medische onderzoeken wordt gebruik gemaakt van Technetium-99m, dat als radioactieve tracer bij scans gebruikt wordt. De hoeveelheid radioactiviteit van deze stof halveert iedere 6 uur. Daarnaast scheidt het lichaam deze stof via de natuurlijke weg uit. Hierdoor is de radioactieve stof slechts enkele dagen in het lichaam aanwezig.

We stellen de hoeveelheid radioactiviteit bij het toedienen op 100.

Maak de volgende vragen.

|                                                                                                                              |                                                                                                                                       |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Bereken met hoeveel procent de radioactiviteit per dag (24 uur) afneemt. En met hoeveel procent per uur?                     | Maak een schets van de grafiek van N                                                                                                  |
| Leg uit dat de hoeveelheid radioactiviteit na t uur berekend kan worden met de formule:<br>$N = 100 \cdot 0,5^{\frac{t}{6}}$ | Schrijf de formule voor N in de vorm en bereken steeds a en b<br>$N = b \cdot g^t$ $N = 10^{a \cdot t + b}$ $\log(N) = a \cdot t + b$ |

#### CV7 Logaritmische formules

Geluidsniveaus worden aangegeven in dB (decibel). Een geluidsniveau van 0 is nog net waarneembaar voor mensen, terwijl een geluidsniveau van 130 dB (van een straalvliegtuig) de pijngrens geeft. De dB-schaal geeft het verband tussen het geluidsniveau (in dB) en de geluidsintensiteit. Een 10 keer zo grote geluidsintensiteit geeft een geluidsniveau dat 1 dB hoger is. Met behulp van wiskundige formules kan het verband tussen geluidsniveau en

geluidsintensiteit beschreven worden:  $G = 10 \cdot \log\left(\frac{I}{I_0}\right)$ , waarbij  $G$  het geluidsniveau in dB,  $I$  de geluidsintensiteit in  $\text{W/m}^2$  en  $I_0 = 10^{-12} \text{ W/m}^2$  (de geluidsintensiteit van geluid dat nog net waarneembaar is).

- Toon aan dat volgens deze formule een geluidsintensiteit van  $10^{-12} \text{ W/m}^2$  een geluidsniveau van 0 dB geeft.
- Toon aan dat een straalvliegtuig volgens de gegeven informatie een geluidsintensiteit van  $10 \text{ W/m}^2$
- Toon met de formule en rekenregels van logaritme aan dat als de geluidsintensiteit 10 keer zo groot wordt dat het geluidsniveau met 10 dB toeneemt: vergelijk daarvoor de uitkomsten van  $10 \cdot \log\left(\frac{10 \cdot I}{10^{-12}}\right)$  en  $10 \cdot \log\left(\frac{I}{10^{-12}}\right)$

Vaak zie je de formule  $G = 10 \cdot \log(I) + 120$

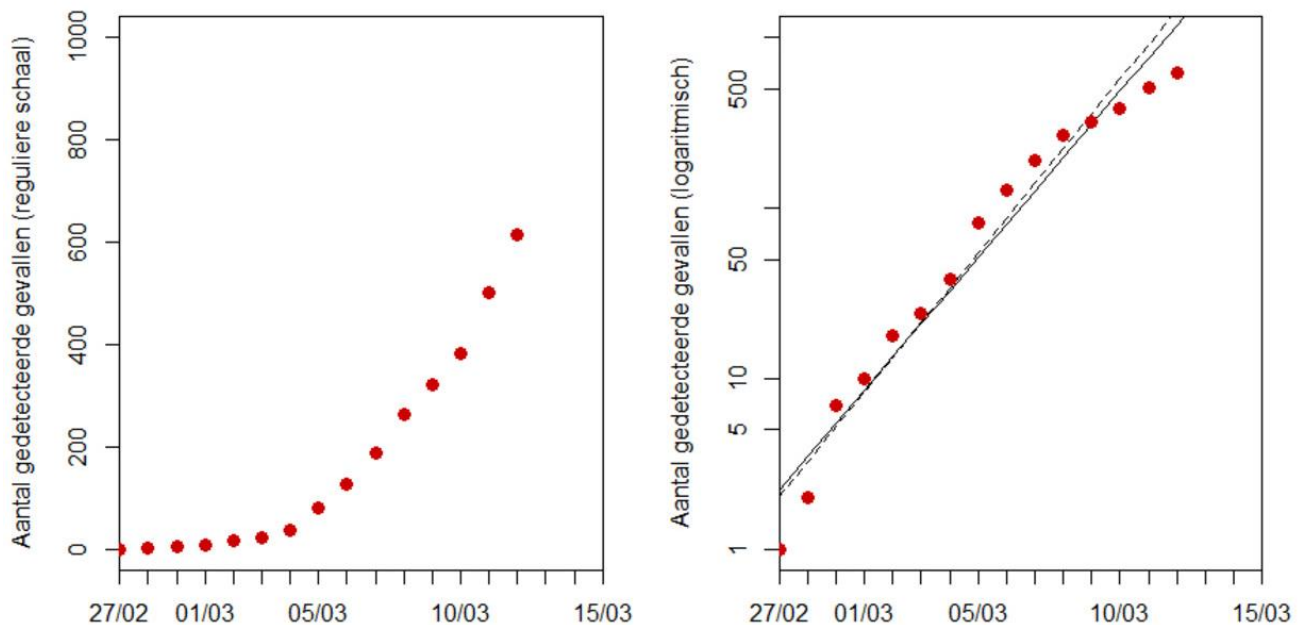
- Toon aan dat deze formule gelijkwaardig is met de formule in de context.

Een drillboor heeft een geluidsniveau van 104 dB.

- Bereken het geluidsniveau in dB als je in de buurt van vier drillboren staat.

## CV 8 Logaritmische schaalverdelingen

Er is veel gerekend met wiskundige modellen tijdens deze covid crisis. Hier zie je twee grafieken die op 15 maart 2021 in de Volkskrant verschenen. In beide figuren is het totaal aantal gedetecteerde gevallen weergegeven. In de linker figuur zie je een sterke stijging die lijkt op een exponentiele functie. In de rechter figuur is de verticale schaal verdeling logaritmisch.



De schaalverdeling op de verticale as in de rechter figuur is logaritmisch, dat wil zeggen dat de afstand tussen 1 en 10 net zo groot is als de afstand tussen 10 en 100, en de afstand tussen 1000 en 10000, enz. Anders gezegd: op de verticale as zou je op gelijke afstanden 1, 10,  $10^2$ ,  $10^3$ ,  $10^4$ ,  $10^5$ , enz. kunnen zien.

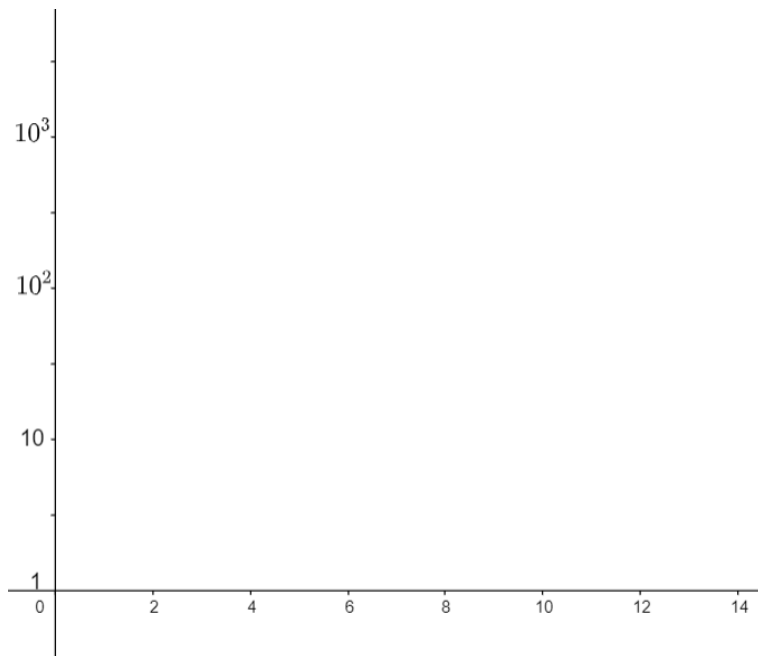
- a. Zet ook 100 en 1000 op de verticale as. Zet nu zo nauwkeurig mogelijk 20 op de verticale as.

Als de verticale as een logaritmische schaal heeft en de horizontale as een gewone schaalverdeling spreken we van enkel-logaritmisch papier. Rechte lijnen op dit soort papier duiden op een exponentieel verband. Bij de getekende rechte lijn in de rechter figuur kan dus een exponentiele formule gemaakt worden. Neem  $t$  de tijd in dagen en 27/02 als  $t=0$ . Er zijn op dat moment 2 gevallen volgens de rechte doorgetrokken lijn. Je ziet dat de doorgetrokken rechte lijn bij  $t=12$  (10/03) 500 gedetecteerde gevallen geeft.

- b. Stel hiermee de exponentiele formule op die hoort bij de rechte lijn in de rechter figuur.

We gaan nu eerst kijken waarom dit logaritmisch papier genoemd wordt.

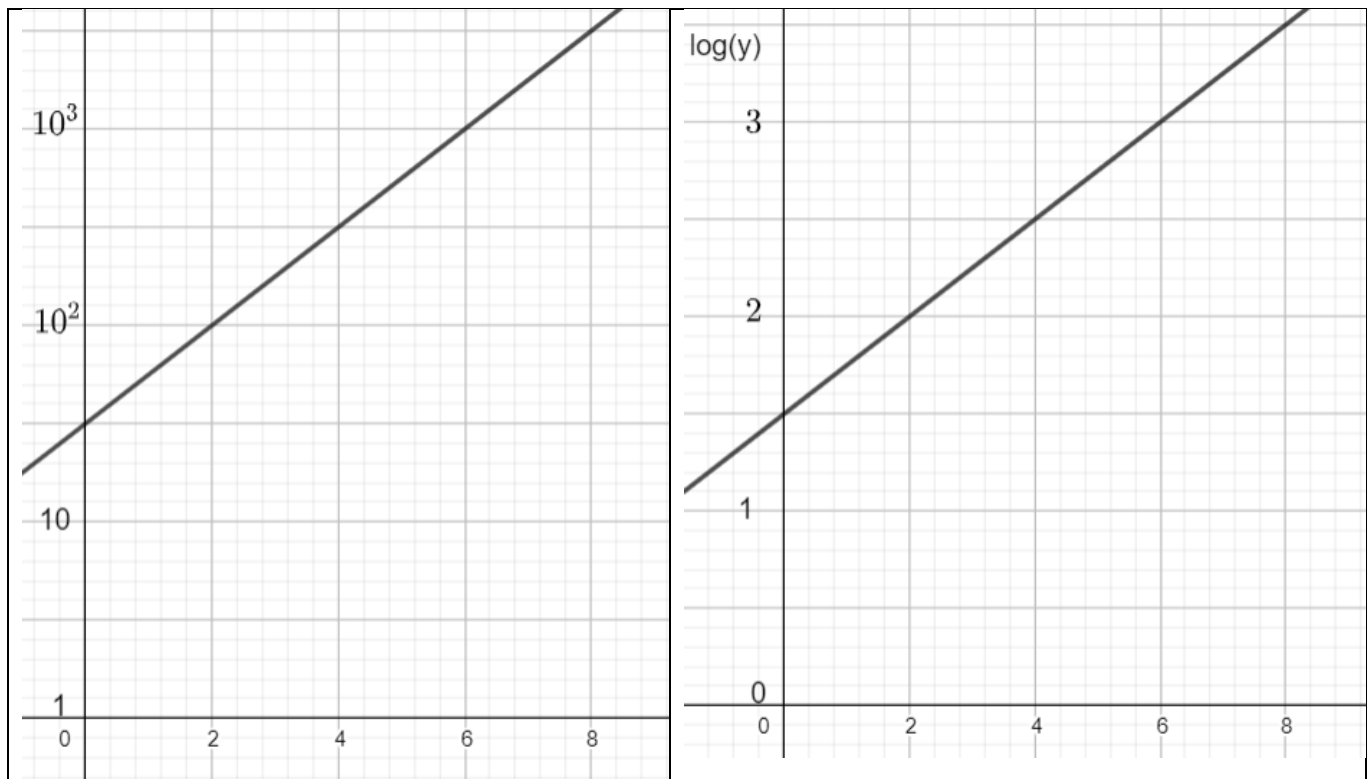
- c. Zet in onderstaande figuur naast de getallen 1, 10, 100, 1000 op de verticale as de logaritme van deze getallen en laat zien dat dit een regelmatige verdeling van de verticale as geeft.



We kijken nu naar “waarom rechte lijnen op logaritmisch papier horen bij een exponentiele functie”.

Hieronder zie je dezelfde grafiek twee keer getekend op logaritmisch papier.

- d. Ga dat na.



- e. Ga na dat de formule  $\log(y) = 0,25x + 1,5$  hierbij past (kijk in rechter figuur)
- f. Herschrijf de formule van  $\log(y) = 0,25t + 1,5$  in de vorm van een herkenbare exponentiele functie, namelijk  $y = b \cdot g^t$

### CV 9 Algebraïsche formules lezen

- a. Welke formules zijn gelijkwaardig met  $y = 3x^{-2}$ ? (x is steeds positief)

$$y = \frac{3}{x^2}$$

$$y = \frac{3}{x} \cdot \frac{1}{x}$$

$$y = (3x^{-1})^2$$

$$y = \frac{6x}{2x^3}$$

$$y = 3\left(\frac{x^4}{x^5}\right)^2$$

$$y = 4x^{-2} - x^{-2}$$

$$y = 2x^{-1} + x^{-1}$$

- b. Welke formules zijn gelijkwaardig met  $y = 6x^{0,4}$ ? (x is steeds positief)

$$y = \frac{12x}{2x^{0,6}}$$

$$y = ((3x)^{0,2})^2$$

$$y = (3x)^{0,2} \cdot (3x)^{0,2}$$

$$y = 2x^{-1} \cdot 3x^{1,4}$$

$$y = 6\sqrt[5]{x^2}$$

$$y = \frac{6}{x^{0,4}}$$

$$y = 3x^{0,2} + 3x^{0,2}$$

c. Welke formules zijn gelijkwaardig met  $y = 6 \cdot 3^{0,5x}$  ?

$$y = 6\sqrt{3}^x$$

$$y = 6 \cdot (\sqrt{3})^x$$

$$x = 2 \cdot {}^3\log\left(\frac{y}{6}\right)$$

$$y = 6 \cdot {}^3\log(0,5x)$$

$$x = {}^{0,5}\log(6y)$$

$$y = 6\sqrt{3^x}$$

d. Welke formules zijn gelijkwaardig met  $y = 2^{2x+3}$  ?

$$y = 4 \cdot 8^x$$

$$y = 8 \cdot 4^x$$

$$y = 4 \cdot 4^{2x}$$

$$y = 4^{x+1,5}$$

$$x = 0,5 \cdot {}^2\log(y) - 1,5$$

$$x = {}^4\log(y) - 3$$

$$2x + 3 = {}^2\log(y)$$

e. Welke formules zijn gelijkwaardig met:  $y = 4 + {}^2\log(2x)$ ? (x is positief)

$$\text{a. } y = {}^2\log(8x + 4)$$

$$\text{b. } y = {}^2\log(2x + 8)$$

$$\text{c. } y = {}^2\log(32x)$$

$$\text{d. } y = 3 + {}^2\log(x)$$

$$\text{e. } x = 0,5 \cdot 2^{y-4}$$

$$\text{f. } x = \frac{2^y}{32}$$

$$\text{g. } x = 4 + \log(2y)$$

f. Welke formules zijn gelijkwaardig met:  $\log(y) = 2 - 3x$  ?

$$\text{a. } y = 10^{2-3x}$$

$$\text{b. } y = 100 \cdot 0,01^x$$

$$\text{c. } \log\left(\frac{y}{100}\right) = -3x$$

$$\text{d. } y = \log(2 - 3x)$$

$$\text{e. } \log(y) = \log 10^{2-3x}$$

Indien je moeite had met deze centrale vragen kijk dan eerst naar deze V opgaven

## V Opgave 1

Geef aan of de volgende uitspraken WAAR of NIET WAAR zijn; indien niet waar geef dan een goede expressie

- $x^{-5} = -x^5$
- $x^{\frac{2}{5}} = \sqrt[2]{x^5}$
- $\frac{1}{x^6} = x^{-6}$
- $2x^{-4} = 2 \cdot \frac{1}{x^4}$
- $\frac{4}{\sqrt{x}} = 4x^{\frac{1}{2}}$
- $\frac{150}{x} = 150x^{-1}$
- $2x^4\sqrt{x} = 2x^{1,25}$
- $2x^3(\sqrt[4]{x})^6 = 2x^{4,5}$
- $2x^{2,5} + (\sqrt[4]{x})^{10} = 3x^5$
- $0,2 = {}^2\log(10^{0,2})$
- $2 \cdot \log(x) = \log(x^2)$
- $\log(x + 6) = \log(x) + \log(6)$

## V Opgave 2

Druk x uit in y

$$y = 2x^3 - 8$$

$$y = 2 \cdot 3^x - 8$$

$$y = 2 \cdot \log(x - 3) - 8$$

$$y = 2x^{0,3} - 8$$

## V Opgave 3

- Gebruik de rekenregels voor logaritme

$${}^g\log(a) + {}^g\log(b) = {}^g\log(ab); {}^g\log(a) - {}^g\log(b) = {}^g\log\left(\frac{a}{b}\right); n \cdot {}^g\log(a) = {}^g\log(a^n)$$

voor de volgende vragen:

- $\log(x) + \log(x + 2) = \log(\dots)$
- $\log(x + 2) + \log(5) = \log(\dots)$
- $\log(x + 2) - \log(5) = \log(\dots)$
- $2 \cdot \log(x) + \log(5) = \log(\dots)$  (werk eerst  $2 \cdot \log(x)$  om naar  $\log(\dots)$ )
- $\log(x + 2) + 2 = \log(\dots)$  (werk eerst 2 om naar  $\log(\dots)$ )
- $\log(x + 2) - \log(x + 5) = \log(\dots)$

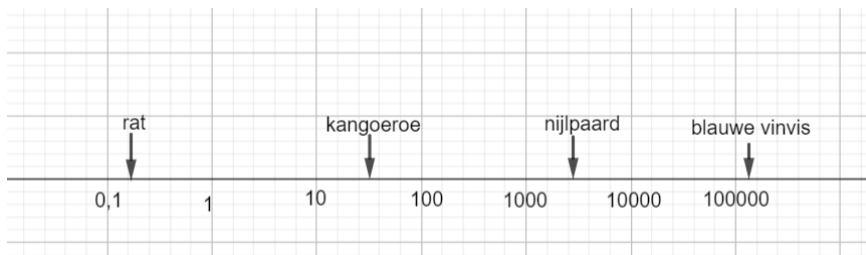
- Gebruik  ${}^g\log(a) = b$  is gelijkwaardig met  $g^b = a$  voor de volgende vragen

- $10^x = 9$ ;  $x = \log(\dots)$
- $8 \cdot 6^x = 24$ ;  $x = \log(\dots)$
- ${}^3\log(x) = 2$ ;  $x = \dots$
- $\log(2x) = 4$ ;  $x = \dots$

- e.  $1,6 = \log(\dots)$  (schrijf 1,6 als log)
- f.  $100 \cdot 0,9^x = 50$
- g.  $3 \cdot 2^x + 7 = 22$
- h.  $2^{4 \log(x)} = 3$
- i.  ${}^5\log(2x) = 3$

## V Opgave 4

Hier zie je de gewichten van een aantal dieren aangegeven op een as met een logaritmische schaalverdeling. Het aflezen op zo'n schaalverdeling is niet zo simpel. Zo ligt het gewicht van een kangoeroe volgens dit plaatje niet precies tussen 10 kg ( $10^1$  kg) en 100 kg ( $10^2$  kg).



- a. Bepaal van de aangegeven dieren het gewicht.

Het gewicht van een bizon is ongeveer 2000 kg.

- b. Leg uit hoe deze 2000 kg op deze logaritmische schaal kunt aangeven en zet een pijl op de correcte plaats.

## Antwoord op de centrale vragen

## B Theorie (om te onthouden) en opgaven

Met machten kunnen we eenvoudig en overzichtelijk grote en kleine getallen weergeven. Gebruik de wetenschappelijke notatie!

$4,1 \cdot 10^9 = 4100000000$  ofwel 4,1 miljard (in VS noemen ze dit een billion)

Met machten kunnen we ook eenvoudig vermenigvuldigen, delen, en machtsverheffen (maar helaas niet optellen en aftrekken)

Rekenregels:  $2^3 \cdot 2^4 = 2^7$ ;  $\frac{2^{10}}{2^2} = 2^8$ ;  $(2^3)^4 = 2^{12}$ . Voor wortels gelden vergelijkbare regels, omdat wortels geschreven kunnen worden als machten, bijvoorbeeld  $\sqrt[3]{7} = 7^{\frac{1}{3}}$  en  $\sqrt[3]{7^2} = 7^{\frac{2}{3}}$

De rekenregels voor machten kunnen algemeen geformuleerd worden en onthouden worden met getallenvoorbeelden

|                                   |                                   |
|-----------------------------------|-----------------------------------|
| $a^p \cdot a^q = a^{p+q}$         | $2^3 \cdot 2^4 = 2^7$             |
| $\frac{a^p}{a^q} = a^{p-q}$       | $\frac{2^{10}}{2^2} = 2^8$        |
| $(a^p)^q = a^{p \cdot q}$         | $(2^3)^4 = 2^{12}$                |
| $a^p \cdot b^p = (a \cdot b)^p$   | $2^5 \cdot 3^5 = 6^5$             |
| $a^{-p} = \frac{1}{a^p}$          | $2^{-3} = \frac{1}{2^3}$          |
| $a^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{a^p}$ | $2^{\frac{3}{5}} = \sqrt[5]{2^3}$ |

De rekenregels voor wortels zijn:

$$\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} = \sqrt{a \cdot b} \text{ en } \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a}{b}} \text{ en } (\sqrt{a})^2 = \sqrt{a^2} = a$$

Vergelijkbare regels gelden voor  $\sqrt[q]{a}$

Bij het omzetten van getallen naar machten kunnen logaritmen gebruikt worden. Daarbij los je de vergelijking een exponentiele vergelijking op. Voorbeeld: stel je wilt 123 omschrijven als macht van 10; dan zoek je  $123 = 10^{\dots}$  (ofwel je lost de vergelijking  $123 = 10^x$  op).

Rekenregels met logaritmen

| Algemene regels                                               | voorbeelden                                |
|---------------------------------------------------------------|--------------------------------------------|
| ${}^g\log(a) = b, \text{ want } g^b = a$                      | ${}^2\log(32) = 5, \text{ want } 2^5 = 32$ |
| ${}^g\log(a) = \frac{\log(a)}{\log(g)}$ (grondtal veranderen) | ${}^4\log(20) = \frac{\log(20)}{\log(4)}$  |
| ${}^g\log(a) + {}^g\log(b) = {}^g\log(ab)$                    | ${}^3\log(6) + {}^3\log(5) = {}^3\log(30)$ |
| ${}^g\log(a) - {}^g\log(b) = {}^g\log(\frac{a}{b})$           | ${}^3\log(30) + {}^3\log(5) = {}^3\log(6)$ |
| $n \cdot {}^g\log(a) = {}^g\log(a^n)$                         | $4 \cdot {}^3\log(5) = {}^3\log(5^4)$      |

## T2 Opgave 9

In de biologie komen we veel machtsformules tegen met gebroken exponenten. Het verband bij een zoogdier tussen het lichaamsgewicht  $G$  en het hersengewicht  $H$  kan benaderd worden met de formule  $H = 0,12G^{0,67}$ . Het verband tussen het lichaamsgewicht  $G$  en het skelet gewicht  $S$  met de formule  $S = 0,06G^{1,1}$ , waarbij de gewichten steeds in grammen.

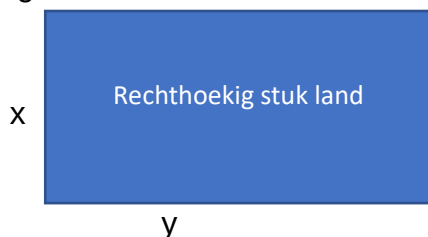
Bij opgravingen worden vaak skeletten gevonden waarmee schattingen van het lichaamsgewicht gemaakt worden en daarmee van het hersengewicht.

Stel dat een skelet gevonden wordt met een gewicht van  $p$  gram.

Maak een formule voor het hersengewicht, uitgedrukt in p.

## T2 Opgave 10

Een rechthoekig stuk land moet een oppervlakte krijgen van  $80 \text{ m}^2$ . De lengte is dan omgekeerd evenredig met de breedte.



|                                                                                                       |                                                                                                                                       |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Om het verband tussen x en y te geven kunnen verschillende formules bedacht worden. Bedenk er enkele. | Schets de grafiek van bij deze formule en geef de kenmerken.<br>Beschrijf de grafiek als x heel klein is, en ook als x heel groot is. |
| Toon aan dat geldt: steeds als x twee keer zo groot wordt dan zal y .....                             | Bedenk andere contexten waarin een variabele omgekeerd evenredig is met een andere.                                                   |

## T1 Opgave 11

a. Schrijf de volgende formules in de vorm  $y = a \cdot x^b$

$$y = \sqrt[3]{x} \cdot \sqrt{x}$$

$$y = \sqrt[4]{x} \cdot 2\sqrt{x}$$

$$y = 4\sqrt[3]{x} \cdot 4\sqrt[3]{x}$$

$$y = (\sqrt[3]{x})^5 \cdot \sqrt{x} + (\sqrt[4]{x})^8$$

b. Bedenk zelf verschillende formules die gelijkwaardig zijn met  $P = 6 \cdot x^{2,5}$

## T1 Opgave 12

Schrijf de volgende formules in de vorm  $y = a \cdot b^x$

$$y = 3^x \cdot 6^x$$

$$y = 2,1 \cdot 3^x \cdot 3 \cdot 6^x$$

$$y = (3 \cdot 6^x)^2$$

$$x = \log(2y)$$

$$x = \log(5y) - 2$$

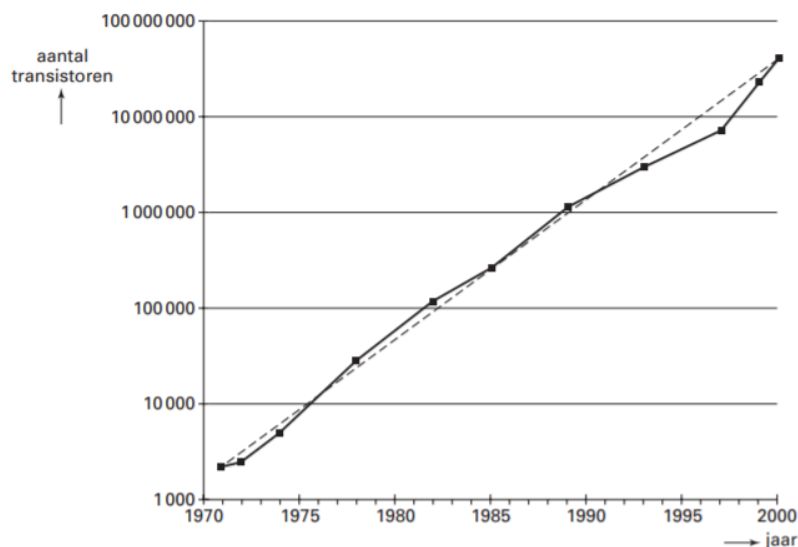
## T2 Opgave 13

Een bepaald verdovingsmiddel verdwijnt maar langzaam uit het bloed: de concentratie in het bloed halveert iedere 4 uur. Een dierenarts moet een hond van 25 kg opereren. De operatie zal maximaal drie uur duren. Er moet minimaal 12 mg per kg lichaamsgewicht aanwezig moet zijn om de hond verdoofd te houden.

Hoeveel verdovingsmiddel moet voor de operatie bij de hond ingespoten worden?

## T2 Opgave 14

De Wet van Moore geeft aan dat het aantal transistoren op een chip exponentieel groeit in de tijd. Dat is zichtbaar in onderstaande figuur: een rechte trendlijn op dit logaritmisch papier duidt



op een exponentieel verband.

- Bepaal met deze figuur de verdubbelingstijd.

De chip uit 1997 (derde van rechts) wijkt nogal af van de getekende trendlijn.

- Bereken hoeveel procent minder transistoren deze chip heeft.
- Bepaal met de figuur hoeveel transistoren er in 2020 op een chip zitten, indien de trendlijn zich voortzet.

## T1 Opgave 15

|     |     |    |
|-----|-----|----|
| $t$ | 10  | 17 |
| $y$ | 260 | 80 |

Stel dat deze tabel hoort bij een lineair verband.

- Stel dan een formule op.

Stel dat deze tabel hoort bij een exponentieel verband.

- Stel dan een formule op.
- Bereken ook de halveringstijd.
- Geef ook een formule van de vorm  $t = \dots$

Stel dat deze formule hoort bij een machtsverband, dus  $y = a \cdot x^n$

e. Stel dan een formule op.

## T2 Opgave 16

We bekijken exponentiele functies als  $y = 2^x$ ,  $y = 3,4^x$ ,  $y = 20 \cdot 6^x$ ,  $y = 100 \cdot 0,9^x$ ,  $y = 125 \cdot 1,05^x$ .

Deze exponentiele functies zijn van de vorm  $y = \text{beginwaarde} \cdot \text{groeifactor}^x$  en zijn om te schrijven in de vorm  $y = 10^{a \cdot x + b}$ . Omgekeerd kunnen functies van de vorm  $y = 10^{a \cdot x + b}$  omgeschreven worden in de vorm  $y = \text{beginwaarde} \cdot \text{groeifactor}^x$ .

Om dit te bewijzen, nemen we een willekeurige exponentiele functie, zeg  $y = 89 \cdot 1,12^x$ .

a. Schrijf de formule eerst in de vorm  $y = 10^{a \cdot x} \cdot 10^b$  en vervolgens in de vorm  $y = 10^{a \cdot x + b}$

Bekijk je uitwerking van vraag a. Algemeen geldt dat als een exponentiele functie  $y = bw \cdot gf^x$  omgeschreven wordt in de vorm  $y = 10^{a \cdot x + b}$  dan zijn a en b afhankelijk van de beginwaarde b en de groeifactor g

b. Geef aan hoe a en b uit de beginwaarde en groeifactor berekend kunnen worden.

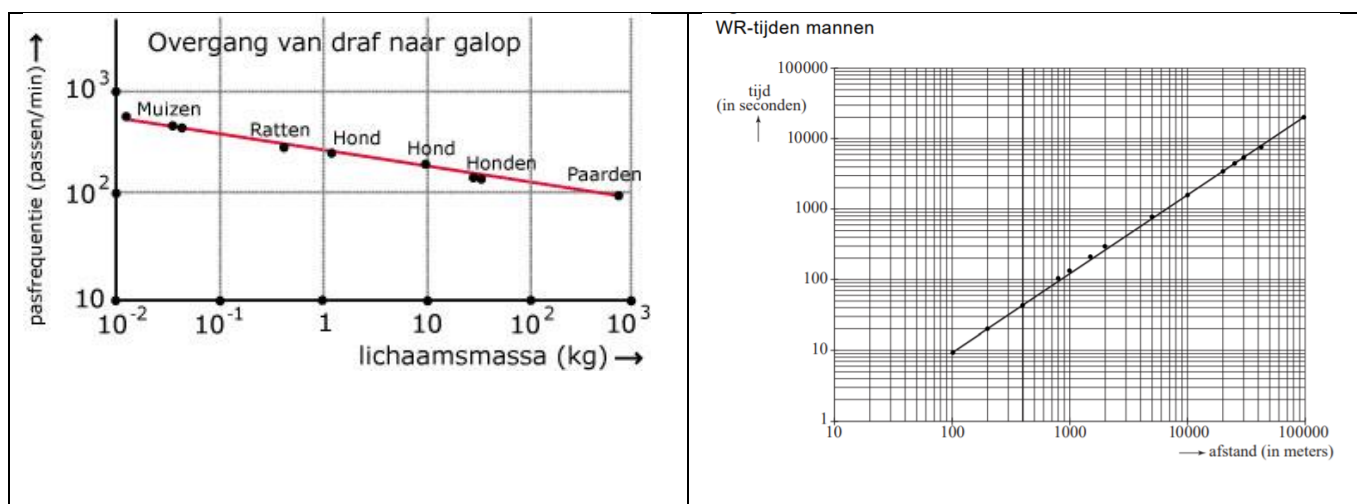
## T2 Opgave 17

Hieronder zie je figuren met twee logaritmische schaalverdelingen (dubbel logaritmisch papier). In de linker figuur zie je het verband tussen het lichaamsgewicht van dieren en hun pasfrequentie. In de rechter figuur zie je voor verschillende afstanden de wereldrecords bij het hardlopen voor mannen. Deze figuur is uit 2007.

a. Lees uit de linker figuur af hoeveel passen een hond per minuut maakt. Lees ook het gewicht van een rat af.

Omdat de grafiek in de linker figuur een rechte lijn is kan het verband beschreven worden met de formule  $P = a \cdot L^b$ , waarbij P de pasfrequentie per minuut en L het lichaamsgewicht in kg.

b. Maak een formule die bij deze rechte lijn hoort.



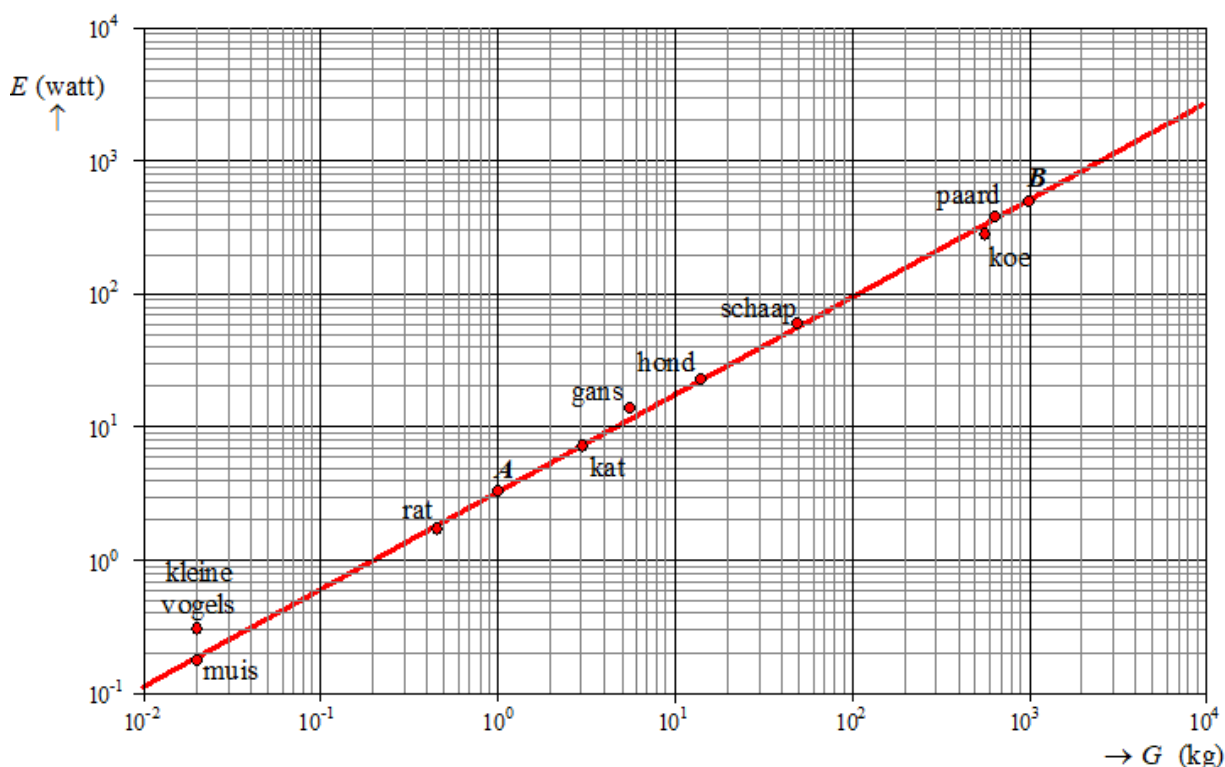
- c. Lees uit de rechtergrafiek af het wereldrecord op de 3000 meter.
- d. Lees ook hoeveel meter er in 1 uur gelopen kon worden.

De schaalverdelingen in beide figuren is vergelijkbaar. Het enige verschil is dat in de linker figuur er geen onderverdeling tussen  $10$ ,  $10^2$ , en  $10^3$  is gegeven, terwijl dat in de rechter figuur wel het geval is. Je zou zelf die onderverdeling in de linker figuur kunnen maken zodat het aflezen eenvoudiger wordt.

- e. Illustreer hoe je dat zou moeten doen door de horizontale lijntjes bij 50 en 80 kg lichaamsgewicht te trekken (pasfrequentie van 50 en 80 op de verticale as).

### T1 Opgave 18

Bij dieren is het energieverbruik afhankelijk van het gewicht. In de figuur met een dubbele logaritmische schaalverdeling, staat voor een aantal diersoorten het verband tussen het energieverbruik  $E$  en het gewicht  $G$ . Hierbij is  $E$  het energieverbruik in watt en  $G$  het gewicht in kg. In de figuur hieronder is zowel langs de horizontale als langs de verticale as is een logaritmische schaalverdeling gebruikt, omdat je steeds op vaste afstanden van elkaar  $10^0$ ,  $10^1$ ,  $10^2$ ,  $10^3$ , enz. ziet staan. Daarnaast zie je tussen twee opeenvolgende machten van 10 een onderverdeling. Tussen  $10^1$  en  $10^2$  zie je de ligging van 20, 30, 40, 50, enz. aangegeven.



- a. Lees voor een paard en voor een muis het gewicht en het energieverbruik af.

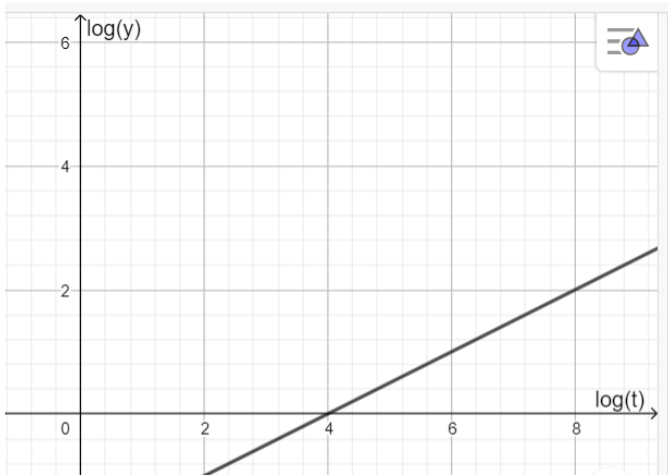
De punten die de verschillende dieren weergeven, liggen nagenoeg op de getekende rechte lijn door de punten A(1; 3,27) en B(1000; 520).

Een rechte lijn op dit zogenaamde logaritmische papier geeft een formule van de vorm:  $y = a \cdot x^b$  ofwel  $E = a \cdot G^b$ . In de figuur is eenvoudig de waarde voor  $a$  af te lezen.

- b. Doe dat en bereken vervolgens de waarde van b.

### T1 Opgave 19

Bij een onderzoek blijkt er een verband tussen  $\log(y)$  en  $\log(t)$ . Zie onderstaande figuur.



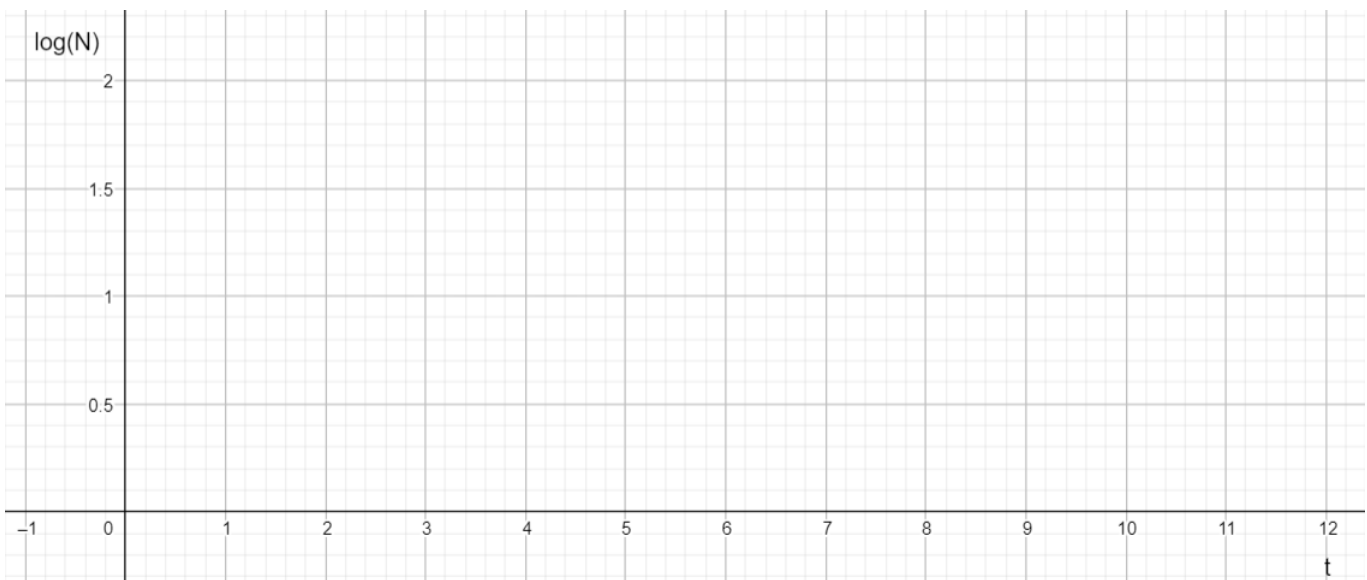
Het verband tussen  $y$  en  $t$  kan geschreven worden in de vorm  $y = a \cdot t^b$

Stel een formule op voor het verband tussen  $\log(y)$  en  $\log(t)$  en schrijf vervolgens dit verband om naar de vorm  $y = a \cdot t^b$

### T2 Opgave 20

Bij het maken van scans wordt vaak radioactieve stoffen gebruikt. Bij Technetium-99m is de halveringstijd 6 uur. Neem aan dat de hoeveelheid radioactiviteit bij toediening 100 is.

- a. Maak een schets van de hoeveelheid radioactiviteit gedurende de eerste 12 uur na toediening.



- b. Schrijf de formule van het verband tussen  $N$  en  $t$  in de vorm:  $N = a \cdot b^t$   
 c. Gebruik de formule uit b. om de formule om te schrijven naar de vorm:  $\log(N) \dots$  en controleer of deze formule past bij je grafiek in a.

## §3 Rekenen met haakjes

### A. Centrale vragen

#### CV 10 Kettingfuncties

Om te begrijpen hoe formules in elkaar zitten kunnen we bij sommige, zogenaamde, kettingfuncties een ketting van eenvoudige functies, zoals lineaire, machts-, exponentiele functies maken.

Voorbeeld:

Oudere bomen zijn meer waard door jonge bomen. Om de waarde van een boom te bepalen worden wiskundige modellen gebruikt. Zo kan er een model gemaakt worden voor het verband tussen de leeftijd en de hoogte van een bepaald soort boom. Stel dat het verband berekend kan worden met de formule  $H = 3\sqrt{L} + 1$ , waarbij L de leeftijd in jaren en H de hoogte in meters. Er kan ook een model gemaakt worden voor het verband tussen de hoogte van een boom en zijn houtwaarde. Stel dat dit verband gegeven wordt door:  $W = 0,2H^3$ , waarbij H de hoogte in meters en W de houtwaarde in euro.

Om op basis van de leeftijd nu de houtwaarde te berekenen kan een *pijlenketting* (rekenchema) gemaakt worden:

$$L \rightarrow 3\sqrt{L} + 1 \rightarrow \dots \rightarrow 0,2H^3 \rightarrow W$$

Of met 'x-en'

$$x \rightarrow 3\sqrt{x} + 1 \rightarrow \dots \rightarrow 0,2x^3 \rightarrow \dots$$

- a. Maak nu een formule voor W uitgedrukt in L (dus formule voor houtwaarde uitgedrukt in leeftijd)

Hieronder zie je een pijlenketting.

$$x \rightarrow x^2 \rightarrow x^2 + 100 \rightarrow \sqrt{x^2 + 100} \rightarrow 20\sqrt{x^2 + 100}$$

- b. Ga na dat hier de volgende rekenchema bij hoort: “als je x weet, moet je deze in het kwadraat nemen, daar 100 bij op tellen, dan de wortel nemen en dan de uitkomst met 20 vermenigvuldigen” en de volgende algebraïsche expressie:  $20\sqrt{x^2 + 100}$

Opmerking: de eerste twee stappen ( $x^2$  en  $+100$ ) zou je ook in een stap kunnen doen ( $x^2 + 100$ ): ook de laatste twee stappen zou je in een stap kunnen doen, namelijk  $20\sqrt{\dots}$ . Dit kan omdat de functies  $x^2 + 100$  en  $20\sqrt{x}$  bijna even bekend zijn als de functies  $x^2$  en  $\sqrt{x}$  (ze schelen maar constante getallen). Minder tussenstappen bij een ketting geeft in het algemeen meer overzicht.

- c. Maak bij een pijlenketting bij de volgende functies

$$y_1 = (x^2 + 5)^6$$

$$y_2 = 3\sqrt{x^2 + 16}$$

$$y_3 = \log(2^x + 5)$$

$$y_4 = ((x^3 + 5)^6 + 10)^5$$

d. Hoeveel en welke functies kun je maken door schakelen met de volgende drie functies:  $y = 2^x$ ;  $y = 3x$ ;  $y = x^2$ . Je mag iedere functie maar een keer gebruiken. Je hoeft de uitkomst niet verder uit te werken.

Hieronder, in de volgende centrale vraag, zie je verschillende kettingfuncties. Ze worden gemaakt door standaardfuncties als lineaire, machts-, exponentiele, logaritmische, gebroken functies te schakelen (dus functies als  $y = ax + b$ ,  $y = x^n$ ;  $y = b \cdot g^x$ ;  $y = \frac{1}{x}$ ;  $y = {}^g\log(x)$ ;  $y = 2^x$ ;  $y = \log(x)$  te schakelen. Zo ontstaan bijvoorbeeld:  $y = 2 \cdot 3^x + 5$ ,  $y = \log(x^3 + 6)$ ;  $y = 4 \cdot 0,9^{x-3}$ ;  $y = \frac{1}{x}$ ;  $y = {}^2\log(x + 5)$ ;  $y = \frac{3}{3\ln(x)-5}$

Merk op dat niet bij alle functies kun je zo'n pijlenketting te maken is. Bijvoorbeeld  $y = x^2 + \frac{100}{x}$  en  $y = 3\sqrt{x^2 + 16} - 2x$  zijn geen kettingfuncties. We kunnen immers geen *doorlopende ketting* maken waarbij we iedere keer met de uitkomst van een schakel verder werken. Of  $y = (x^2 + 5x)^6$  een kettingfunctie is, is een terechte vraag met twee antwoorden: ja, als je  $x^2 + 5x$  als een schakel ziet, en nee, als je  $x^2 + 5x$  niet als een standaardfunctie ziet.

#### CV 11 Gebruik van pijlenketting

- a. Maak een pijlenketting en gebruik deze om de vergelijking  $y \dots = 10$  "met de hand" op te lossen:

$$y_1 = (x^3 - 3)^{10}$$

$$y_2 = \sqrt{x^2 + 5}$$

$$y_3 = 30(x^2 + 4)^{1,5}$$

$$y_4 = {}^2\log(t^2 + 4)$$

$$y_5 = 2^{t^2+5}$$

- b. Maak een pijlenketting en gebruik deze om een formule van de inverse te vinden:

$$y = (x^3 - 3)^5$$

$$y = 2,7^{-2x+5}$$

$$y = 2\sqrt{x^2 + 16}$$

$$y = 3,2(x + 4)^{0,6}$$

#### CV 12 Haakjes wegwerken en haakjes zetten

In het verleden ben je natuurlijk al vaak haakjes tegengekomen. Deze haakjes werden gebruikt om de rekenvolgorde aan te passen en ook om 'gehelen' aan te geven, zoals bijvoorbeeld bij  $\log(2x)$ .

- a. Werk de haakjes weg bij:

$$K = q\left(-\frac{1}{150}q + 60\right)$$

$$K = q(-2q + 16) - (0,5q^2 + 10)$$

$$y = (x + 6)^2 + (x + 3)^2$$

$$y = 2x(x - 3) - 5(x - 6)$$

Soms is het handig om zelf haakjes te zetten, zoals bijvoorbeeld als je een vergelijking wilt oplossen. De vergelijking  $2x(x - 12,5) = 0$  is eenvoudiger op te lossen dan de vorm zonder haakjes ( $2x^2 - 25x = 0$ ). Hetzelfde verschil geldt bij de vergelijkingen  $(x + 3)^2 - 2 = 0$  en  $x^2 + 6x + 7 = 0$ . Bij wiskunde A hoef je niet heel vaak zelf haakjes te zetten maar in sommige gevallen is het wel heel handig en simpel.

b. Zet zelf haakjes: haal een factor buiten haakjes

$$x^2 - 5x = x(x \dots)$$

$$4x^2 - 36x = x(\dots)$$

$$xy - 4x = \dots$$

Heb je problemen bij deze opgaven kijk dan eerst naar de verkennende opgaven

### Opgave V1

Werk de haakjes weg:

a.  $(6ab)^2 =$

b.  $(2a + b)^2 =$

c.  $(ab)(cd) =$

d.  $(a + b)(c + d) =$

e.  $(a + b)^2 - (a - b)^2 =$

### Opgave V2

Hier zie je een manier om de drie functies  $y = 2^x$ ;  $y = x + 3$ ;  $y = x^2$  te schakelen. Je mag iedere functie maar een keer gebruiken. Hieronder zie je een voorbeeld

|                       |                     |                     |
|-----------------------|---------------------|---------------------|
| $2^x$                 | $x+3$               | $x^2$               |
| $x \rightarrow \dots$ | $\rightarrow \dots$ | $\rightarrow \dots$ |

Deze ketting geeft de functie  $y = (2^x + 3)^2$

a. Maak ook een ketting met deze functies waardoor je de functie  $y = 2^{x^2+3}$

b. Maak ook nog andere functies met deze drie functies.

We kijken weer naar de functie uit het voorbeeld:  $y = (2^x + 3)^2$

Als je nu een vergelijking moet oplossen, bijvoorbeeld  $(2^x + 3)^2 = 10$  dan werk je de ketting van achter naar voren terug: dus eerst de omkering van  $x^2$  (is  $+/-\sqrt{x}$ ), dan de omkering van  $x+3$  (is  $x-3$ ) en als laatste de omkering van  $2^x$  (is  ${}^2\log(x)$ ). In stapjes onder elkaar:

$$(2^x + 3)^2 = 10$$

$$2^x + 3 = +/-\sqrt{10}$$

$$2^x = +/-\sqrt{10} - 3$$

$$x = {}^2\log(+\sqrt{10} - 3) \text{ (omdat log enkel uit positief getal kan)}$$

c. Los nu zelf  $2^{x^2+3} = 10$  op een vergelijkbare manier op.

## B Theorie (om te onthouden) en opgaven

Haakjes gebruik je om de natuurlijke volgorde van bewerkingen te veranderen. De natuurlijke volgorde van bewerkingen is: plus en min (+/-) doe je als laatste, en werk van links naar rechts; daarvoor doe je vermenigvuldigen en delen (ook van links naar rechts); en als eerste doe je haakjes en dan machten en wortels: dus haakjes, machtsverheffen/wortels, vermenigvuldigen/delen, optellen/afrekken)

Met haakjes kun je ook aangeven “wat bij elkaar hoort” (wat als een eenheid gezien kan worden); bijvoorbeeld om het verschil tussen  $1/x+2$  en  $1/(x+2)$  aan te geven en ook bij  $-4^2$  en  $(-4)^2$

Soms staan er geen haakjes maar moet je ze wel denken, zoals bijv.  $2^{x+3}$  of  $\frac{1}{x+3}$  of kun je ze zelf zetten, bijv. als je  $y$  wilt vrijmaken in  $xy - 4y = 7$  geeft dan  $y(x - 4) = 7$  (en  $y = \frac{7}{x-4}$ )

Haakjes kun je vaak eenvoudig wegwerken:

$$a(3a + 4) = 3a^2 + 4a; (a + 3)(3a + 4) = 3a^2 + 13a + 12; (a + 3)^2 = a^2 + 6a + 9;$$

$$3a(3a \cdot 4) = 36a^2$$

Om te werken met formules en vergelijkingen op te lossen kun je soms gebruik maken van pijlenkettingen. Hierbij geef je in een aantal stappen aan hoe je een formule kan opbouwen. Voorbeeld:  $y = \sqrt[3]{x^2 + 20}$  dan is de pijlenketting:

|     |               |     |               |     |               |     |
|-----|---------------|-----|---------------|-----|---------------|-----|
|     | $x^2$         |     | $x + 20$      |     | $\sqrt[3]{x}$ |     |
| $x$ | $\rightarrow$ | ... | $\rightarrow$ | ... | $\rightarrow$ | ... |

### T2 Opgave 21 duizelig van de minnen

Bereken

- A  $-x \cdot -x - x \cdot -x = \dots$
- B  $-x \cdot (-x - x) \cdot -x = \dots$
- C  $(-a \cdot -a - a) \cdot -a = \dots$
- D  $-a \cdot (-a - a \cdot -a) = \dots$
- E  $(-a \cdot -a) - (a \cdot -a) = \dots$

### T1 Opgave 22

Maak een pijlenketting bij de volgende functies en gebruik die om een formule van de inverse functie te vinden

$$(x + 1)^3 - 5$$

$$2(x^3 + 1)^2$$

$$2^{x+5} - 1$$

### T1 Opgave 23

- a. Werk de haakjes weg

$$A = (x - 6)(x + 3)$$

$$B = x(x - 4)^2$$

$$C = (x - 9)(x - 3)(x - 4)$$

$$D = (x - 9)^2 - (x - 3)^2$$

- b. Soms is het handig om een factor buiten haakjes te halen. Doe dat in de volgende situatie en leg uit wanneer dat handig zou kunnen zijn.

$$3x^2 - 20x = x(x \dots)$$

$$2x^2 + 36x = x(\dots)$$

$$ax - 4x = \dots$$

### T1 Opgave 24

Welke expressies zijn gelijkwaardig met  $y = x^2 - 9x$

$$y = (x - 3)(x + 3) - 9$$

$$y = 3(x - 3)(x + 3)$$

$$y = (x - 3)(x - 6) - 18$$

$$y = \frac{x^3 - 9x}{x}$$

$$y = \frac{x^4 - 9x^3}{x^2}$$

$$y = \frac{(x - 3)(x + 3)^2}{x + 3}$$

$$y = \frac{2x^3 - 18x^2}{2x}$$

### T2 Opgave 25

- a. Druk A uit in T als  $A(T + 3) = T - 6$   
 b. Druk A uit in T als  $A \cdot T + 6 \cdot A = 2T + 1$   
 c. Laat zien dat  $\frac{f}{1-f} = 3 \cdot 0,96^t$  om te schrijven is naar  $f = \frac{3 \cdot 0,96^t}{1+3 \cdot 0,96^t}$

### T2 Opgave 26

Bewijs met algebra

- a. Bewijs dat de grafiek van  $y = x(x + 1) - (x - 4)^2$  een rechte lijn is.

- b. Bewijs dat  $\frac{2}{p} + \frac{a}{b} + 4$  gelijk is aan  $\frac{2b+pa+4pb}{pb}$

- c. Bewijs dat de uitkomsten van  $y = 14(3x)^2$  altijd 9 keer zo groot zijn als die van  $y = 5x^2$

d. De formules  $6A^4 = \sqrt{B}$  en  $2L = B^2$  zijn te herleiden tot  $L = p \cdot A^n$   
Bewijs dat en bereken  $p$  en  $n$ .

## T2 Opgave 27

Werk de haakjes uit en bereken de minimale waarde van  $P$  als  $P = k^2 + 3\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{3}k\right)^2$

## §4 Formules en grafieken van standaardfuncties, met o.a. $e^x$

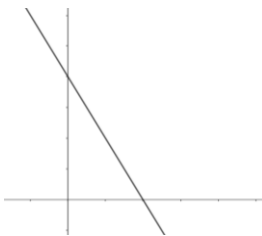
### A. Centrale vragen

#### CV 13 Standaard functies met grafiek en kenmerken

Noteer bij iedere functie: een prototypische formule, grafiek met karakteristieke eigenschappen als asymptoten & nulpunten en karakteristieke eigenschap(pen) van een tabel

Voorbeeld

Lineaire functies

|                                                                                                          |                                                                                                                                  |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| $y = a \cdot x + b$<br>Bijv. $y = -2 \cdot x + 20$<br><br>Startgetal 20; rico -2                         | Tabel:<br>y steeds 2 kleiner als x met 1 toeneemt                                                                                |
| Omkeerformule maken,<br>(druk x uit in y)<br>$y = -2 \cdot x + 20$<br>$y - 20 = -2x$<br>$-0,5y + 10 = x$ | <br>rechte lijn (dalend omdat -2 negatief is) |

Maak een vergelijkbaar overzicht voor (je hoeft niet steeds alle vier vakjes te vullen):

Exponentiele functies (maak onderscheid tussen stijgend en dalend:  $y = 30 \cdot 1,20^t$  en  $y = 30 \cdot 0,88^t$ ); machtsfuncties  $y = a \cdot x^n$  (maak onderscheid tussen n geheel positief even/oneven ( $y = 6 \cdot x^3$  en  $y = 6 \cdot x^4$ ; ook tussen  $n > 1$  en  $0 < n < 1$  ( $y = 2 \cdot x^{1,6}$  en  $y = 2 \cdot x^{0,84}$ ); en n geheel negatief ( $y = 6 \cdot x^{-2}$ ); logaritmische functie (maak onderscheid tussen  $g > 1$  en  $0 < g < 1$  ( $y = {}^2\log(x)$  en  $y = {}^{0,5}\log(x)$ ); gebroken functie  $y = \frac{1}{x}$ ; sinus-functie (relatie tussen formule en evenwichtswaarde, amplitude, periode, verschuiving ( $y = a + b\sin(c(x - d))$ ))

CV 14 Een nieuw getal: e

Nog meer exponentiele en logaritmische functies

Stel je zet een bedrag op een spaarrekening van een bank voor 1 jaar en je mag kiezen tussen verschillende (denkbeeldige) opties. In de linker kolom zie je de verschillende opties.

|                                          |                  |
|------------------------------------------|------------------|
| a) een jaar lang tegen 100% per jaar     | $(1+1)$          |
| b) 50% per half jaar                     | $(1+0,5)^2$      |
| c) 25% per een vierde jaar (per 3 maand) | $(1+0,25)^4$     |
| d) 10% per een tiende jaar               | $(1+0,1)^{10}$   |
| e) 1% per een honderdste jaar            | $(1+0,01)^{100}$ |

|                                          |                    |
|------------------------------------------|--------------------|
| f) 0,1% per een 1000 <sup>ste</sup> jaar | $(1+0,001)^{1000}$ |
|------------------------------------------|--------------------|

- a. Leg uit wat de rechter kolom met de linker kolom te maken heeft.

De getallen in de rij naderen tot een zeker getal: dit getal heeft een speciale naam:  $e$

- b. Bereken  $(1+0,001)^{1000}$  en vervolgens  $(1+0,0001)^{10000}$  en  $(1+0,00001)^{100000}$

Definitie:  $e \approx \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ ; hoe groter  $n$ , des te nauwkeuriger de benadering.

$e \approx 2,718...$

Historisch (van Wikipedia):

Het getal  $e$  wordt ook de constante van Napier genoemd, naar de uitvinder van de logaritme, de Schotse wiskundige John Napier die  $e$  omstreeks 1600 tegenkwam bij zijn werk aan een van de eerste rekenlinialen. Het getal  $e$  werd door de Zwitserse wiskundige Leonhard Euler het exponentiële getal genoemd, vandaar vermoedelijk de naam.

$e = 2.718281828459045235360287471352662497757247093699959574966$   
 $967627724076630353547594571382178525166427427466391932003059$   
 $921817413596629043572900334295260595630738132328627943490763$   
 $233829880753195251019011573834187930702154089149934884167509$   
 $244761460668082264800168477411853742345442437107539077744992$

Dit zijn de eerste 297 decimalen van  $e$ . Op <http://apod.nasa.gov/htmltest/gifcity/e.2mil> vind je 2 miljoen decimalen.

- c. Zoek op hoeveel decimalen van  $e$  je rekenmachine geeft.

In een volgend boekje zul je nog een bijzondere eigenschap van deze functie tegenkomen.

Voor nu kun je dit als een gewone exponentiële functie beschouwen (in tijden van nood neem je voor  $e=2,718$ ).

- d. Schets een grafiek van  $y = e^x$   
e. Los de volgende vergelijkingen op (geef je antwoord met logaritmen en in decimale getallen):  $e^x = 5$ ;  $2e^x + 3 = 8$ ;  $e^{x-3} = 4$ ;  $3e^{2x-4} = 15$

CV 15 De natuurlijke logaritme:  $\ln(x)$

Omdat  $e$  nu een getal is met als benadering  $e \approx 2,718....$  kunnen we ook  ${}^e\log(x)$  definiëren (denk in begin aan  ${}^{2,718}\log(x)$ )

Deze speciale logaritme noemen we de natuurlijke logaritme:  $y = \ln(x)$ . Zie ook GR.

- a. Maak een tabel voor  $y = \ln(x)$

|              |   |   |   |   |   |   |
|--------------|---|---|---|---|---|---|
| $x$          | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
| $y = \ln(x)$ |   |   |   |   |   |   |

- b. Vul aan: Zoals je hierboven al zag, is deze  $y = \ln(x)$  is de inverse van  $y = e^x$  (net zoals  $y = x^2$  en  $y = \dots$  elkaars inverse zijn en  $y = 2^x$  en  $y = \dots$  elkaars inverse zijn)

Dus kunnen we nu vergelijkingen oplossen:  $e^x = 5$  heeft als oplossing  $x = \ln(5)$ . Leg uit.

- c. Omgekeerd heeft  $\ln(x) = 4$  als oplossing  $x = \dots$  (denk bij oplossen aan  ${}^e\log(x)=4$ )  
d. Maak een schets van de grafiek van  $y = \ln(x)$  en noteer bijzonderheden van deze grafiek.  
e. Los de volgende vergelijkingen op

|                                                 |                                                        |
|-------------------------------------------------|--------------------------------------------------------|
| $e^x = 3$<br>$e^{2x+1} = 15$<br>$2e^x + 1 = 15$ | $\ln(x) = 3$<br>$\ln(3x + 4) = 5$<br>$2\ln(x) - 6 = 2$ |
|-------------------------------------------------|--------------------------------------------------------|

Voor deze natuurlijke logaritme gelden, omdat het een logaritme is, weer alle eigenschappen en rekenregels van de logaritme.

- f. Maak deze rekenregels af:

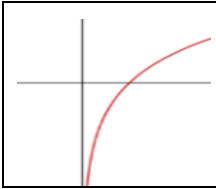
|                                                                                                             |                                                                                                                      |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| $\ln(a) + \ln(b) = \dots$<br>$\ln(a) - \ln(b) = \ln\left(\frac{a}{b}\right)$<br>$n \cdot \ln(a) = \ln(a^n)$ | $\ln(a \cdot b) = \ln(a) + \ln(b)$<br>$\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln(a) - \ln(b)$<br>$\ln(a^n) = n \cdot \ln(a)$ |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|

## Antwoord op de centrale vragen

### B Theorie (om te onthouden) en opgaven

Naast de standaardfuncties die we al eerder tegen kwamen zoals exponentiele functies  $y = b \cdot g^t$ ; machtsfuncties  $y = a \cdot x^n$  logaritmische functies  $y = {}^g\log(x)$ ; gebroken functies  $y = \frac{a}{x}$ ; sinus-functie  $y = a + b\sin(c(x+d))$  maakten we in dit hoofdstuk kennis met een bijzonder soort exponentiele functie  $y = e^t$ , waarbij getal  $e \approx 2,718 \dots$  en zijn inverse, een bijzonder soort logaritmische functie  $y = \ln(t)$  ofwel  $y = {}^{2,718\dots}\log(t)$ . Deze functies lijken op de gewone exponentiele functie  $y = 2,72^t$  en gewone logaritmische functie  $y = {}^{2,72}\log(t)$ . Later zullen we de bijzondere eigenschappen van de afgeleide van beide tegenkomen. Voor nu moet je de grafieken van beide kennen met hun eigenschappen

|                                                                                     |                                                                                                                                                                     |
|-------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
|  | $y = e^t$<br><b>Horizontale asymptoot, steeds positief, toenemend stijgend</b><br>$e^t = 10$ dan $t = \ln(10)$ (net als $2,72^t = 10$ dan $t = {}^{2,72}\log(10)$ ) |
|-------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|



$$y = \ln(t)$$

**Verticale asymptoot, enkel positieve t-waarden, afnemend stijgend**

**Als  $e^t = 10$  dan  $t = \ln(10)$  (net als  $2,72^t = 10$  dan  $t = {}^{2,72}\log(10)$**

**Als  $\ln(t) = 10$  dan  $t = e^{10}$  (net als  ${}^{2,72}\log(t) = 10$  dan  $t = 2,72^{10}$ )**

**Alle exponentiële functies zijn te schrijven in de vorm  $y = e^{a \cdot t + b}$ . Dit wordt in de opgaven verder uitgelegd.**

### T1 Opgave 28

Grafieken schetsen

- a. Schets zonder GR eerst de grafieken en controleer het antwoord met de GR

|                                                                   |                                                                             |
|-------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------|
| $y1 = e^x$<br>$y2 = e^{x-3}$<br>$y3 = -2e^x + 3$<br>$y4 = e^{2x}$ | $y1 = \ln(x)$<br>$y2 = \ln(x - 3)$<br>$y3 = 2 \ln(x) + 1$<br>$y4 = \ln(2x)$ |
|-------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------|

Herschrijven van expressies

- b. Vul in

|                                                                                                                                             |                                                                                                                                    |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| $e^x + e^x + e^3 = \dots e^{\dots}$<br>$e^x \cdot e^x = e^{\dots}$<br>$(e^x)^2 \cdot e^{3x} = e^{\dots}$<br>$e^x \cdot e^{x-3} = e^{\dots}$ | $\ln(x) + \ln(3) = \ln(\dots)$<br>$\ln(x) + \ln(x - 3) = \ln(\dots)$<br>$\ln(x) + 1 = \ln(\dots)$<br>$2 \cdot \ln(x) = \ln(\dots)$ |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|

### T1 Opgave 29

|   |   |   |      |   |      |   |      |  |    |
|---|---|---|------|---|------|---|------|--|----|
| x | 0 | 1 | 2    | 3 | 4    | 5 | 6    |  | 10 |
| y |   |   | 86,7 |   | 62,6 |   | 45,2 |  | ?  |

- a. Leg uit dat hier sprake kan zijn van een exponentieel verband  
 b. Maak een formule

### T1 Opgave 30

Geef bij deze functies aan of dit een lineaire, exponentiële, machts-, of gebroken functie is, of geen van alle. Geef aan of de grafiek steeds stijgt, of daalt, of soms stijgt en soms daalt.

- a)  $y = 100 - e^t$   
 b)  $y = 100 \cdot 1,9^{2t}$   
 c)  $P = e^{0,2x}$   
 d)  $A = 5 \cdot 1,2^p$   
 e)  $R = 120 - 0,6t$   
 f)  $y = -9 + e(x - 2)$

g)  $z = 100 \cdot e^t$

h)  $P = 3,2^{4-x}$

i)  $A = 5 \cdot 1,2^t + 120$

j)  $R = \frac{120-1,6t}{4}$

k)  $H = \frac{4}{2t}$

l)  $F = 5 \cdot 1,2^{-t}$

m)  $B = 120 + 3t(t + 2)$

n)  $D = \frac{4}{e^t}$

o)  $K = 5 \cdot t^{0,42}$

p)  $L = 100 \cdot R^{0,5}$

q)  $y = \frac{10}{5t+30}$

**T2 Opgave 31**

We bekijken exponentiele functies als  $y = 2^x$ ,  $y = 3,4^x$ ,  $y = 20 \cdot 6^x$ ,  $y = 100 \cdot 0,9^x$ ,  $y = 125 \cdot 1,05^x$ .

Deze exponentiele functies zijn van de vorm  $y = \text{beginwaarde} \cdot \text{groefactor}^x$  en zijn om te schrijven in de vorm  $y = e^{a \cdot x + b}$ . Omgekeerd kunnen functies van de vorm  $y = e^{a \cdot x + b}$  omgeschreven worden in de vorm  $y = \text{beginwaarde} \cdot \text{groefactor}^x$ .

Om dit te bewijzen, nemen we een willekeurige exponentiele functie, zeg  $y = 89 \cdot 1,12^x$ .

a. Schrijf de formule eerst in de vorm  $y = e^{a \cdot x} \cdot e^b$  en vervolgens in de vorm  $y = e^{a \cdot x + b}$

Bekijk je uitwerking van vraag a. Algemeen geldt dat als een exponentiele functie  $y = bw \cdot gf^x$  omgeschreven wordt in de vorm  $y = e^{a \cdot x + b}$  dan zijn a en b afhankelijk van de beginwaarde bw en de groefactor gf.

b. Geef aan hoe a en b uit de beginwaarde en groefactor volgen.

Omgekeerd moeten we nog nagaan dat als een functie van de vorm  $y = e^{a \cdot x + b}$  altijd te schrijven is als  $y = bw \cdot gf^x$ .

c. Leg dit uit en geef aan hoe bw en gf afhankelijk zijn van a en van b.

**T2 Opgave 32**

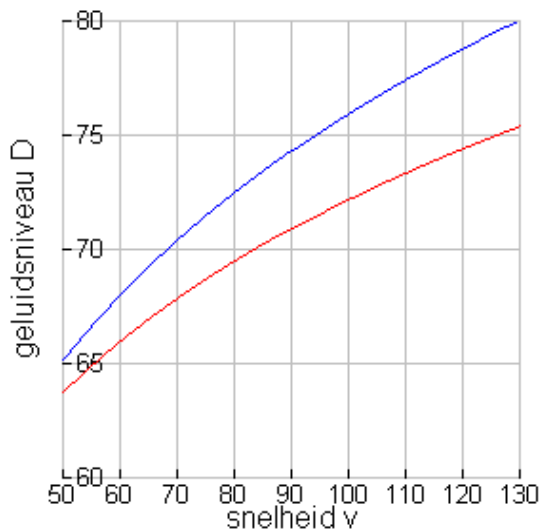
Via de omschrijving van getal e weten we dat  $e \approx 1,0001^{10000}$ .

Door herschrijven kan aangetoond worden dat geldt  $e^{0,0001} - 1 \approx 0,0001$ . Doe dit.

**T2 Opgave 33**

De snelwegen in Nederland zijn voornamelijk asfaltbetonwegen. De meeste voorkomende zijn de dichte asfaltbetonwegen (DAB-wegen) en de zeer open asfaltbetonwegen (ZOAB-wegen).

In onderstaande figuur zie je het verband tussen de snelheid van het verkeer ( $v$  in km/u) en het geluidsniveau  $D$  (in dB) van het verkeer.



Bij een DAB-weg geldt de formule  $D = 15,6 \cdot \ln(v) + 4,1$ .

Bij een ZOAB-weg geldt de formule  $D = 12,2 \cdot \ln(v) + 16,0$ .

- a. Beredeneer aan de hand van de formules dat bij iedere snelheid  $v$  de  $D$ -waarde van een DA-weg hoger is dan die van een ZOAB-weg.

Het verschil tussen het geluidsniveau van DAB-weg en ZOAB-weg bedraagt vanaf een zekere snelheid meer dan 4 dB.

- b. Bereken vanaf welke snelheid dat het geval is.  
c. Schrijf beide formules om zodat  $v$  uitgedrukt in het geluidsniveau  $D$ .

Dit soort formules worden als volgt gemaakt:

Eerst wordt de algemene vorm vastgesteld:  $D = a \cdot \ln(v) + b$

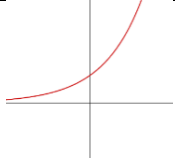
Vervolgens kan met twee meetgegevens de waarde van  $a$  en van  $b$  berekend worden.

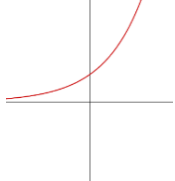
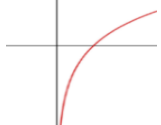
Stel dat bij een snelheid van 50 km/u het geluidsniveau 65 dB is; en bij een snelheid van 95 km/u een geluidsniveau 75 dB.

- d. Bereken met deze gegevens de waarde van  $a$  en van  $b$ .

## T2 Opgave 34 What is out?

Geef steeds aan welke er niet bij hoort.

|    |                                                                                     |                   |                   |
|----|-------------------------------------------------------------------------------------|-------------------|-------------------|
| a. | $y_1 = 4x^{-0,2} \cdot 2x^{-0,2}$                                                   | $y_2 = 6x^{-0,2}$ | $y_3 = 8x^{-0,4}$ |
| b. | $y_1 = 6x^{-1} - x^{-1}$                                                            | $y_2 = 6$         | $y_3 = 5x^{-1}$   |
| c. |  | $y = 0,12x^{1,2}$ | $y = 3 \cdot e^t$ |

|    |                                                                                   |                                                                                   |                          |
|----|-----------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------|--------------------------|
| d. | $y = 7,22x^{0,2}$                                                                 |  | $y = 3,4\log(t)$         |
| e. | $y = 20t^{-3}$                                                                    | $y = \frac{40}{0,5t^2}$                                                           | $y = t \frac{40}{t^3}$   |
| f. | $y = (x - 6)^2$                                                                   | $y = x^2 - 12x + 36$                                                              | $y = 36 + x^2$           |
| g. |  | $y = 12 \cdot e^{-0,2t}$                                                          | $y = 2,1 \cdot e^{0,2t}$ |
| h. |  | $y = 7,2 \cdot e^{1,2t}$                                                          | $y = 2,6\ln(t)$          |

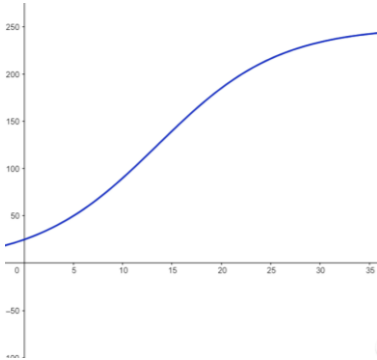
j. Bedenk nog drie drietallen waarbij er een niet bij hoort.

## §5 Redeneren met formules en grafieken

### A. Centrale vragen

CV 16 Redeneren over stijgen/dalen en grenswaarde

Een diersoort  $S$  wordt bedreigd met uitsterven. Om dit uitsterven te voorkomen zet men een aantal exemplaren van dit soort uit in een reservaat, waar tot dan toe dit soort niet voorkwam. In de figuur is te zien dat het aantal groeit.



De formule die bij deze grafiek hoort is:  $A = \frac{250}{1+9 \cdot e^{-0,16t}}$ , waarbij  $A$  het aantal exemplaren van het diersoort  $S$  en  $t$  het aantal jaren, met  $t = 0$  het moment van uitzetten in reservaat.

Beredeneer aan de hand van de formule:

- i. het aantal  $A$  steeds stijgt
- ii. dat het aantal  $A$  op den duur een grenswaarde nadert

CV 17 Stijgt of daalt een functie steeds?

Beredeneer aan de hand van de formule dat, voor  $x$  (of  $t$ ) gelijk aan 0 en groter,  $y$  steeds stijgt of steeds daalt

- a.  $y = \frac{120-2x}{60+x}$
- b.  $y = 100 - 70 \cdot e^{-0,2t}$
- c.  $y = 120 + 50 \cdot \ln(x)$
- d.  $y = 30 + 70 \cdot x^{0,8}$
- e.  $y = 100 - 70 \cdot t^{-0,2}$

CV 18 Oneindig gedrag van functie

Beredeneer aan de hand van de formule het oneindig gedrag van  $y$  (dus hoe groot worden de  $y$ -waarden als  $x$  (of  $t$ ) heel groot wordt

- a.  $y = \frac{420+2x}{60+x}$
- b.  $y = \frac{120}{60+4x} + 3$
- c.  $y = \frac{130}{2+2x^{0,5}}$
- d.  $y = \frac{120}{40+20 \cdot 0,93^t}$
- e.  $y = 100 - 60 \cdot e^{-0,6t}$
- f.  $y = \frac{120}{60+20 \cdot \ln(x)}$

## CV 19 redeneren met en over formule

Beredeneer aan de hand van de formule

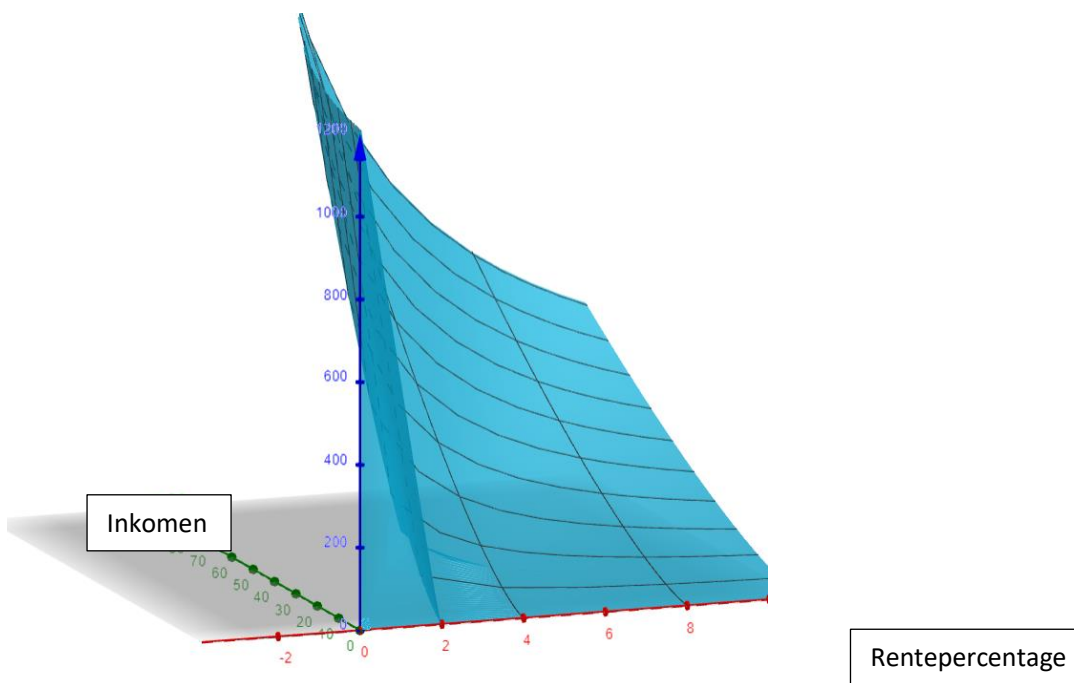
- dat  $y$  altijd negatief is als  $y = \frac{-130}{(x+3)^2} - 2e^{-0,2x}$
- dat  $y$  altijd positief is als  $y = \frac{30}{(-x-3)^2} + 4e^{-0,2x}$
- dat  $y$  groter kan worden dan 50 als  $y = -0,4(x-3)^2 + \frac{120}{x}$
- dat  $y$  niet onbeperkt groot kan worden als  $y = 24 - 0,01(x-5)^4$
- dat de vergelijking  $100 = \frac{300}{2+3 \cdot 0,87^t}$  precies 1 oplossing heeft
- dat de functie  $y = -0,2x^2 + 30x - 120$  in de buurt van  $x=0$  benaderd kan worden door  $y = 30x - 120$

## CV 20

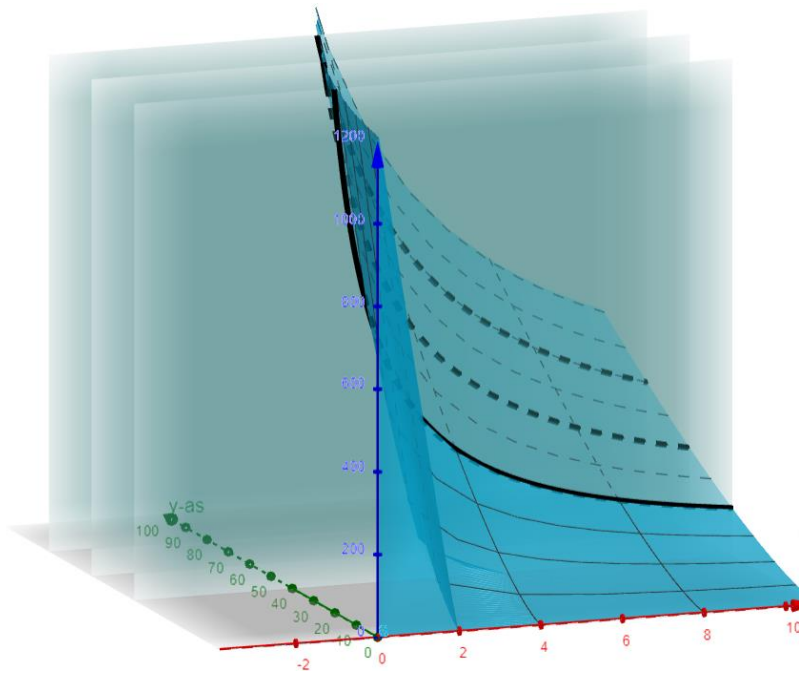
Ook jaren geleden waren banken streng met het verstrekken van hypotheek en hanteerde men de volgende formule om het maximale hypotheekbedrag te berekenen op basis van het jaarinkomen ( $I$ ) en het rentepercentage  $R$ :

$H = \frac{7 \cdot I^{1,4}}{R}$ , waarbij  $H$  het hypotheekbedrag in duizenden euro,  $I$  het jaarinkomen in duizenden euro, en  $R$  het rentepercentage.

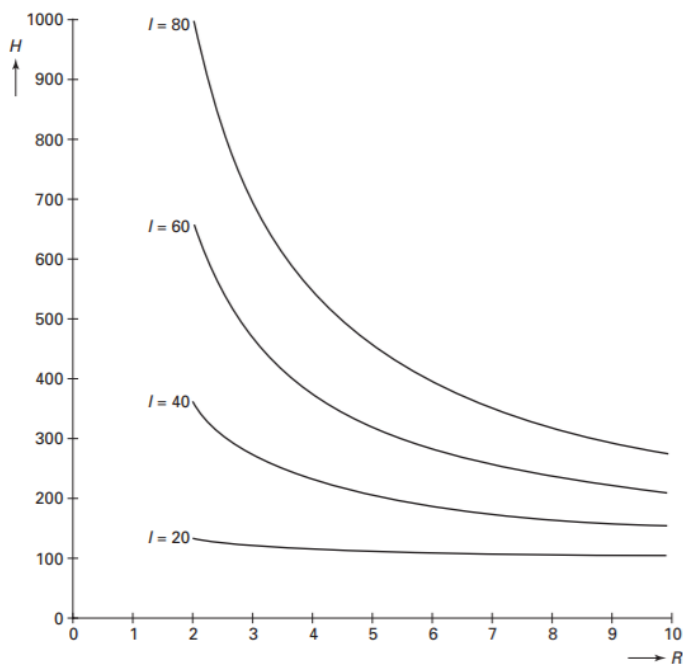
Wiskundig gezien is dit een formule met twee variabelen waarvan met behulp van computers grafieken getekend kunnen worden. Zie figuur hieronder. Helaas zijn dit soort 3-D grafieken lastig af te lezen.



Om de grafieken beter afleesbaar te maken bekijken we bijvoorbeeld  $H(R) = \frac{7 \cdot I^{1,4}}{R}$  (dus bij vaste inkomens wordt het verband tussen  $H$  en  $R$  geschetst). Hier zie je dat bij de inkomens  $I=40$ ,  $I=60$  en  $I=80$  het verband tussen  $R$  en  $H$  geschetst is.



De 3-D grafiek wordt meestal achterwege gelaten, zodat de figuur hieronder ontstaat.



- a. Geef formules voor de getekende grafieken van  $I=40$ ,  $I=60$ , en  $I=80$ .

Voor kleine waarden van  $R$ , zoals op dit moment, geeft de gebruikte formule  $H(R) = \frac{7 \cdot I^{1,4}}{R}$  problemen.

- b. Onderzoek welke problemen en of dat voor alle inkomens geldt?

Heb je problemen bij deze opgaven kijk dan eerst naar de verkennende opgaven

## Opgave V1

Van verschillende basisfuncties (lineair, exponentieel, machts-, gebroken functies) weten we het oneindig gedrag, d.w.z. we weten hoe groot de y-waarden worden als x heel groot wordt (dat zie je als je kijkt naar de staart de grafiek). Bekijk daarvoor nog eens de theorie van de vorige paragraaf.

We bekijken de volgende drie formules en beredeneren hoe groot de y-waarden worden als t heel groot wordt:

Voorbeeld 1:  $y = 60 + 20 \cdot 0,52^t$

Vul de redenering aan:

Als t heel groot dan  $0,52^t$  .....(kies uit heel groot positief, heel negatief, bijna 0, bijna ....); dus y wordt dan ....; dan  $20 \cdot 0,52^t$  .....; dan y ....

Voorbeeld 2:  $y = 4 + \frac{200}{2t+1}$

Vul de redenering aan:

Als t heel groot dan  $2t + 1$  .....; dan  $\frac{200}{2t+1}$  .....; dus y wordt dan ....

Voorbeeld 3:  $y = 4t^2 - 2000t$

Vul de redenering aan:

Als t heel groot dan  $4t^2$  ...., maar ook  $2000t$  ....;  $4t^2$  is sterker/zwakker (kies) dan  $2000t$ ; dus y wordt dan ...

## Opgave V2

We bekijken de formule:  $N = \frac{160}{40+0,8^t}$

Vul de redenering aan:

Als t groter wordt dan  $0,8^t$  groter/kleiner (kies), dan  $40 + 0,8^t$  groter/kleiner; dan  $\frac{160}{30+0,8^t}$  groter/kleiner

## Opgave V3

In sommige formules zie je verschillende onafhankelijke variabelen (invoer variabelen) die de afhankelijke variabele bepalen (uitvoervariabele). Voorbeeld:

$v = \frac{s}{t}$  waarbij s en t de waarde van t bepalen. Of  $y = a \cdot t^2$  waarbij a en t de waarde van y bepalen.

Als we nu over deze formules willen redeneren (of een grafiek willen maken) dan is het handig om aan te geven wat we als constant beschouwen. Dat doen we in wiskunde als volgt: bij

$v(s) = \frac{s}{t}$  beschouwen we t als een constante (vast maar onbekend). Dus de grafiek zal een rechte lijn zijn. Neem bijvoorbeeld  $t=5$ .

Neem nu steeds aan dat de constanten positief zijn en schets nu de grafieken van  $v(t) = \frac{s}{t}$ ;  $y(t) = a \cdot t^2$ ;  $y(a) = a \cdot t^2$

## Antwoord op de centrale vragen

### B Theorie (om te onthouden) en opgaven

In het vorige hoofdstuk hebben we de verschillende basisfuncties met hun karakteristieken bekeken. Deze basisfuncties kun je zien als bouwstenen van meer complexe functies. Van deze meer complexe functies kunnen we aan de hand van de formule en deze basisfuncties vaak kenmerken aflezen, zoals het oneindig gedrag, het stijgend/dalend zijn van een functie, het positief/negatief zijn van een functie, domein en verticale asymptoten.

Voorbeeld: Gegeven is de formule  $y = 170 - 100 \cdot 0,92^t$

a. Bedeneer dat  $y$  op den duur naar een grenswaarde nadert.

Als  $t$  heel groot dan  $0,92^t \rightarrow 0$ , dus  $100 \cdot 0,92^t \rightarrow 0$ , dus  $y \rightarrow 170 - 0 = 170$

b. Beredeneer dat de grafiek van  $y$  steeds stijgt.

Als  $t$  groter wordt ( $t \uparrow$ ) dan  $0,92^t \downarrow$ ; dan  $100 \cdot 0,92^t \downarrow$ ; dan  $170 - 100 \cdot 0,92^t \uparrow$ ; dus  $y$  stijgt.

Bedenk bij meer complexe functies dat machten als  $x^2$ ,  $x^3$ , enzovoort op den duur altijd sterker zijn dan  $x$  (en  $x^3$  sterker dan  $x^2$  enzovoort). Bij  $y = 0,01x^3 - 25x - 32000$  geldt dus dat  $x^3$  sterker is dan de andere twee termen ( $-25x$  en  $-32000$ ) en dat die twee termen in de formule dus verwaarloosbaar zijn bij grote waarden van  $x$ . Bekijk je deze functie voor kleine waarden van  $x$  dan is de term  $0,01x^3$  verwaarloosbaar en kan de formule redelijk benaderd worden door de formule  $y = -25x - 32000$

Daarnaast moet je weten dat exponentiële verbanden altijd sterker zijn dan machten. Dus bij  $y = x^{120} \cdot 0,6^x$  zal op den duur de factor  $x^{120}$  in de formule verwaarloosbaar zijn ten opzichte van de factor  $0,6^x$ . De  $y$ -waarden zullen naar 0 naderen.

Bij formules met meerdere invoervariabelen (onafhankelijke variabelen) gebruikt men in de wiskunde de notatie  $y(\dots)$  om aan te geven welke invoervariabele verandert (de andere invoervariabelen worden dan als constant beschouwd). Voorbeeld: bij  $y(t) = a \cdot t^2$  wordt  $a$  als constant beschouwd (en de grafiek is dus een parabool), maar bij  $y(a) = a \cdot t^2$  is  $t$  de constante (en dus de grafiek is een rechte lijn).

#### T2 Opgave 35

Als  $x$  heel groot is dan kan de functie  $f(x) = (3e^{-x^2} + x^2)^3 + \frac{70}{x^4}$  benaderd worden door de functie:

A.  $y = x^6$ ; B.  $y = x^5$ ; C.  $y = 70x^{-4}$ ; D.  $y = 27e^{-3x^2}$ ; E. geen van deze

**T2 Opgave 36**

Bij het ontwerpen van een weg moet er rekening gehouden worden met het schoon regenen van de weg.

Tijdens regenbuien wordt het vuil van de weg gespoeld. Het percentage vuil dat weggespoeld wordt ( $P$ ) is afhankelijk van de tijd dat het regent ( $t$  in uren):  $P(t) = 100(1 - e^{-ct})$

In deze formule geldt dat  $c$  afhankelijk van de weg. Voor betonwegen geldt  $c = 0,05$  terwijl voor asfalt geldt  $c = 0,025$ .

a. Beredeneer aan de hand van de formule welke weg sneller schoongespoeld wordt.

Voor een vaste, positieve waarde van  $c$  geldt altijd:  $P$  is een stijgend functie van  $t$  (als  $t$  groter wordt dan stijgt  $P$ )

c. Toon dit aan met een redenering aan de hand van de formule  $P(t) = 100(1 - e^{-ct})$

**T1 Opgave 37**

Vergelijk de formules

$$N1 = \frac{250}{1 + 0,41 \cdot 0,74^t}$$

$$N2 = 220 - 42,2 \cdot 0,6^t$$

Waarin verschillen  $N1$  en  $N2$  op de onderstaande kenmerken:

- Het oneindig gedrag: hoe gedraagt  $N$  zich op den duur?
- Startwaarde bij  $t=0$
- $N$  stijgt (als  $t$  toeneemt neemt  $N$  toe)

**T2 Opgave 38**

Er zijn formules om het maximale tilgewicht  $M$  (in kg) te bepalen. De formule voor  $M$  is o.a. afhankelijk van de verticale afstand  $D$  (in cm) waarover een voorwerp getild moet worden.  $M = 0,06D + \frac{68}{D} + 12$

Het ligt voor de hand te denken dat in deze situatie  $M$  kleiner is naarmate de  $D$  groter is. Toch blijkt dat volgens de formule niet zo te zijn.

Beredeneer dat aan de hand van de formule.

**T2 Opgave 39**

Het aantal mensen dat een weg kan oversteken bij een bepaald punt ( $N$ ) is afhankelijk van de breedte  $B$  van de weg (in meters)

$$N = \frac{8300(1,78 - \log(B))}{B}$$

Het is logisch dat als de weg breder is dat er dan minder mensen kunnen oversteken.

Toon aan dat dit direct uit de formule af te lezen is.

**T2 Opgave 40**

Er is een verband tussen de druk en temperatuur van waterdamp:  $\ln(P) = 9,4 - \frac{2630}{T-53}$  waarbij  $P$  de druk en  $T$  de temperatuur in kelvin.

Beredeneer aan de hand van de formule of  $P$  groter of kleiner wordt als  $T$  toeneemt.

**T2 Opgave 41**

L is de maximale hoeveelheid verse lucht. Bij astmapatiënten is de maximale hoeveelheid verse lucht in de longen kleiner en duurt het langer voor dit maximum bereikt wordt. Voor astmapatiënten gebruiken we het model:  $L(t) = a \cdot 3,6(1 - e^{-2,5at})$ , waarbij a een constante tussen 0 en 1 die afhankelijk is van de zwaarte van de astma, en t de tijd

Beredeneer aan de hand van de formule

- dat L toeneemt als t toeneemt
- dat L op den duur gelijk is aan ....

**T2 Opgave 42**

We bekijken de formule  $y = 0,25x^2 + 600x + 80$

Voor de grafiek van y geldt:

- voor hele kleine waarden van x (in de buurt van  $x=0$ ) is de grafiek te benaderen door  $y = 600x + 80$
- voor hele grote waarden van x is y te benaderen door  $y = 0,25x^2$

**T1 Opgave 43**

Welke expressies zijn gelijkwaardig met  $\log(x^2)$  met  $x > 0$

- a.  $\log(x^3) - \log(x)$
- b.  $2\log(x)$
- c.  $2\log(x) - \log(1)$
- d.  $2(\log(x) - \log(10)) + 2$
- e.  $\frac{2\ln(x)}{\ln(10)}$
- f.  $\log(x) \cdot 2\ln(e)$

**T1 Opgave 44**

Welke expressies zijn gelijkwaardig met  $e^{x-3}$

- a.  $\frac{e^x}{e^3}$
- b.  $e^x \cdot e^{-3}$
- c.  $\sqrt{e^{2(x-3)}}$
- d.  $e^x - e^3$
- e.  $\frac{1}{8}e^x$
- f.  $\ln(x+3)$

**T1 Opgave 45**

Welke expressies zijn gelijkwaardig met  $2^{2x+3}$

- a.  $8 \cdot 4^x$
- b.  $2^3 \cdot (2^2)^x$

- c.  $8 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{-3x}$
- d.  ${}^2\log(2x + 3)$
- e.  $4^{x+1,5}$
- f.  $(2x + 3)\log(2)$

### T1 Opgave 46

Welke expressies zijn gelijkwaardig met  $\ln(2x)$  (met  $x > 0$ )

- a.  $e^{2x}$
- b.  $\ln(2) + \ln(x)$
- c.  $\ln(2) - \ln\left(\frac{1}{x}\right)$
- d.  $\ln(x) + 2$
- e.  $\frac{1}{2}\ln(4x)$
- f.  $(e^x)(e^x)$

### T1 Opgave 47

Welke formules zijn gelijkwaardig met  $y = e^{2x-1}$

- a.  $\ln(y) = 2x - 1$
- b.  $x = \frac{1}{2}\ln(y + 1)$
- c.  $x = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\ln(y)$
- d.  $\log(y) = (2x - 1)\log(e)$
- e.  $y = \frac{(e^2)^x}{e}$
- f.  $y = \ln(2x - 1)$

### T2 Opgave 48

Welke formules zijn gelijkwaardig met  $y = 3e^{\frac{1}{2}x}$

- a.  $\ln(y) = \ln(3) + \frac{1}{2}x$
- b.  $y = 3\sqrt{e^x}$
- c.  $y = e^{\frac{1}{2}x + \ln(3)}$
- d.  $y = e^{\frac{1}{2}x} \cdot \ln(3)$
- e.  $x = 2(\ln(y) - \ln(3))$
- f.  $x = 2\ln\left(\frac{y}{3}\right)$

### T2 Opgave 49

Verf is een bijzondere stof. Wanneer je het aanbrengt, is het vloeibaar, na het drogen is het hard. Verf bestaat namelijk uit vaste stof die opgelost is in een vloeistof die tijdens het drogen verdampt.

We noemen het aantal vierkante meters dat met een liter verf geschilderd kan worden het *rendement*. Het rendement kun je berekenen met de formule:  $R = \frac{10V}{d}$

Hierin is:

- $R$  het rendement (in  $\text{m}^2/\text{liter}$ );
- $V$  het percentage vaste stof van de verf;
- $d$  de dikte van de verflaag (in micrometer (1 micrometer is 0,001 millimeter)).

Om dit verband in beeld te brengen wordt de grafiek van  $R(d) = \frac{10V}{d}$ , voor  $V=30$ ,  $V=50$ ,  $V=70$  geschetst, waarbij  $d$  op de horizontale as staat en  $R$  op de verticale as.

- a. Schets deze grafieken.

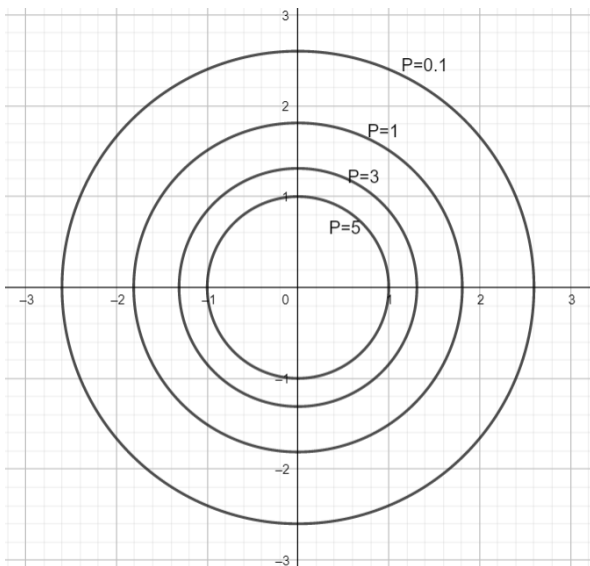
Schets ook de grafieken van  $R(V) = \frac{10V}{d}$  voor  $d=20$ ,  $d=40$ ,  $d=60$

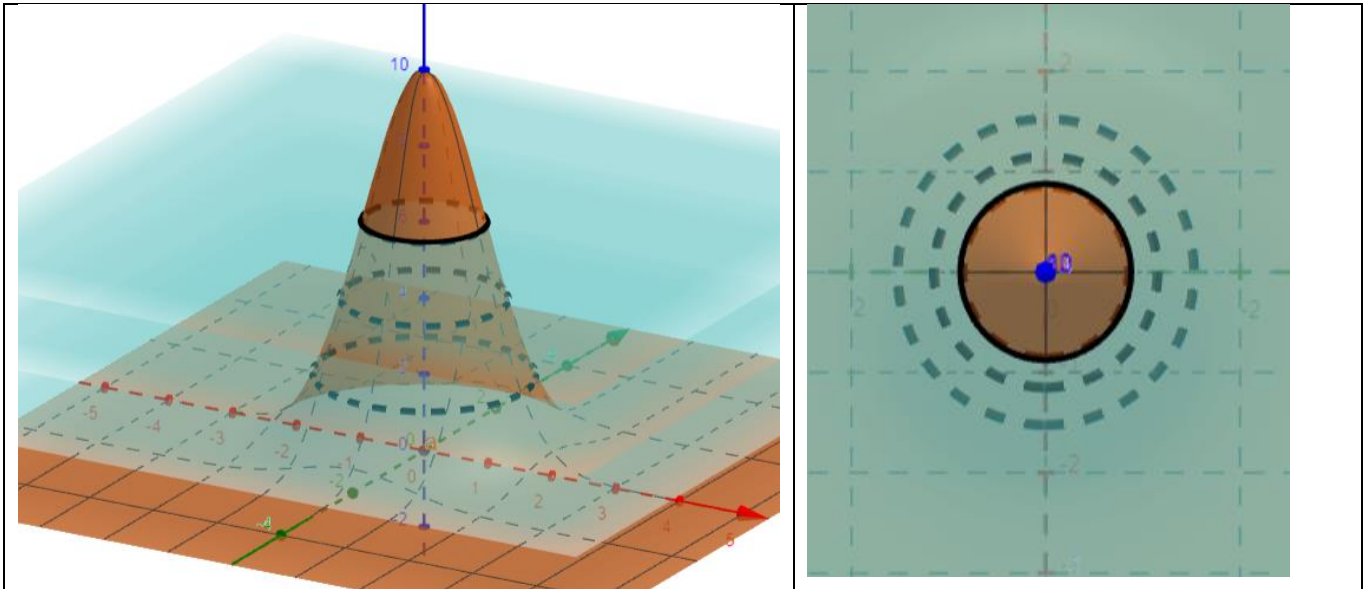
## T2 Opgave 50

Grond die dichterbij het centrum ligt is in het algemeen duurder dan grond die verder van het centrum ligt. Hier zie je een model voor de grondprijs per  $\text{m}^2$  in duizenden euro:

$P = 10 \cdot 2^{-(x^2+y^2)}$ , waarbij  $P$  de prijs in duizenden euro,  $x$  de afstand in oostelijke richting en  $y$  de afstand in noordelijke richting, beide in km. Hieronder zie je een zogenaamde 3-D grafiek bij deze formule. Deze 3-D grafieken zijn in het algemeen lastig afleesbaar. Zie onderstaande figuren. Daarom kiest men voor andere soorten grafieken. Hieronder zie je een bovenaanzicht met daarin aangegeven alle combinaties van  $x$  en  $y$  die prijs  $P=5$  geven; ook die  $P=3$ ,  $P=1$ , en  $P=0,1$  geven. We noemen dit een hoogtelijnen-kaart (of niveaulijnen-kaart).

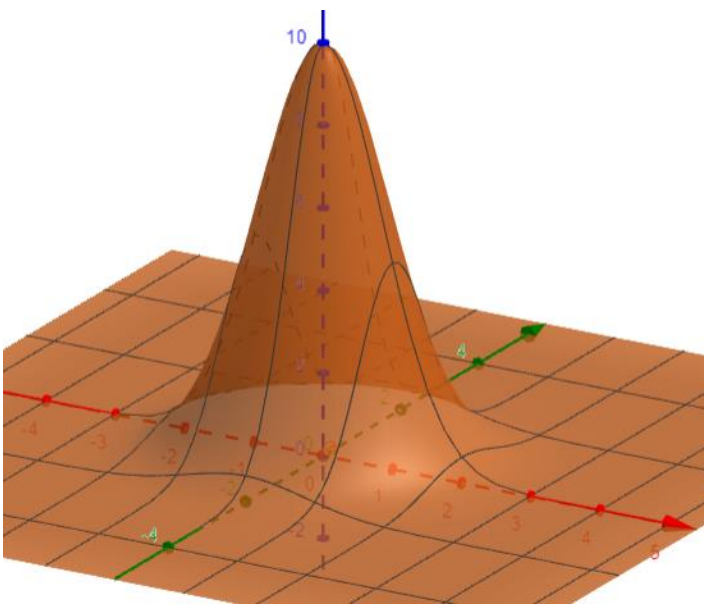
- a. Leg uit dat de hoogtelijn bij  $P=5$  de vergelijking  $2^{-(x^2+y^2)} = 2^{-1}$  (of  $2^{-(x^2+y^2)} = 0,5$ )





We bekijken de 3-D grafiek. Je ziet de lijnen met constante x-waarden en die met constante y-waarden.

- b. Maak een formule voor de grafiek waarbij  $x=2$  en schets die grafiek.



De prijsformule wordt aangepast naar  $P_{nieuw} = 10 \cdot 2^{-(x^2+3y^2)}$

- c. Beschrijf het gevolg van deze aanpassing. Waar wordt de grond duurder/goedkoper?

## T2 Opgave 51

Gegeven zijn twee functies Q:

$Q1(r) = \frac{1}{R} (1 - \frac{r}{R})$  en  $Q2(r) = \frac{1}{\pi R^2} (1 - \frac{r}{R})$ , waarbij R een constante is die groter is dan 10; r is groter of gelijk aan 0.

Beredeneer aan de hand van de formules welke van de twee functies grotere uitkomsten heeft.

Beschrijf de grafiek van beide functies bij een gegeven waarde van R (dus horizontaal r en verticaal Q).

## T2 Opgave 52

Gegeven is  $T = 6,28 \sqrt{\frac{m}{c}}$

- Schets de grafiek van  $T(m) = 6,28 \sqrt{\frac{m}{c}}$
- Schets de grafiek van  $T(c) = 6,28 \sqrt{\frac{m}{c}}$

## T2 Opgave 53

De BMI kun je berekenen met de formule  $B = G \cdot L^{-2}$ , waarbij B de BMI, G het gewicht in kg, en L de lengte in m.

- Beredeneer aan de hand van de functie dat bij een vast gewicht de BMI kleiner wordt als L groter is.
- Schets de grafiek van  $B(G) = G \cdot L^{-2}$  (dus G op horizontale as en B op verticale as)
- Schets de grafiek van  $B(L) = G \cdot L^{-2}$  (dus L op horizontale as en B op verticale as)

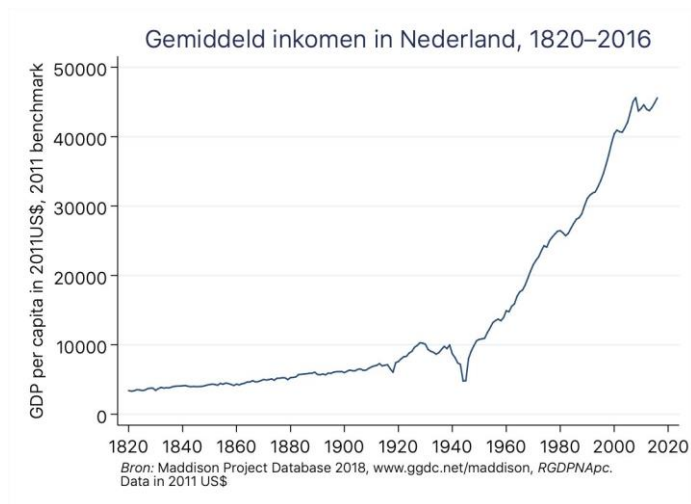
## §6 Formules maken en modelleren

### A. Centrale vragen

#### CV 21 Exponentiële formule maken

Maak bij onderstaande situaties zelf een formule

Maak een exponentiële formule bij de volgende grafiek. Geef duidelijk aan welke meetwaarden je gebruikt.



#### CV 22 Nieuwe formules maken

Een fabrikant wil zijn hagelslag verpakken in balkvormige doosjes van  $800 \text{ cm}^3$  met een vierkante bodem. Voor een doosje gebruikt hij karton.

De hoogte van zo'n doosje wordt aangegeven met  $h$  en de zijde van de vierkante bodem met  $x$ .

a. Geef een formule voor de oppervlakte van het doosje, uitgedrukt in  $x$ .

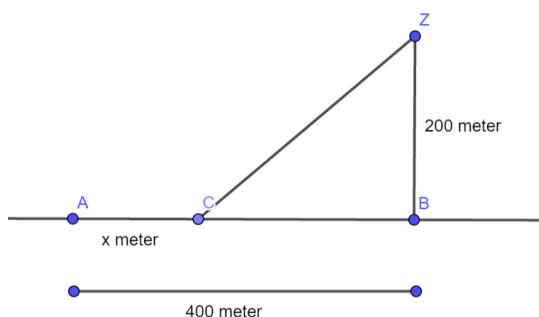
(hint: Laat zien dat het verband tussen  $h$  en  $x$  beschreven kan worden door  $4xh + 2x^2 = 800$ )

Er is hier sprake van een wiskundig model voor de hoeveelheid karton die nodig is voor zo'n doosje.

b. Leg uit welke aannamen hier gemaakt worden.

#### CV 23 Een wiskundig model maken

Iemand staat aan de rand van een meer (zie A) in de figuur.



Bij Z ligt een zwemmer in nood. Om deze persoon te redden kan de persoon bij A direct in het water springen en (langs de lijn AZ) naar de zwemmer in nood zwemmen. Of de persoon loopt langs de rand van het meer naar punt B en zwemt vandaar naar de zwemmer in nood. Ook kan de persoon vanuit A eerst  $x$  meter langs de rand lopen en daarna vanaf punt C zwemmen naar

Z. Neem aan dat hoek ABZ een rechte hoek is, dat AB = 400 m en dat BZ = 200 m is. De loopsnelheid (bij hard lopen) 10 km/uur en de zwemsnelheid 2 km/uur.

- Maak een formule voor de tijd dat de persoon onderweg is als deze naar C loopt en vandaar naar Z zwemt.

Er is hier sprake van een wiskundig model voor de hoeveelheid karton die nodig is voor zo'n doosje.

- Leg uit welke aannamen hier gemaakt worden.

#### CV 24 Formules omkeren

Herschrijf de volgende formules naar de aangegeven vorm:

$$E = \frac{1}{2}mv^2 \text{ naar } v = \dots$$

$$F = G \cdot \frac{mM}{r^2} \text{ naar } r = \dots$$

$$\frac{r^3}{T^2} = \frac{GM}{4\pi^2} \text{ naar } r = \dots$$

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}} \text{ naar } v = \dots$$

$$N = N_0 \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{t_h}} \text{ naar } t = \dots$$

#### CV 25 Formules maken door schakelen

Met constante snelheid wordt er lucht geblazen in een bol, die daardoor groter wordt. Per minuut neemt het volume van de bol met 2000 cm<sup>3</sup> toe:  $V = 2000t$ . Het volume van een bol kan berekend worden met de formule  $V = \frac{4}{3}\pi R^3$ , waarbij R de straal in meter en V het volume in cm<sup>3</sup>. Maak met deze formules een formule voor R, uitgedrukt in t.

#### CV 26 Formules maken door herleiding

Schrijf  $y = 2(x - 1)(2x + 3) - 3(2x - 7)^2$  in de vorm  $y = ax^2 + bx + c$

Schrijf  $y = \frac{200}{4 + 12 \cdot 0,94^t}$  in de vorm  $y = \frac{c}{1 + e^{a \cdot t + b}}$

Schrijf  $y = \ln(2 \cdot 1,2^t)$  in de vorm  $y = a \cdot \ln(t) + b$

Schrijf  $\log(y) = -2,3 \log(t) + 3,4$  in de vorm  $y = a \cdot t^b$

Heb je problemen bij deze opgaven kijk dan eerst naar de verkennende opgaven

### V Opgave 1

a. Schrijf  $y = \frac{4}{x+1} \cdot \frac{2x}{x-4}$  in de vorm  $y = \frac{\dots}{\dots}$

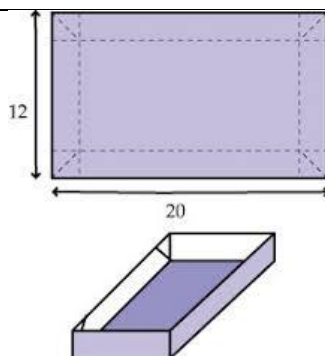
b.  $K = 4V + 6B$ ,  $V = 0,5x$ , en  $B = \frac{10}{x}$ ; maak een formule voor K uitgedrukt in x

c. Schrijf de formules om in de vorm  $x = \dots$

$$y = 3 + 2\sqrt{x}$$

d.

Van een blaadje van 12 cm bij 20 cm wordt een (open) doosje gevouwen. Zie afbeelding. De hoogte van het doosje noemen we  $x$ . Maak de tabel hieronder af:



| Hoogte $x$ | lengte | breedte | inhoud                |
|------------|--------|---------|-----------------------|
| 1          | 18     | 10      | $1 \cdot 18 \cdot 10$ |
| 1,5        |        |         |                       |
| 2          |        |         |                       |
| 2,5        |        |         |                       |
| $x$        |        |         |                       |

## Antwoord op de centrale vragen

## B Theorie (om te onthouden) en opgaven

We zien hierboven een aantal soorten opgaven waarin steeds een formule gevraagd wordt. Ten eerste hebben we opgaven waarin naar een bekend soort formule gevraagd wordt, bijvoorbeeld lineair of exponentieel; je weet dan hoe de vorm van de formule er gaat uitzien. Ten tweede, moet je soms formules combineren of omkeren om tot een nieuwe formule te komen. Ten derde, soms moet je formules maken vanuit een context. Dan heb je vaak geen idee hoe de vorm van de formule er uit ziet. Vaak helpt het dan om eerst een getallenvoorbeeld te maken, waarbij je de berekeningen laat staan.

**Om te onthouden:**

Zorg dat je de omkeerformules van bekende basisformules kent, zoals bij  $y = 2x + 6$ ,  $y = x^5$ ,  $y = x^{0,6}$

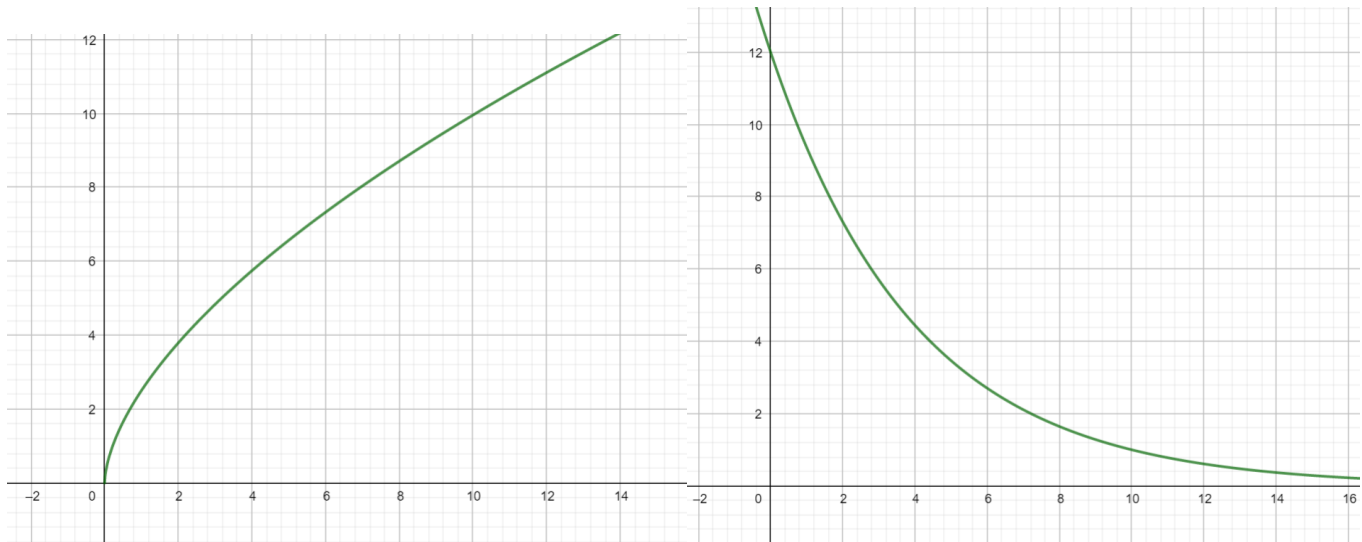
Bij het opstellen van lineaire en exponentiele formules kun je altijd een (klein) tabelletje gebruiken; dus lees waarden uit grafiek en/of context af en zet die in een tabelletje.

Bij het combineren van twee formules tot een nieuwe, vul je vaak een hele formule in een andere in, zoals bijv. bij  $A = 2B + C$  en  $B = 3C + 5$  en je moet  $A$  uitdrukken in  $C$  (vul dan de tweede formule van  $B$  in voor  $B$  in eerste formule)

Bij wiskundige modellen kun je allerlei vragen stellen, zoals Waar komt het model vandaan? Welke aannamen zijn er gemaakt? Kan het model getest worden? Kan het model aangepast worden? Bij twee of meer modellen, waarin verschillen de modellen?

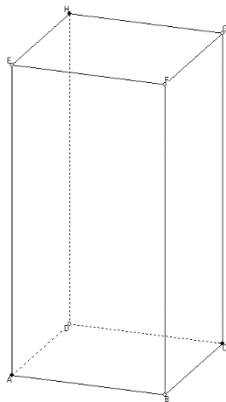
### T1 Opgave 54

Maak een formule bij de volgende grafieken:



### T1 Opgave 55

Een balk heeft een vierkante onder- en bovenkant, met zijde  $x$  dm. De inhoud van de balk is  $1 \text{ dm}^3$ .



- Maak een formule voor de hoogte, uitgedrukt in  $x$ .
- Maak een formule voor de oppervlakte (Opp) van de balk, uitgedrukt in  $x$ .

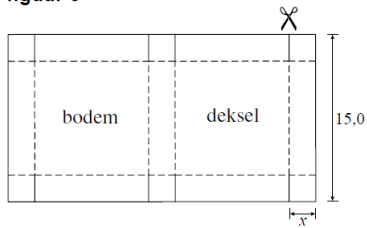
### T2 Opgave 56

Uit een lange strook karton met een breedte van  $15,0 \text{ dm}$  worden dozen gemaakt met vierkante bodem en deksel en rechthoekige zijkanten. Daartoe wordt het karton verknipt in rechthoeken waarvan de breedte gelijk is aan  $15,0 \text{ dm}$  en de lengte afhangt van de gewenste hoogte van de doos. We noemen

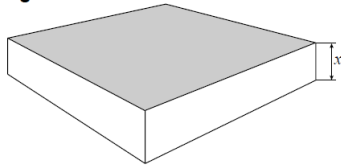
de hoogte van de doos in  $\text{dm}$   $x$ .

Zo'n rechthoekig stuk karton wordt op acht plaatsen  $x \text{ dm}$  ingeknipt, waarna zes vierkantjes van  $x$  bij  $x \text{ dm}$  worden omgevouwen. Zie figuur 6. De stippellijnen zijn vouwlijnen. Tot slot wordt het karton gevouwen tot een doos. Zie figuur 7.

figuur 6



figuur 7



Maak een formule voor de inhoud van de doos, uitgedrukt in  $x$ .

## T2 Opgave 57

Herschrijf de volgende formules:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{c}} \text{ naar } C = \dots$$

$$I = I_0 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{d}{d_h}} \text{ naar } d = \dots$$

$$pV = nRT \text{ naar } T = \dots$$

$$t_b = t_0 \left(1 + \frac{gh}{c^2}\right) \text{ naar } h = \dots$$

$$v = \sqrt{2GM/r} \text{ naar } r = \dots$$

$$w = \frac{u+v}{1+uv/c^2} \text{ naar } u = \dots$$

## T1 Opgave 58

Herschrijf de formules

a. Schrijf  $y = -2(x-3)^2 - (x-4)^2$  in de vorm  $y = ax^2 + bx + c$

b. Schrijf als 1 breuk:

$$y = 5t + \frac{4}{t-1}$$

$$y = \frac{6}{x-1} \cdot \frac{8x}{(x+1)^2}$$

$$y = 5A(A-1) \cdot \frac{100}{A^2}$$

## T2 Opgave 59

Een fabrikant van spelletjes wil een nieuw spel op de markt brengen. Vooraf doet hij onderzoek naar de afzetmogelijkheden. Het aantal spelletjes dat hij denkt te kunnen verkopen is

afhankelijk van de prijs ( $p$ ):  $p = -\frac{1}{150}q + 60$ , waarbij  $p$  de prijs in euro en  $q$  het aantal verkochte spelletjes per maand.

Voor de kosten maakt hij de volgende schatting:  $K = 3q + 1500$ , waarbij K de kosten per maand in euro.

Maak een formule voor de winst per maand.

## T2 Opgave 60

Gegeven  $F = \frac{mv^2}{r}$ ,  $F = G \cdot \frac{Mm}{r^2}$ ,  $v = \frac{2\pi r}{T}$  met de variabelen m,v,r,M,T

Toon aan door combineren van deze formules dat geldt  $T = 2\pi r \sqrt{\frac{r}{GM}}$

## T1 Opgave 61

Er zijn verschillende formules om de lichaamsoppervlakte van iemand te berekenen. Hier zie je er twee.

$$S_1 = 0,00718L^{0,725}M^{0,425} \text{ en } S_2 = \sqrt{\frac{1}{3600} \cdot L \cdot M}$$

In deze formules is S de lichaamsoppervlakte in  $m^2$ , L de lichaamslengte in cm en M het lichaamsgewicht in kg.

We nemen aan dat het lichaamsgewicht ( M ) evenredig is met het volume. Als de lengtematen (lengte, breedte, hoogte) van een lichaam worden verdubbeld, wordt het volume 8 keer zo groot. Op basis hiervan zal bij verdubbeling van lengtematen de lichaamsoppervlakte 4 keer zo groot worden.

- Onderzoek of beide formules hieraan voldoen?
- Welke formule geeft grotere uitkomsten voor de lichaamsoppervlakte?

Er is hier sprake van modellen voor de lichaamsoppervlakte.

- Bedenk enkele aannamen die bij deze modellen gedaan zijn

## T2 Opgave 62

Tornado's kunnen grote schade aanbrengen. Voor de zwaarte van een tornado zijn verschillende meetschalen ontworpen, die steeds afhangen van de maximale windsnelheid tijdens zo'n tornado. In 1971 is de Fujita-schaal ontwikkeld, die gekoppeld werd aan de

beschrijving uit de volgende tabel.

| Fujita  | Beschrijving                                                                                                                                |
|---------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| $F = 0$ | Storm. Lichte schade. Afgebroken takken en bomen met ondiepe wortels weggeblazen.                                                           |
| $F = 1$ | Matige tornado. Daken zwaar beschadigd, caravans omvergeblazen, kassen vernield.                                                            |
| $F = 2$ | Stevige tornado. Belangrijke schade. Daken van stevig gebouwde huizen afgerukt, dikke bomen ontworteld, caravans opgetild en neergekwakt.   |
| $F = 3$ | Zware tornado. Zware schade aan grote gebouwen, treinen omvergeblazen, grote auto's opgetild.                                               |
| $F = 4$ | Verwoestende tornado. Sommige woningen met de grond gelijk gemaakt, treinen verplaatst, zware voorwerpen de lucht in geblazen.              |
| $F = 5$ | Ongelooflijke tornado. Huizen van hun fundamenteën gerukt, auto's over meer dan 100 meter verplaatst, structurele schade aan hoge gebouwen. |

Voor de genoemde Fujita-schaal geldt de volgende formule  $F = \left(\frac{v}{6,3}\right)^{\frac{2}{3}} - 2$ , hierbij is  $v$  de maximale windsnelheid in de tornado in m/s en  $F$  de intensiteit van de tornado op de Fujita-schaal.  $F$  wordt afgerond op een geheel getal.

- a. Volgens Weeronline.nl is de zwaarste windstoot ooit in ons land gemeten 172,8 km/u, en wel op 25 november 2005 in Hoek van Holland. Is een tornado met intensiteit 4 op de Fujita-schaal ooit voorgekomen?

In Groot-Brittannië is in 1972 de Torro-schaal ontwikkeld met als formule  $v = 2,39(T + 4)^{\frac{2}{3}}$ , hierbij is  $v$  de maximale windsnelheid in de tornado in m/s en  $T$  de intensiteit van de tornado op de Torro-schaal.  $T$  wordt afgerond op een geheel getal.

- b. Vergelijk in een tabel de  $F$ -schaal en de  $T$ -schaal met elkaar. Voor welke formule zou men in Europa kiezen waar niet vaak heel zware tornado's voorkomen en men de lichtere tornado's onderling goed wil kunnen onderscheiden?

Er blijkt een lineair verband te zijn tussen de  $F$ -schaal en de  $T$ -schaal:  $F = aT + b$

- c. Toon dit aan.

De oudste schaal voor windkracht is die van Beaufort (de  $B$ -schaal), in woorden beschreven in 1805 en in 1921 eveneens in een formule vastgelegd. Het verband tussen de  $B$ -schaal en de  $T$ -schaal is vastgelegd door de formule  $B = 2(T + 4)$

- d. Leid de formule af die de snelheid  $v$  in m/s uitdrukt in de  $B$

## T2 Opgave 63

Helikopters worden gebruikt bij het aanleggen van dijken bij storten van betonblokken. Bij een depot pikt de helikopter betonblokken op, vliegt vervolgens naar de dijk toe, en dropt ze daar. Voor het plannen van dit soort werk is het belangrijk te weten hoeveel vluchten een helikopter per uur kan maken (VL). Dat zal natuurlijk afhankelijk zijn van de vliegafstand tussen depot en dijk ( $d$  in meters) en de gemiddelde snelheid waarmee gevlogen wordt, deze is 72 km/u, en de tijd die nodig is voor het laden en het lossen van een lading, deze is 48 sec.

- a. Toon aan dat het aantal vluchten berekend kan worden met de formule  $VL = \frac{3600}{0,05d+48}$

Door het aantal vluchten per uur te vermenigvuldigen met 2d krijgen we het totaal aantal gevlogen meters per uur.

- b. Onderzoek of het totaal aantal gevlogen meters per uur toe of afneemt als d groter wordt.

We hebben tot nu toe de VL-formule gebruikt met de afstand d in meters.

- c. Pas de formule aan zodat de afstand d in kilometer ingevuld moet worden  
d. Bedenk enkele aannamen die bij dit model gedaan zijn.

## T2 Opgave 64

De zwaarte van een col modelleren (Jan Bijma)

Bij het wielrennen door de bergen hebben (amateur)wielrenners behoeften aan een maat voor de zwaarte van de cols (bergen).

- a. Bedenk en schrijf op wat in de zwaarte van een col een rol speelt als je een berg of heuvel op wilt fietsen.

Niet al deze factoren (variabelen) zijn eenvoudig en objectief te meten.

- b. Kies enkele objectief meetbare variabelen en maak daarmee een formule voor de zwaarte van een berg.  
c. Pas jouw formule toe op de volgende drie cols en kijk of de uitkomsten redelijk overeenkomen met je 'gezonde verstand': Mont Ventoux (30 km weg en 1915 m hoog), de Alpe d'Huez (34 km weg en 1780 m hoog), de Vaalserberg (1500 m weg en 110 m hoog).  
d. Vergelijk je formule ook met die van Jan Bijma die de volgende formule maakte:  $Zwaarte = h^2/(10000W)$ , waarbij h de hoogte in meters en W de lengte van de weg in km.

## §7 Probleemaanpak en gemengde opgaven

### Probleemaanpak bij algebra

Je gaat nu gemengde opgaven maken waarbij je algebraïsche vaardigheden moet inzetten om de vragen te beantwoorden. Hoe pak je dat nou aan? Lees onderstaande aandachtspunten door.

(A&B) Soms zul je direct herkennen hoe je aan het werk zou kunnen gaan: je herkent het probleem en/of de probleem-familie en kent een (standaard) aanpak. In je voorbereidingen moet je dus aandacht besteed hebben aan een repertoire van probleem-families. Dit zijn bouwstenen waarmee je problemen kunt aanpakken. Controleer wel altijd achteraf of je oplossing 'logisch' past bij de opgave.

Maar soms zul je geen enkel idee hebben wat je zou kunnen gaan doen. Dan kun je toch op verschillende manieren te werk gaan.

(C) Probeer het hele probleem in **deelproblemen** te hakken die je wel herkent: je maakt dan als het ware een stappenplan voor jezelf.

(D) Als dat niet lukt kun je op zoek gaan naar **signaalwoorden**, zoals bijvoorbeeld 'gelijkmatige groei' (wijst op lineair model), of 'steeds relatief gelijke groei' (wijst op vaste groeifactor ofwel exponentiele groei).

Andere mogelijke associaties zijn bijvoorbeeld:

Gaat het over **breuken**, bedenk dan dat je alleen gelijknamige breuken kunt optellen en dat je breuken gemakkelijk kunt vermenigvuldigen ( $\frac{1}{3} \cdot \frac{2}{5} = \frac{2}{15}$ ).

Gaat het over **procenten**, bedenk dan dat je berekeningen op drie manieren kunt maken: via de 1%-methode

(1% = ...), via een verhoudingstabel of via een vermenigvuldigingsfactor (5% van ... is 0,05\*...).

Gaat het over **verhoudingen**, bekijk dan goed wat het totaal is dat verdeeld moet worden en het totaal van de verhoudingsgetallen.

Gaat het over **machten**, bedenk dan dat je alleen gelijksoortige machten kunt optellen ( $2x^3 + 5x^3 = 7x^3$ ) en dat je machten wel altijd kan vermenigvuldigen ( $x^2 \cdot x^3 = x^5$ ), delen en tot een macht kan verheffen.

Gaat het over **logaritmen**, bedenk dan dat je logaritmen alleen kan optellen  $\log(a) + \log(b) = \log(a \cdot b)$

Spelen **haakjes** een rol, bedenk dan dat deze dienen om de volgorde van berekeningen te beïnvloeden en om "dingen bij elkaar te houden die bij elkaar horen".

Moet je een **formule maken**, bekijk dan eerst goed of

- Er gevraagd wordt naar het opstellen van een **formule met een bekende vorm**, bijvoorbeeld een lineaire of exponentiële formule bij een gegeven verhaal, tabel of grafiek.
- Je zelf een formule moet opstellen bij een gegeven context **zonder dat de vorm van de formule al bekend is**. Volg dan het verhaal van de context met een zelfgekozen getallenvoorbeeld en reken dit getallenvoorbeeld eens door.

Probeer van daaruit te algebriseren dat wil zeggen vervang het gekozen getallenvoorbeeld door een variabele.

- Je een formule moet **omkeren**. Dan kun je zelf een pijlenketting maken bij de gegeven formule en dan die pijlenketting omkeren
- Je twee (of meer) formules moet combineren (**schakelen**). Dan moet je de ene formule invullen in de andere formule. Dat is een beginstap die je dan eigenlijk altijd wel kunt zetten.
- Je een formule in **een bepaalde vorm** moet schrijven (herleiden). Dan komt het erop neer om rekenregels toe te gaan passen. Dit kunnen rekenregels zijn voor breuken, machten, wortels, haakjes etc.

Gaat het over **formules en grafieken**, bekijk dan of je alle  $x$ -waarden kunt invullen, wat het snijpunt is met de  $y$ -as, of je de snijpunten met de  $x$ -as makkelijk kunt vinden, of de grafiek steeds stijgend of dalend verloopt, en wat het “oneindig gedrag” is.

(E) Als je ook nu nog geen idee hebt, dan kun je bijvoorbeeld een **schets** van de situatie maken of de situatie in een schema zetten.

Daarnaast is het maken van een **getallenvoorbeeld** nuttig; kies daarbij ‘mooie’ getallen en werk de berekeningen zo min mogelijk uit.

Ook kun je een **willekeurige uitkomst ‘gokken’** en vervolgens nagaan dat deze uitkomst niet mogelijk is.

Dit zijn dingen die experts ook doen als zij met een probleem worden geconfronteerd dat zij nog niet eerder hebben gezien en waarvan zij niet direct inzien hoe ze het zouden moeten oplossen.

Hieronder zie je de stappen nog eens schematisch in beeld:

| Herkenningsniveau                                                                                                             | Heuristieken                                                                                                                            |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| A. Gehele herkenning, de oplossing wordt direct herkend                                                                       | Niet nodig                                                                                                                              |
| B. Een probleem-familie wordt herkend; de oplossing is niet direct concreet aanwezig maar een vaste oplossingswijze is bekend | Zoek ‘parameters’ van de probleem-familie of gebruik kenmerken van probleem-familie                                                     |
| C. Het probleem kan opgedeeld worden in een aantal familieproblemen                                                           | Los de deelproblemen op en voeg oplossingen samen, of, los de deelproblemen achter elkaar op                                            |
| D. Enkel een (relevant) kenmerk van het probleem wordt herkend                                                                |                                                                                                                                         |
| E. Er is geen herkenning, maar strategisch zoeken wordt gestart                                                               | Gebruik algemene heuristieken zoals Polya: bekijk aparte gevallen, bekijk extremen, maak probleem kleiner, bekijk andere representaties |

Probeer te beginnen om een aanpak te bedenken. Belangrijk is dat je niet te snel opgeeft.

## T2 Opgave 65

Een periode van hyperinflatie treedt op als gedurende die periode maandelijks de inflatie hoger is dan 50%, dat wil zeggen dat de prijzen per maand met meer dan 50% stijgen. De hoogste inflatie die ooit is gemeten was in juli 1946 in Hongarije. De inflatie bereikte die maand een piek van 42.000.000.000.000.000%.

Dit is gelijk aan 207% per dag en elke 15 uur verdubbelden de prijzen. Controleer deze laatste getallen 207 en 15.

## T2 Opgave 66

Richtlijnen voor lawaai op werkvloer (van Ministerie van Sociale Zaken)

Wetenschappelijk staat vast dat langdurig blootstelling aan schadelijk geluid blijvende doofheid kan veroorzaken. Dit kan optreden vanaf 90 dB. Naarmate het niveau hoger is en de blootstelling langer duurt, wordt de kans op doofheid groter. Deze lawaaidoofheid ontstaat geleidelijk. Daarom denkt men ten onrechte dat men aan lawaai went.

Volgens een internationale norm mag men op het werk niet langer dan 8 uur blootgesteld worden aan lawaai van 90 dB of meer. In harder geluid mag minder lang gewerkt worden:

bij iedere 3 dB lawaai stijging moet de werktijd gehalveerd worden.

Bij welk lawaai mag een werkdag nog maar 1 uur duren?

## T2 Opgave 67

Om relatief zo min mogelijk warmte te verliezen uit een vat met warme vloeistof moet de inhoud van het vat zo groot mogelijk zijn ten opzichte van de buitenoppervlakte van dat vat (of, dat de oppervlakte zo klein mogelijk is ten opzichte van de inhoud). We vergelijken hier een bol met een kubus.

Voor een bol met straal  $R$  geldt: Inhoud bol =  $\frac{4}{3}\pi R^3$ ; oppervlakte bol =  $4\pi R^2$

Voor kubus met zijde  $z$  geldt: Inhoud kubus =  $z^3$ ; oppervlakte kubus =  $6z^2$

Vergelijk een bolvormig vat en een kubusvormig vat met inhoud van  $1 \text{ dm}^3$  met elkaar. Welke van de twee heeft de kleinste oppervlakte?

## T2 Opgave 68

De groeifactor per dag  $g$  van het aantal bacteriën hangt af van de bewaar temperatuur. De onderzoekers hebben de volgende formule hiervoor opgesteld:  $g = 10^{0,009(T+6)^2}$ . In deze formule is  $T$  de bewaar temperatuur in  $^{\circ}\text{C}$ .

Met deze formule kun je dus bij iedere bewaar temperatuur de bijbehorende groeifactor berekenen. Voor de consument is het belangrijk dat de verdubbelingstijd van het aantal bacteriën zo groot mogelijk is.

Onderzoek bij welke temperatuur de verdubbelingstijd van het aantal bacteriën maximaal is.

## T2 Opgave 69

Onderstaande figuur komt uit het VN-rapport.

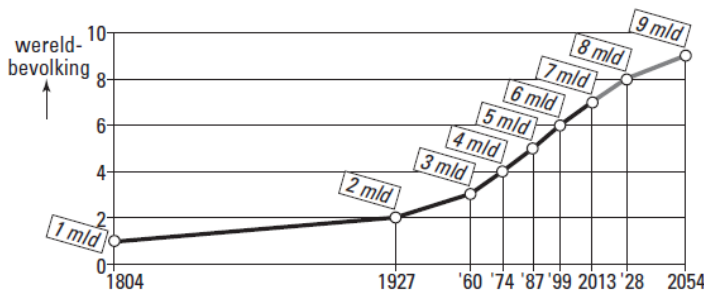
De grootte van de wereldbevolking voldoet bij benadering aan het volgende groeimodel:

$$W = \frac{L}{1 + (L - 1) \cdot g^t}$$

Hierbij is:

- $W$  de wereldbevolking in miljarden;

- $t$  het aantal jaren na 1804;
- $g$  een constante met  $0 < g < 1$  en
- $L$  de limietwaarde van de wereldbevolking in miljarden, dat is de grenswaarde waar  $W$  op den duur naar toe zal groeien.



- Beredeneer aan de hand van de formule dat  $W$  naar  $L$  nadert als  $t$  heel groot wordt.
- Beredeneer aan de hand van de formule dat  $W$  stijgt als  $t$  groter wordt.
- Onderzoek met de afgeleide op welk moment de groeisnelheid van  $W$  maximaal is. Vaak wil met weten op welk moment een bepaalde waarde van  $W$  bereikt wordt.
- Maak daarvoor een formule die  $t$  uitdrukt in  $W$ ,  $L$ , en  $g$ .

## T2 Opgave 70

Nog regelmatig worden er in oude aardlagen skeletonderdelen en voetsporen aangetroffen van dinosauriërs. Uit de voetsporen kunnen we zelfs achterhalen hoe snel die dinosauriërs daar liepen. Deze snelheid hangt af van de afstand tussen de voetsporen, de paslengte, en van de grootte van de dinosaurus die het voetspoor achterliet. Doordat soms hele skeletten gevonden zijn weten we hoe groot zo'n dier geweest is.

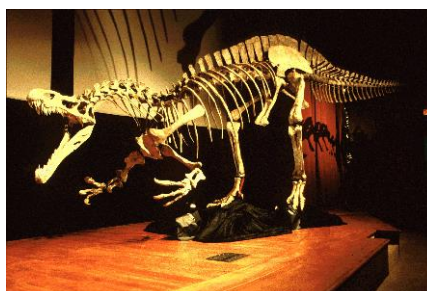
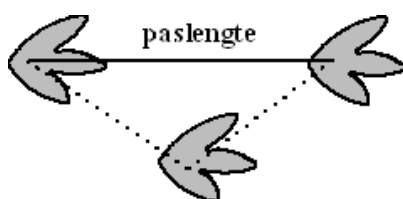
De biomechanicus R. McNeill Alexander heeft van diersoorten de relatie tussen paslengte, snelheid en grootte bepaald. Uit zijn onderzoek is een formule afgeleid die een goede schatting geeft voor de snelheid van deze dieren:

$$v = 2,81 \cdot s^{1,67} \cdot h^{-1,17}$$

Hierin is:

- $v$  de snelheid in *kilometer per uur*
- $s$  de paslengte in *meter*, de afstand tussen twee opeenvolgende voetafdrukken van dezelfde voet (zie onderstaande figuur).
- $h$  de heuphoogte in *meter*

De formule geldt voor zowel twee- als viervoeters, zowel groot als klein.



- Toon aan dat, bij gelijkblijvende hoogte, een verdubbeling van de paslengte er voor zorgt dat de snelheid  $v$ , bij iedere snelheid, met een vast percentage toeneemt.
- Onderzoek of, bij een gelijkblijvende paslengte, een verdubbeling van de hoogte de snelheid  $v$ , bij iedere snelheid, met eenzelfde percentage verandert.

## T2 Opgave 71

$B$  is de geluidsbelasting op een bepaalde plek in de buurt van een vliegveld,  $N_{\max}$  het maximaal aantal vliegtuigen,  $L$  het geluidsniveau van een individueel vliegtuig. Het verband tussen  $L$ ,  $N_{\max}$  en  $B$  kan beschreven worden door twee verschillende formules,  $B_1$  is de oude formule en  $B_2$  is de nieuwe formule:  $B_1 = 8,7 \cdot \ln(N_{\max}) + 1,3L - 157$  en  $B_2 = 4,4 \cdot \ln(N_{\max}) + L - 79$ . Omdat  $B$  maximaal 45 mag zijn, zal het aantal vliegtuigen  $N_{\max}$  afhankelijk zijn van het geluidsniveau van een individueel vliegtuig  $L$ . Dit geluidsniveau  $L$  was voor invoering van de nieuwe formule gelijk aan 69, maar zal naar verwachting de komende jaren afnemen. Onderzoek of de kritiek van milieugroepen op deze nieuwe formule terecht is.

## T2 Opgave 72

In een kosten-voorraad model dat de kosten van het houden van voorraad en bestellen beschrijft worden vaak formules gebruikt van de vorm:

$y_a = ax + \frac{b}{x}$ , waarbij  $y_a$  de totale voorraad kosten en  $x$  de bestelgrootte (de hoeveelheid die per keer besteld wordt).  $a$  en  $b$  zijn positieve constanten

Beredeneer aan de hand van de formule dat als  $x$  heel klein is  $y_a$  groot is en dat dit ook geldt als  $x$  heel groot is en dat daarom  $y_a$  een minimum moet hebben.

## T2 Opgave 73

Verschillende bouwmarkten verkopen kasten die je zelf in elkaar moet zetten. Ze hebben vaak allerlei vormen en maten. In deze opgave kijken we naar de prijzen van achterwanden van kasten.

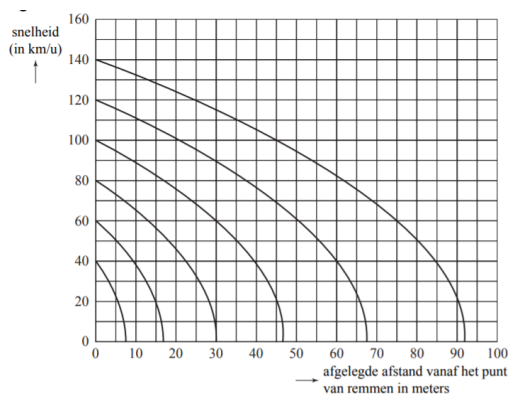
| Hoogte in cm | 50 cm breed | 70 cm breed | 90 cm breed |
|--------------|-------------|-------------|-------------|
| 40           | 16          | 20          | 24          |
| 80           | 28          | 36          | 44          |
| 120          | 40          | 52          | 64          |
| 160          | 52          | 68          | 84          |
| 200          | 64          | 84          | 104         |

De prijzen voor andere afmetingen worden berekend door deze tabel gelijkmatig uit te breiden.

- Bereken de prijzen van achterwanden van 120 cm bij 120 cm; en van 240 cm hoog bij 180 cm breed
- Maak een formule voor de prijs uitgedrukt in de hoogte  $h$  en de breedte  $b$ .

## T2 Opgave 74

Wanneer een automobilist op de rem trapt, zal de snelheid van de auto afnemen. In de figuur is voor beginsnelheden van 40, 60, 80, 100, 120 en 140 km per uur het verband weergegeven tussen de snelheid van een auto en de afgelegde afstand vanaf het punt waarop begonnen is met remmen.



In de figuur kun je bijvoorbeeld aflezen dat een auto die gaat remmen met een beginsnelheid van 120 km per uur na 20 m nog een snelheid heeft van (ongeveer) 101 km per uur, en na 67 meter tot stilstand is gekomen. We zeggen dat de remweg bij een snelheid van 120 km/u gelijk is aan 67 meter.

- a. Maak op basis van de figuur een formule voor het verband tussen de snelheid  $v$  en remweg  $r$ .

De grafieken kunnen beschreven worden met een formule van de vorm:  $v = \sqrt{a \cdot x + b}$ , waarbij  $v$  de snelheid in km/u en  $x$  de afgelegde afstand vanaf punt van remmen (in meters).

- b. Bereken de waarde van  $a$  en  $b$  bij de grafiek van 140 km/u.

Op basis van de theorie mogen we verwachten dat de afgelegde afstand bij remmen beschreven kan worden met de formule  $x = p \cdot v^2 + q$ , waarbij  $p$  en  $q$  positieve constanten.

- c. Leg uit dat dit in overeenstemming is met de formule in deze opgave.

## T2 Opgave 75 werken met bijzondere schaalverdelingen

Om formules op te stellen worden in de natuurkunde vaak andere grootheden langs de assen gezet, zodat er rechte lijnen verschijnen. Een voorbeeld: de tijd die het afleggen van een bepaalde afstand kost kan berekend worden met  $t = \frac{s}{v}$ , waarbij  $t$  de tijd in sec,  $s$  de afstand in m,  $v$  de snelheid in m/s.

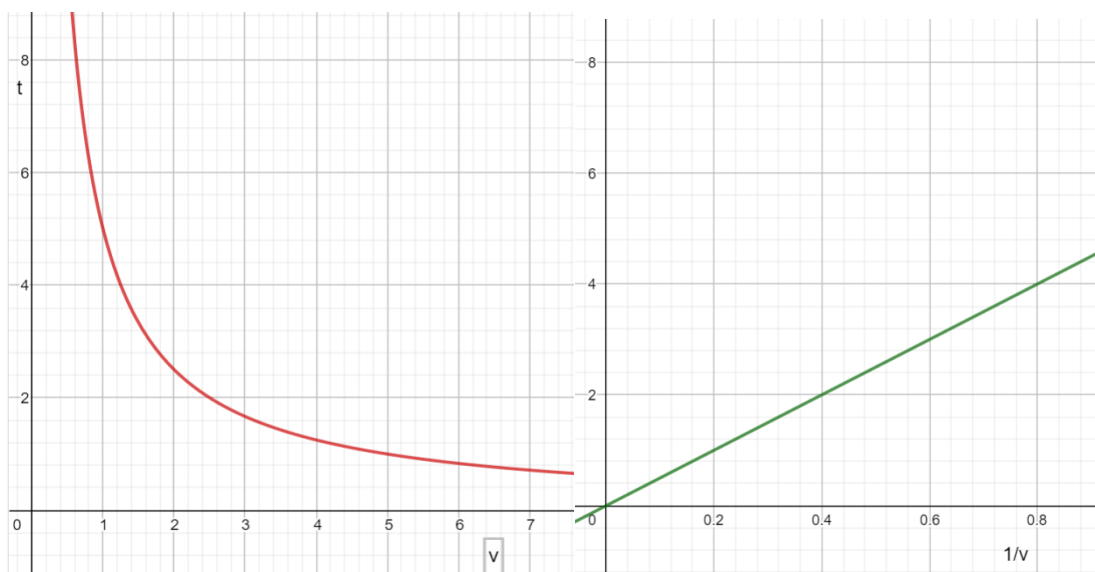
Stel dat we de volgende tabel hebben:

|              |     |      |      |      |      |
|--------------|-----|------|------|------|------|
| Snelheid $v$ | 2,5 | 3    | 4    | 6    | 7    |
| Tijd $t$     | 2   | 1,67 | 1,25 | 0,83 | 0,71 |

Als we dit een gewoon assenstelsel zetten krijgen we de grafiek zoals hieronder in de linker figuur.

In de natuurkunde zetten ze in plaats van  $v$  op de horizontale as  $1/v$  uit.

- a. Ga na dat de punten dan op de rechte lijn liggen die in de rechter figuur getekend is.  
 b. Leg uit aan de hand van de formule  $t = \frac{s}{v}$  dat je op deze wijze een rechte lijn moet krijgen.



In onderzoek is het zoeken naar lineaire verbanden veel simpeler dan het zoeken naar andere verbanden zoals  $y = a \cdot \frac{1}{x}$ ,  $y = a \cdot \log(x)$ ,  $y = a \cdot \sqrt{x}$ ,  $y = a \cdot x^n$ ,  $y = a \cdot b^x$

c. Geef bij elk van deze formules aan 'wat' je langs de assen moet zetten om als grafiek een rechte lijn te krijgen.

d. Er is een gat in een olietanker gekomen en er loopt olie uit de tanker. Zo ontstaat een cirkelvormige olievlek met straal R. Gedurende een aantal dagen wordt de straal van de olievlek bepaald.

| Tijd in dagen                         | 0 | 5   | 10  | 15  | 20  | 25  | 30  |
|---------------------------------------|---|-----|-----|-----|-----|-----|-----|
| R = Straal van cirkelvormige olievlek | 0 | 2,8 | 4,0 | 4,9 | 5,6 | 6,3 | 6,9 |

We vermoeden een wortelverband ( $R = a \cdot \sqrt{t}$ ). Om te controleren of deze formule kan passen, zetten we verticaal de straal R en horizontaal  $\sqrt{t}$  uit.

Toon aan dat deze formule redelijk bij deze meetwaarden past en bepaal a.

### T1 Opgave 76

Bij de functies  $y = a \cdot x^n$  en  $y = a \cdot b^x$  wordt ook vaak de logaritme gebruikt.

Leg uit dat er lineaire verbanden ontstaan als je links en rechts de logaritme neemt. Bij  $y = a \cdot x^n$  geeft dit dan  $\log(y) = \log(a \cdot x^n)$ ; dit kan verder uitgewerkt worden tot een lineair verband tussen  $\log(y)$  en  $\log(x)$ . Toon dat aan. Gebruik eventueel eerst een getallenvoorbeeld.

Bij  $y = a \cdot b^x$  krijgen we  $\log(y) = \log(a \cdot b^x)$ , dat uitgewerkt kan worden tot een lineair verband tussen  $\log(y)$  en  $x$ .

Toon dit aan.

### T1 Opgave 77

Bij scheikundige evenwichtsberekeningen wordt gebruik gemaakt van de evenwichtsconstante van de reactie, een constante die past bij de vergelijking en die in de literatuur gegeven is. De evenwichtsconstante kan daarbij ook berekend worden uit de reactievergelijking.

We bekijken het oplossen van azijnzuur waarbij de stoffen ethanoaat en hydronium ontstaan. De concentratie azijnzuur is in de evenwichtssituatie gelijk aan  $0,24 \cdot x$ , terwijl de concentraties ethanoaat en hydronium beide gelijk zijn aan  $x$ . De evenwichtsconstante  $K$  is volgens de literatuur gelijk aan  $1,4 \cdot 10^{-5}$  en kan berekend worden met de formule

$$K = \frac{\text{conc}[\text{ethanoaat}] \cdot \text{conc}[\text{hydronium}]}{\text{conc}[\text{azijnzuur}]} \quad (\text{conc staat voor concentratie}).$$

Bereken de concentratie hydronium in de evenwichtssituatie.

## T1 Opgave 78 rijen

De formule  $G_t = \left(1 - \frac{p}{100}\right) G_{t-1} + 400 - 4p$  geeft het verband tussen de totale voorraad van een wijnkelder in jaar  $t$ , uitgedrukt in het jaar daarvoor. In deze formule is  $G_t$  de voorraad wijn en  $p$  het percentage dat jaarlijks verkocht wordt. Neem aan dat  $G_0 = 0$

- a. Toon aan dat als  $p=20$  dat dan  $G_t$  dan op den duur gelijk wordt 1600, d.w.z. bij  $p=20$  is de grenswaarde is 1600.

De grenswaarde kan gecontroleerd worden door in de formule  $G_t = \left(1 - \frac{p}{100}\right) G_{t-1} + 400 - 4p$  de grenswaarde in te vullen.

Bij andere waarden van  $p$  is er een andere grenswaarde. Deze kan berekend worden met de formule:  $\text{grenswaarde} = \frac{40000}{p} - 400$ .

- b. Toon aan dat deze grenswaarde klopt.

## T2 Opgave 79 rijen

De afsluiting van de Grevelingen had voor de visstand grote gevolgen. Om die gevolgen in kaart te brengen werden wiskundige modellen ontwikkeld. Onder andere voor de ontwikkeling van een vissenpopulatie. Om een model te kunnen opstellen werden deze aannames gedaan:

- jaarlijks komen er 5 miljoen larven het Grevelingenmeer binnen;
- jaarlijks komen 200.000 volwassen vissen (één jaar of ouder) het Grevelingenmeer binnen;
- 90% van die larven sterven als jonge vissen (dus voordat ze 1 jaar zijn);
- 33% van de volwassen vissen sterven jaarlijks.

$V_n$  is het aantal volwassen vissen in jaar  $n$ ; neem aan dat  $V_0 = 1,5$  miljoen.

Onderzoek hoe deze vissenpopulatie (zowel de volwassen populatie als de larven populatie) zich zou ontwikkelen de jaren na de afsluiting.

## T2 Opgave 80

De wet van Benford zegt iets over het percentage getallen  $F$  dat begint met begincijfer  $n$ :  $F = 100 \cdot \log\left(\frac{n+1}{n}\right)$

Toon aan dat  $T(1) + T(2) + T(3) + \dots + T(9)$  gelijk is aan 100.

### T1 Opgave 81 ongelijkheden

Voor welke waarde(n) van  $x$  geldt:

- $2(-2x + 60) < 6\sqrt{x} - 4$
- $30 - x^2 > 6 - (x - 20)$

### T1 Opgave 82 ongelijkheden

Geef in een rooster aan voor welke combinaties van  $(x,y)$  geldt ze voldoen aan alle eisen:  
 $8x + 5y \leq 800$  en  $4x + y \leq 240$  en  $y \geq 40$

### T2 Opgave 83 onderzoeksopdracht

In 2016 telde Nederland ongeveer 8,1 miljoen personenauto's. De meeste personenauto's rijden op benzine of diesel. Het aantal personenauto's dat op lpg (gas) rijdt, neemt de laatste jaren af. Elektrische en hybride personenauto's<sup>1)</sup> nemen juist toe in aantal. Hun gezamenlijk aandeel was in 2016 met ongeveer 2,6% nog betrekkelijk klein. Uit het rapport 'Maak elektrisch rijden groot: acht acties voor doorbraak bij particulieren' kan worden afgeleid dat er een ambitie bestaat om het gezamenlijk aandeel elektrische en hybride personenauto's in 2020 op ten minste 5,2% te krijgen. Om de ontwikkelingen in kaart te brengen, is onderstaande tabel beschikbaar. Hierin staat informatie over het aantal personenauto's in Nederland.

#### aantal personenauto's ( $\times 1000$ )

| type                              | 2012 | 2016 |
|-----------------------------------|------|------|
| benzine of diesel                 | 7482 | 7725 |
| lpg (gas)                         | 203  | 165  |
| elektrisch en hybride gezamenlijk | 70   | 211  |
| totaal                            | 7755 | 8101 |

We nemen aan dat in de periode 2012-2016 gold:

- het aantal personenauto's dat op benzine of diesel reed, nam jaarlijks met hetzelfde aantal toe;
- het aantal personenauto's dat op lpg (gas) reed, nam jaarlijks met hetzelfde aantal af;
- het gezamenlijk aantal elektrische en hybride personenauto's nam jaarlijks met hetzelfde percentage toe.

Het is de vraag of de hierboven genoemde ambitie gehaald wordt als de groei bij elk van de drie bovenstaande punten zich na 2016 op dezelfde wijze blijft voortzetten.

Onderzoek, gebruikmakend van bovenstaande gegevens en aannames, of het gezamenlijk aandeel elektrische en hybride personenauto's in 2020 ten minste 5,2% zal zijn.

### T2 Opgave 84 onderzoeksopdracht

Tegenwoordig wordt in sommige huishoudens de milieubewuste keuze gemaakt om zelf stroom op te wekken met een eigen windmolen. Dit is mogelijk door met meerdere huishoudens een windmolen te kopen. Daarbij wordt de windmolen opgedeeld in 10 000 delen, wind-delen

genoemd. Een huishouden dat meedoet, koopt een of meer wind-delen. Eén wind-deel kost € 351. Daarvoor krijg je dan 16 jaar lang jaarlijks 500 kWh (kilowattuur) stroom. De molen moet ook onderhouden worden: daarom moet je voor elk wind-deel dat je koopt € 17 per jaar aan onderhoudskosten betalen.

Meneer Kruizinga weet uit ervaring dat zijn gezin ongeveer 4000 kWh per jaar gebruikt. Hij overweegt wind-delen te kopen, maar hij maakt eerst een berekening van de kosten, waarbij hij uitgaat van een jaarlijks gebruik van 4000 kWh. Daartoe weegt hij onderstaande mogelijkheden tegen elkaar af.

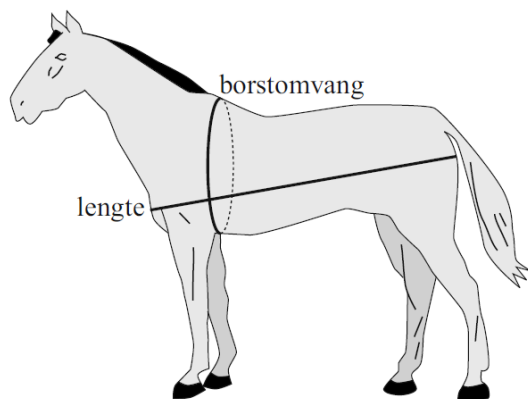
Mogelijkheid 1 Hij koopt 8 wind-delen, zodat hij 16 jaar lang jaarlijks 4000 kWh stroom krijgt. Hij moet wel belasting betalen over deze stroom, namelijk € 0,07 per kWh.

Mogelijkheid 2 Hij koopt geen wind-delen. Hij blijft de komende 16 jaar alle stroom bij zijn huidige energiemaatschappij kopen voor € 0,22 per kWh. Belasting is bij dit bedrag inbegrepen. Het totale bedrag dat hij uitspaart door geen wind-delen te kopen en geen onderhoudskosten te betalen, zet hij direct aan het begin van de periode van 16 jaar op een spaarrekening met een rente van 3,0% per jaar.

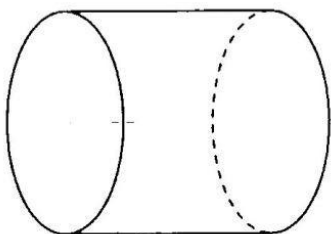
Onderzoek welke mogelijkheid voor meneer Kruizinga het voordeligst is.

## T2 Opgave 85 een model

Voor het verzorgen van paarden is het belangrijk het gewicht te weten. Met behulp van borstomvang en lengte (zie figuur) kan het gewicht geschat worden.



Er zijn ook formules om het gewicht van een paard te schatten op basis van de lengte en borstomvang, zoals  $G = \frac{B^2 \cdot L}{11900}$ , waarbij B de borstomvang in cm, L de lengte in cm en G het gewicht in kg. De formule voor G lijkt te maken te hebben met de inhoud van een cilinder.



Stel dat we het paard benaderen met een echte cilinder met de 'grondcirkel' die omtrek B heeft en met hoogte L. De omtrek van een cirkel kun je berekenen met de formule:  $Omtrek = 2\pi R$ , waarbij R de straal in cm.

Toon aan dat dan de inhoud van de cilinder van de vorm  $Inhoud = c \cdot B^2 \cdot L$

## T2 Opgave 86 een model maken

Peter woont aan de voet van de afsluitdijk en rijdt op zijn racefiets regelmatig naar de andere kant van de dijk en terug. De afsluitdijk is 32 km lang. Als het windstil is rijdt hij met een snelheid van 25 km/u. Bij zuidwesterwind heeft hij heen wind mee en terug wind tegen. Afhankelijk van de windkracht rijdt hij op de heen weg  $v$  km/u harder en terug  $v$  km/u minder hard. Ook als er wind staat wil hij net zo lang fietsen als dat hij bij windstil weer fietst; hij zal dan niet helemaal de overkant van de dijk halen en eerder aan de terugweg beginnen.

Onderzoek wanneer (na hoeveel km) hij aan de terugweg moet beginnen als hij ten gevolge van de wind op de heen weg  $v$  km/u sneller rijdt.

## T2 Opgave 87 een model maken

Een fabrikant van wil een nieuwe fabriekshal laten bouwen met een vloeroppervlakte van 2400 m<sup>2</sup>. Bij de aanvraag moet hij rekening houden met aan aantal eisen vanuit de gemeente:

- De vloer van de fabriekshal moet rechthoekig zijn, evenals het perceel waarop de fabriekshal op komt moet rechthoekig zijn
- Voor groenstroken en parkeerruimte moet aan beide zijden van de fabriekshal en aan de achterkant van de fabriekshal stroken van 10 m breed, aan de voorkant zelfs een strook van 20 m breed komen.

Vanwege de kosten wil de fabrikant een zo klein mogelijk stuk grond te kopen dat aan deze eisen voldoet.

Onderzoek de afmetingen van het terrein dat hij wil aankopen.

## T2 Opgave 88 een model maken

Er wordt een nieuwe weg aangelegd waarbij ook straatlantaarns aan een kant van de weg komen. Bij het ontwerp van de straatverlichting gaat men uit van de volgende gegevens:

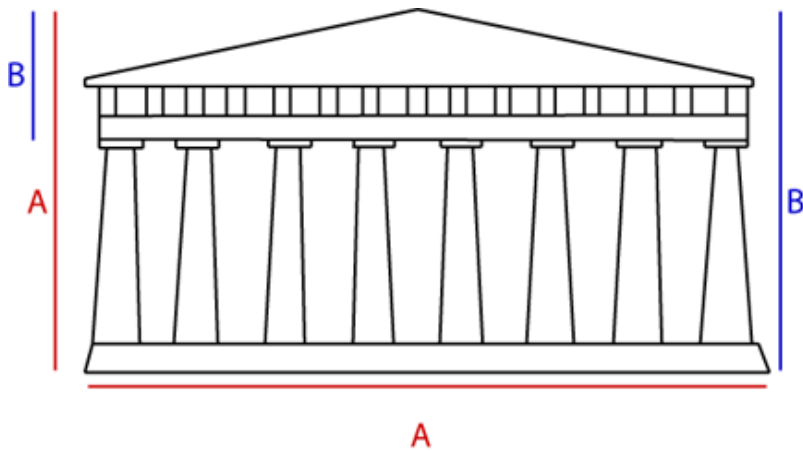
De lichtsterkte  $S$  (in Watt/m<sup>2</sup>) op een bepaalde plaats  $A$  is recht evenredig met het vermogen van de lichtbron, die per lamp 1500 Watt is. Daarnaast is de lichtsterkte omgekeerd evenredig met het kwadraat van de afstand (in m) tot de lichtbron:  $S_A = \frac{P}{LA^2}$ , waarbij  $LA$  de afstand van lichtbron tot plaats  $A$ . Alle straatlantaarns krijgen een hetzelfde vermogen, zijn 5 m hoog, en liggen op een vaste afstand van elkaar. Wettelijk is vastgelegd dat de lichtsterkte op elk punt van een weg moet liggen tussen 10 en 320 Watt/m<sup>2</sup>.



Onderzoek op welke afstand de straatlantaarns van elkaar komen te staan als men met zo min mogelijk straatlantaarns wil werken.

## T2 Opgave 89 de Gulden Snede

In de tekening van dit gebouw (Pantheon) zie je twee keer de Gulden Snede terug: de verhouding A : B is gelijk aan de Gulden Snede, dat wil zeggen, ongeveer gelijk aan 1,618.



- a) Meet de waarde voor A en B links in de figuur en controleer dit. Doe dat ook voor de waarde van A onder en B rechts in de figuur.

Hieronder wordt uitgelegd hoe je aan de Gulden Snede kunt komen. Een lijnstuk is volgens de Gulden Snede verdeeld als de verhouding van totale lengte staat tot het grootste deel gelijk is aan de verhouding van het grootste deel staat tot het kleinste deel.

In de figuur hieronder is een lijnstuk verdeeld volgens de Gulden Snede maar je ziet niet direct  $\phi = 1,618..$  terug. De totale lengte is in de figuur  $1+x$ . Voor de Gulden Snede zou nu moeten gelden:

$$\frac{1+x}{x} = \frac{x}{1}$$



Bereken de oplossing x. Gebruik de abc-formule om een exact antwoord te krijgen.

$$ax^2 + bx + c = 0 \Rightarrow x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

## §8 Formatieve opdrachten

Formatieve toets (90 min)

Opgave

Voor irrigatie van bouwgronden worden goten gebruikt. Die goten worden gemaakt door een zinken plaat van 50 cm breed en 2,5 m lang in een bepaalde vorm te buigen. De dwarsdoorsnede kan een rechthoek zijn of een halve cirkel. De lengte van elk gootstuk is 2,5 m, de breedte wordt gebogen.

**5p 1** Welke vorm en afmetingen krijgt een goot die zoveel mogelijk water kan bevatten?

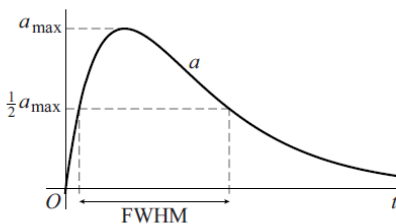
Opgave

Een patiënt krijgt een injectie met een dergelijk medicijn. De hoeveelheid medicijn in actieve vorm, in milligram, die  $t$  uur na inspuiten in het lichaam zit, noemen we  $a$ . Er geldt:  $a = 25(e^{-0,1t} - e^{-0,4t})$ .

**5p 2** Beredeneer dat voor  $a(t)$  geldt dat

- $a(t)$  is positief (voor  $t = 0$  en groter)
- $a(0) = 0$
- Op den duur nadert  $a(t)$  naar 0.

Een maat om de tijdsduur dat een medicijn werkzaam is, is de Full Width at Half Maximum (FWHM). Deze geeft aan hoelang de hoeveelheid medicijn minstens 50% is van de maximale hoeveelheid medicijn.



**5p 3** Bereken de FWHM in uren nauwkeurig.

Opgave

De omvang van de wereldbevolking kan benaderd worden met de formule

$B_n = B_{n-1} + 0,3B_{n-1}(1 - \frac{B_{n-1}}{10,9})$ , hierin is  $B_n$  de omvang van de wereldbevolking in miljarden.

$B_0 = 6,1$  in 2000

Volgens de formule stijgt de wereldbevolking en zal op den duur deze stabiliseren op 10,9 miljard.

**5p 4** Beredeneer aan de hand van de formule dat de wereldbevolking na 2000 stijgt; toon bovendien aan dat 10,9 een grenswaarde is.

Opgave

$W$  is de winst en is afhankelijk van het aantal producten  $n$  dat per keer besteld worden bij de groothandel:

$$W = 45000 - 100n + \frac{178000}{n}$$

**3p 5** Beredeneer aan de hand van de formule dat  $W$  afneemt als  $n$  groter wordt.

**4p 6** Toon dit ook aan met behulp van de afgeleide.

## Opgave

Gegeven de snelheidsformule  $v = \frac{m \cdot g}{c} + A \cdot e^{-\frac{ct}{m}}$ , waarbij  $v$  de snelheid in m/s,  $t$  de tijd in sec,  $m$  de massa in kg en de andere letters positieve constanten zijn.

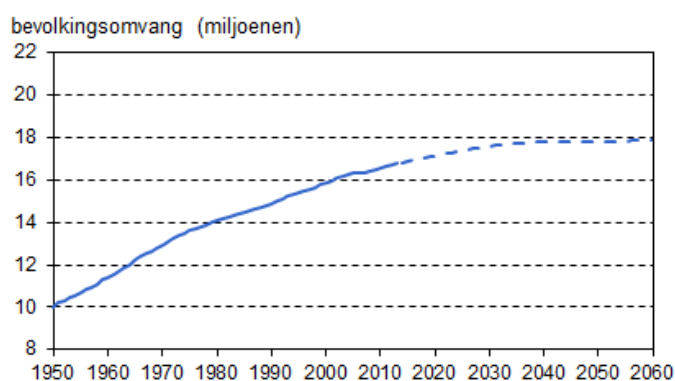
4p 7 Beredeneer aan de hand van de formule of

- $v$  afneemt als  $t$  toeneemt
- $v$  toeneemt als  $m$  toeneemt

## Opgave

De Nederlandse bevolking zal de komende jaren stijgen, aldus een artikel in de Volkskrant van december 2015. Binnen zes maanden zal de grens van 17 miljoen gepasseerd worden. Volgens voorspellingen van het CBS zal de groei van de Nederlandse bevolking in de komende jaren aanhouden, maar wel steeds wat langzamer. Op den duur zal de Nederlandse bevolking rond de 18,2 miljoen blijven hangen.

| jaartal | Omvang Nederlandse bevolking<br>(in miljoen) |
|---------|----------------------------------------------|
| 2000    | 15,86                                        |
| 2010    | 16,57                                        |
| 2020    | 17,34                                        |
| 2030    | 17,84                                        |
| 2040    | 18,11                                        |
| 2050    | 18,14                                        |
| 2060    | 18,18                                        |



De bevolkingsomvang kan redelijk beschreven worden met de formule  $y = c - a \cdot b^t$ , waarbij  $t = 0$  overeenkomt met 2000 en de groeifactor  $b$  tussen 0 en 1 ligt.

5p 8 Bepaal eerst de waarde voor  $c$ , en dan die voor  $a$  en  $b$ . Gebruik de gegevens van de jaren 2000 en 2050.

In de rest van deze opgave bekijken we modellen van de vorm  $y = c - a \cdot b^t$  uitgebreider.

3p 9 Beredeneer aan de hand van de formule dat, als  $a$  en  $c$  positieve getallen zijn en  $b$  tussen 0 en 1 ligt, de grafiek altijd zal stijgen en zal naderen naar een grenswaarde.

### Opgave

De derde wet van Kepler geeft het verband tussen de omlooptijd van een planeet om de zon (in s), de afstand  $r$  tot de zon (in m), de massa van de zon  $M$ , de gravitatieconstante  $G$ . Er geldt

$$T^2 = \frac{4\pi^2 \cdot r^3}{G \cdot M}$$

**3p 10** Maak een globale schets van het verband tussen  $T$  en  $r$  ( $T$  verticaal en  $r$  horizontaal). Men wil een grafiek maken van  $\log(T)$  tegen  $\log(r)$ .

**3p 11** Toon aan dat uit de formule volgt dat de grafiek dan een rechte lijn wordt.

### Opgave

De jaarlijkse consumptie aan koper in de wereld kan benaderd worden met de formule  $C = 150 \cdot 1,058^t$ , waarbij  $t$  de tijd in jaren en  $C$  in miljoenen tonnen. De totale voorraad op  $t=0$  is gelijk aan 460 miljoen ton. Maar ieder jaar worden er nieuwe voorraden koper gevonden: we nemen aan 20 miljoen ton.

**3p 12** Bereken in welk jaar de totale voorraad koper 'op' is.

De formule van  $C$  zou ook in een andere vorm gegeven kunnen worden, namelijk  $C = e^{a \cdot t + b}$  of als  $t = \dots$ .

**4p 13** Herschrijf de formule van  $C$  in beide vormen.

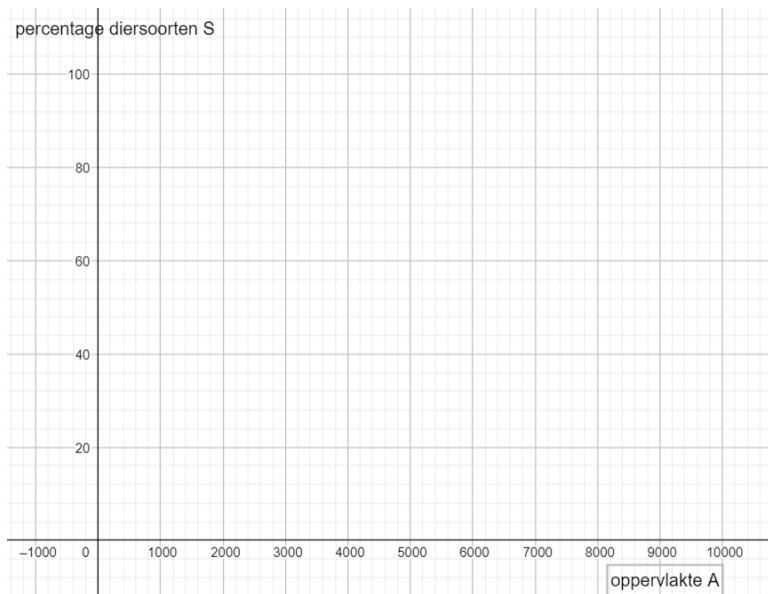
### Opgave

Het aantal diersoorten in een natuurgebied neemt af als de mens het gebied kleiner maakt. We gaan uit van een natuurgebied van  $10000 \text{ km}^2$  en stellen het aantal diersoorten in dit gebied op 100%.

Het verband tussen het percentage diersoorten  $S$  en de oppervlakte  $A$  wordt gegeven door de formule:  $S = 100 \cdot \left(\frac{A}{10000}\right)^z$ , hierbij geldt dat  $S$  het percentage diersoorten,  $z$  een constante die bij een bepaald type natuurgebied hoort,  $A$  de oppervlakte van het resterende natuurgebied in  $\text{km}^2$ .

Voor natuurgebieden op eilanden geldt dat  $z$  ongeveer 0,35 is, voor natuurgebieden op het vaste land geldt dat  $z$  ongeveer 0,15 is.

**4p 14** Beredeneer wanneer beide formules dezelfde uitkomst geven en schets voor beide formules de grafiek in onderstaande figuur.



De formules kunnen herschreven worden in de vorm:  $S = 10 \sqrt{A}$

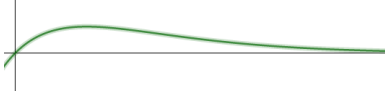
**4p 15** Doe dit voor de eiland-formule.

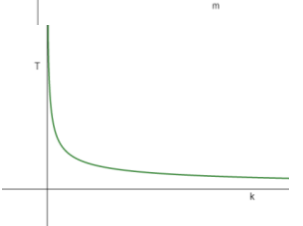
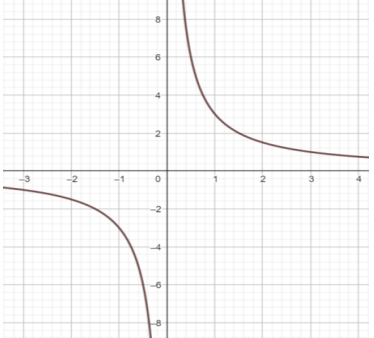
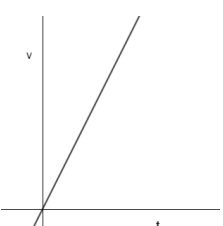
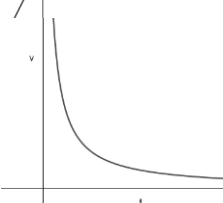
**3p 16** Maak een formule voor de inverse van  $S$ , dus druk  $A$  uit in  $S$ .

## Opgave F2

Knip eventueel alle kaarten uit; werk in twee of drietallen (maar alleen kan natuurlijk ook)

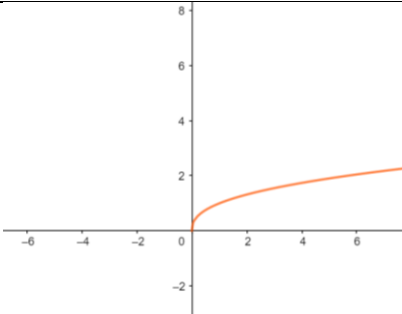
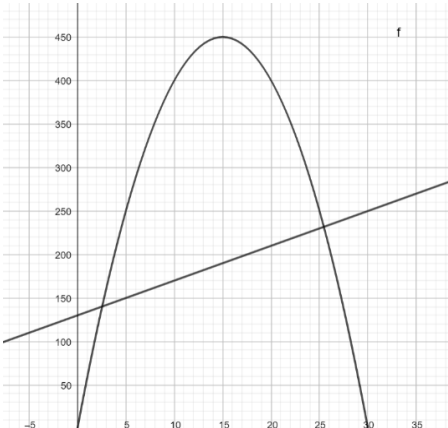
Beredeneer zonder GR; vaak zijn er meerdere goede antwoorden mogelijk.

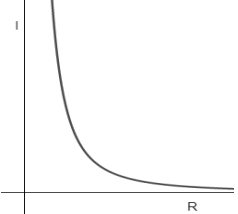
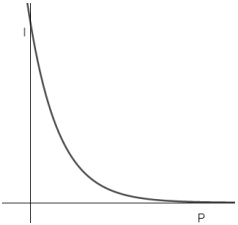
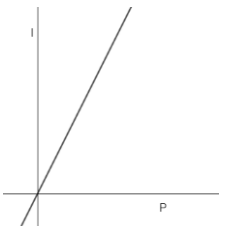
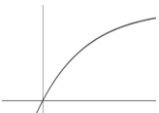
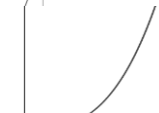
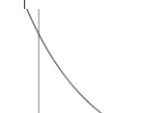
|                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                           |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                   |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                            |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <p>Om een voorwerp op een afstand <math>a</math> van het oog scherp te kunnen zien is een bepaalde sterkte <math>S</math> van het oog nodig. Voor <math>S</math> (in dioptrieën) gebruiken we het model: <math>S = \frac{a+b}{a \cdot b}</math>, waarbij <math>b</math> is de afstand in meters tussen het netvlies en de ooglenzen</p> <p>De formule is te herschrijven tot:</p> <p>A. <math>S = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}</math><br/>         B. <math>S = \frac{b}{ab} + \frac{a}{ab}</math><br/>         C. <math>S = a + \frac{a}{b}</math><br/>         D. <math>S = \frac{1}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}}</math></p> | <p>De grafiek van <math>y = (x - 3)^2 - (x - 7)(x - 4)</math> is</p> <p>A. Een parabool<br/>         B. Een rechte lijn<br/>         C. Geen van beide</p>                                                                                                                                                                                                                        | <p><math>A = b(1 - e^{-c \cdot t})</math> met constanten <math>b, c &gt; 0</math></p> <p>Er geldt:</p> <p>A. Als <math>t</math> heel groot dan is <math>A</math> ongeveer gelijk aan <math>b</math><br/>         B. Als <math>t</math> toeneemt dan neemt <math>A</math> toe<br/>         C. Als <math>t=0</math> dan <math>A=0</math></p> |
| <p><math>N = 100 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{5}}</math></p> <p>Er geldt:</p> <p>A. <math>N = 100 \cdot 2^{-0,2t}</math><br/>         B. <math>N</math> is stijgende exponentiele functie<br/>         C. <math>N</math> is dalende exponentiele functie<br/>         D. <math>N</math> is geen exponentiele functie</p>                                                                                                                                                                                                                                                                                      | <p><math>H(s) = K\left(\frac{1}{T \cdot s} + R \cdot s\right)</math>, waarbij <math>K</math>, <math>T</math> en <math>R</math> positieve constanten</p> <p>Er geldt:</p> <p>A. Grafiek van <math>H</math> heeft een maximum<br/>         B. Grafiek van <math>H</math> heeft een minimum<br/>         C. Grafiek van <math>H</math> is stijgend<br/>         D. Geen van alle</p> | <p><math>B(p) = B_0\left(1 - \frac{p}{100}\right)</math></p> <p>Er geldt:</p> <p>A. Grafiek van <math>B</math> daalt<br/>         B. Grafiek van <math>B</math> stijgt<br/>         C. Grafiek van <math>B</math> is rechte lijn<br/>         D. Geen van alle</p>                                                                         |
| <p>Grafiek:</p>  <p>Welke formules zouden kunnen passen?</p> <p>A. <math>y = \frac{10x}{x^2+100}</math><br/>         B. <math>y = \frac{10}{x^2+10}</math><br/>         C. <math>y = x \cdot 2^{-x}</math><br/>         D. <math>y = \frac{200}{2+8 \cdot 0,9^x}</math></p>                                                                                                                                                                                                                                                            | <p><math>\frac{1}{2}(8 - x^2)^{-0,5} \cdot -2x</math></p> <p>Is gelijk aan</p> <p>A. <math>\frac{-x}{\sqrt{8-x^2}}</math><br/>         B. <math>\frac{-2x}{2\sqrt{8-x^2}}</math><br/>         C. <math>(-4x + x^3)^{-0,5}</math><br/>         D. <math>\sqrt{8x - x^3}</math><br/>         E. Geen van alle</p>                                                                   | <p>De vergelijking <math>e^{-x} = 0,5x + 4</math></p> <p>Heeft</p> <p>A. Twee oplossingen<br/>         B. 1 oplossing<br/>         C. Geen oplossingen</p>                                                                                                                                                                                 |

|                                                                                                                                                                                                                                                                                                              |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                       |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                       |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| $v(t) = \frac{mg}{c} + A \cdot e^{-\frac{ct}{m}}$ <p>Waarbij m,g,c,A positieve constanten</p> <p>Er geldt:</p> <p>A. Als t heel groot dan v ongeveer <math>\frac{mg}{c}</math></p> <p>B. Grafiek van v daalt</p> <p>C. Grafiek van v heeft minimum</p> <p>D. Grafiek van v heeft maximum</p>                 | $G = \frac{4A^{0,7}}{A}, \text{ met } A > 0$ <p>Er geldt</p> <p>A. Grafiek van G is afnemend stijgend</p> <p>B. Grafiek van G is toenemend stijgend</p> <p>C. Grafiek van G is afnemend dalend</p> <p>D. Grafiek van G is toenemend dalend</p>                                                                                                        | $P = \frac{4A^{0,3}}{6A^2}, \text{ met } A > 0$ <p>Er geldt</p> <p>A. <math>P = \frac{2}{3}A^{-1,7}</math></p> <p>B. <math>P = -2A^{-1,7}</math></p> <p>C. <math>P = \frac{2}{3}A^{-1,7}</math></p> <p>D. <math>P = 4A^{0,3} \cdot 6A^{-2}</math></p>                                                                 |
| $T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}}$ <p>Wat hoort bij deze formule?</p> <p>A. <math>t = 2\pi m^{0,5} k^{-0,5}</math></p> <p>B.</p>  <p>C.</p>  | $y = 2x\sqrt{8 - x^2}$ <p>Er geldt: y heeft</p> <p>A. 3 nulpunten</p> <p>B. 2 nulpunten</p> <p>C. 1 nulpunt</p> <p>D. Twee toppen</p> <p>E. 1 top</p>                                                                                                                                                                                                 | $\log(A) = c \cdot t + b$ <p>Deze formule is om te schrijven naar</p> <p>A. <math>A = 10^{c \cdot t + b}</math></p> <p>B. <math>A = A_0 \cdot g^t</math></p> <p>C. <math>A = A_0 \cdot t^d</math></p> <p>D. <math>A = A_0 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{f}}</math></p>                                     |
| $y = \frac{x^3 + 4}{x}$ <p>Grafiek van y heeft</p> <p>A. 2 asymptoten</p> <p>B. 1 asymptoot</p> <p>C. Geen asymptoot</p>                                                                                                                                                                                     |  <p>De best passende formule bij deze grafiek is van de vorm:</p> <p>A. <math>y = a \cdot x</math></p> <p>B. <math>y = \frac{a}{x}</math></p> <p>C. <math>y = a \cdot b^x</math></p> <p>D. <math>y = \frac{x}{a}</math></p> <p>E. <math>y = a \cdot x^b</math></p> | <p>Gegeven is <math>v = \frac{s}{t}</math></p> <p>De grafiek die bij dit verband past is</p>  <p>A.</p>  <p>B.</p> <p>C. Geen van beide</p> |

|                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                     |                                                                                                                                                                                                                                                                                                             |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                   |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <p>Gegeven <math>e^{-0,4t} - e^{-0,8t}</math></p> <p>A. is gelijk aan <math>e^{-1,2t}</math></p> <p>B. is dalend</p> <p>C. wordt op den duur 0</p>                                                                                                                                                                                  | <p>Gegeven</p> <p><math>f(x) = m(x - b)^2 + c</math>, met <math>b, c &gt; 0</math></p> <p>De grafiek</p> <p>A. is berg parabool</p> <p>B. heeft geen nulpunten</p> <p>C. heeft als top (b,c)</p>                                                                                                            | <p>Gegeven <math>L = \frac{x^2}{0,1-x}</math></p> <p>Er geldt</p> <p>A. In buurt van <math>x=0,1</math> is L heel groot</p> <p>B. Bij <math>x=0</math> is <math>L=0</math></p> <p>C. L kan niet negatief worden</p>                                                                                                                                                                               |
| <p>Gegeven <math>A = 2\sqrt[5]{R^3}</math></p> <p>De formule kan ook geschreven worden als:</p> <p>A. <math>A = 2R^{0,6}</math></p> <p>B. <math>(0,5A)^{\frac{5}{3}} = R</math></p> <p>C. <math>0,5R^{\frac{5}{3}} = A</math></p> <p>D. <math>A = \frac{2R}{\sqrt[5]{R^2}}</math></p>                                               | <p>Gegeven <math>y = \frac{at}{t+10}</math> met <math>a, t \geq 0</math></p> <p>De volgende uitspraken zijn correct:</p> <p>A. <math>y = a - \frac{10a}{t+10}</math></p> <p>B. y stijgt</p> <p>C. y heeft een grenswaarde</p> <p>D. <math>y = a \cdot \frac{t}{t+10}</math></p>                             | <p>Gegeven is <math>y = \frac{12}{x}</math></p> <p>De volgende formules zijn gelijkwaardig:</p> <p>A. <math>y = 12x^{-1}</math></p> <p>B. <math>y = x^{-12}</math></p> <p>C. <math>xy = 12</math></p> <p>D. <math>y = (6\sqrt{x})^{-2}</math></p>                                                                                                                                                 |
| <p>Gegeven zijn de formules</p> <p><math>A1 = \frac{660}{1+0,9^t}</math> en</p> <p><math>A2 = 660(1 - 0,9^t)</math></p> <p>Wat is correct:</p> <p>A. Beide formules hebben dezelfde grenswaarde als t heel groot is.</p> <p>B. Beide formules zijn gelijk bij <math>t=0</math></p> <p>C. Beide formules stijgen als t toeneemt.</p> | <p>Gegeven is <math>V = 3s^{1,5}h^{-1,5}</math></p> <p>De volgende uitspraken zijn correct:</p> <p>A. Als s toeneemt dan neemt V toe</p> <p>B. Als h toeneemt dan neemt V toe</p> <p>C. <math>V = 3 \cdot \left(\frac{s}{h}\right)^{1,5}</math></p> <p>D. <math>V = \frac{3s\sqrt{s}}{h\sqrt{h}}</math></p> | <p>Gegeven zijn de formules</p> <p><math>y1 = a \cdot x^{0,7}</math> en <math>y2 = a \cdot 0,7^x</math></p> <p>met <math>x \geq 0</math> en a positief</p> <p>De volgende uitspraken zijn correct:</p> <p>A. Bij <math>x=1</math> zijn de y-waarden gelijk</p> <p>B. Op den duur heeft y2 grotere uitkomsten dan y1</p> <p>C. Beide grafieken zijn toenemend stijgend</p> <p>D. Geen van alle</p> |

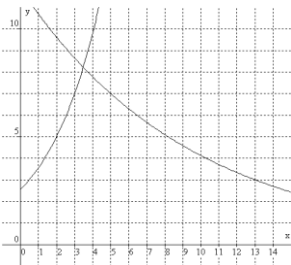
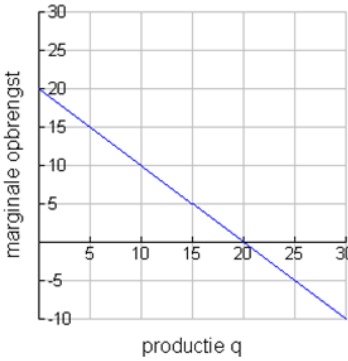
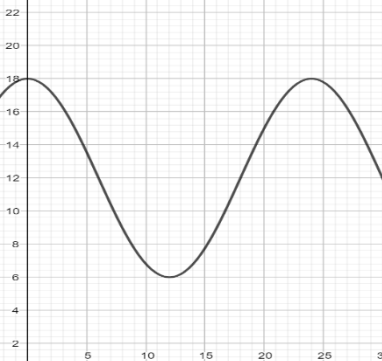
|                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                    |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                              |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                        |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <p>Gegeven <math>\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = R</math></p> <p>De volgende formules zijn gelijkwaardig</p> <p>A. <math>R = \frac{pq}{p+q}</math></p> <p>B. <math>R = \frac{p+q}{pq}</math></p> <p>C. <math>\frac{1}{R} = \frac{pq}{p+q}</math></p> <p>D. <math>\frac{1}{R} = \frac{p+q}{pq}</math></p>                                                                                                                                                                                               | <p>Gegeven <math>R = \frac{1}{p} \cdot \frac{1}{q}</math></p> <p>De volgende formules zijn gelijkwaardig</p> <p>A. <math>\frac{1}{R} = p \cdot q</math></p> <p>B. <math>Rp = q</math></p> <p>C. <math>Rpq = 1</math></p> <p>D. <math>R = (p \cdot q)^{-1}</math></p> <p>E. <math>R = p \cdot q^{-1}</math></p>                                                                                                               | <p>Gegeven zijn</p> $(p+q)^2 = p^2 + 2pq + q^2$ <p>en <math>p+q = 1</math> en <math>p</math> en <math>q</math> positief</p> <p>Nu geldt zeker:</p> <p>A. <math>p^2 + q^2 \leq 1</math></p> <p>B. <math>p^2 \geq q^2</math></p> <p>C. <math>p^2 + (1-p)^2 \leq 1</math></p> <p>D. <math>pq = 0,5 - 0,5p^2 - 0,5q^2</math></p>           |
| <p>Gegeven <math>S = 100 \cdot \left(\frac{P}{100}\right)^n</math>, met <math>n &gt; 1</math> en <math>P</math> tussen 0 en 100</p> <p>De volgende uitspraken zijn correct:</p> <p>A. Als <math>P</math> loopt van 0 tm 100 dan loopt ook <math>S</math> van 0 tm 100</p> <p>B. Als <math>n</math> groter is dan <math>S</math> groter bij vaste <math>P</math>.</p> <p>C. <math>P = \left(\frac{S}{100}\right)^{\frac{1}{n}}</math></p> <p>D. Als <math>P = 50</math> dan <math>S = 50</math></p> | <p>Gegeven <math>y_1 = x^{0,7}</math> en <math>y_2 = x</math> met <math>x &gt; 0</math></p> <p>De volgende uitspraken zijn correct:</p> <p>A. <math>y_1</math> altijd groter dan <math>y_2</math> (bij vaste <math>x</math>-waarden)</p> <p>B. <math>y_1</math> altijd groter dan <math>y_2</math> (bij vaste <math>x</math>-waarden)</p> <p>C. Geen van beide</p>                                                           | <p>Gegeven is</p> $R = 100(2^{-t} - 2^{-2t})$ <p>De volgende uitspraken zijn correct:</p> <p>A. <math>R = 100(0,5^t - 0,25^t)</math></p> <p>B. Als <math>t</math> toeneemt dan daalt <math>R</math></p> <p>C. Als <math>t</math> heel groot dan nadert <math>R</math> naar 0</p> <p>D. <math>R = 100 \cdot 2^{-2t}</math></p>          |
| <p>Gegeven is <math>P = -\log(x)</math></p> <p>Wat is correct:</p> <p>A. Als <math>0 &lt; x &lt; 1</math> dan is <math>P</math> positief</p> <p>B. <math>P</math> is altijd negatief</p> <p>C. <math>P = \log(x)^{-1}</math></p> <p>D. <math>P = \log\left(\frac{1}{x}\right)</math></p>                                                                                                                                                                                                           | <p>Gegeven is <math>E(Q) = a - b \log(Q)</math></p> <p>Waarbij <math>a</math> en <math>b</math> positieve constanten</p> <p>De volgende uitspraken zijn correct:</p> <p>A. Als <math>Q</math> toeneemt dan neemt <math>E</math> af</p> <p>B. Als <math>b</math> groter is dan <math>a</math> dan is <math>E</math> negatief</p> <p>C. <math>Q = 10^{\frac{a-E}{b}}</math></p> <p>D. <math>Q = \frac{a-10^{-E}}{b}</math></p> | <p>Gegeven is de formule</p> $K = \frac{200}{x} + 12\sqrt{x}$ <p>Welke van de volgende formules zijn gelijkwaardig</p> <p>A. <math>K = -200x^{-2} + 6x^{-0,5}</math></p> <p>B. <math>K = x^{-200} + 6x^{\frac{-1}{2}}</math></p> <p>C. <math>K = 200x^{-1} + 12x^{0,5}</math></p> <p>D. <math>K = \frac{200+12x\sqrt{x}}{x}</math></p> |

| <table><tr><th>Tijd <math>T</math><br/>In uren</th><th>Snelheid <math>V</math><br/>In km/u</th></tr><tr><td>2,0</td><td>30</td></tr><tr><td>2,5</td><td>24</td></tr><tr><td>3,0</td><td>20</td></tr><tr><td>4,0</td><td>15</td></tr><tr><td>5,0</td><td>12</td></tr></table> <p>Welke uitspraak is correct:</p> <p>A. <math>T</math> en <math>V</math> zijn recht evenredig</p> <p>B. <math>T</math> en <math>V</math> zijn omgekeerd evenredig</p> <p>C. Er is een lineair verband tussen <math>T</math> en <math>V</math></p> <p>D. Er is een exponentieel verband tussen <math>T</math> en <math>V</math></p> | Tijd $T$<br>In uren                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                              | Snelheid $V$<br>In km/u                                                                                                                                                                                                                                                                       | 2,0 | 30 | 2,5 | 24 | 3,0 | 20 | 4,0 | 15 | 5,0 | 12 |  <p>Bij deze grafiek past een formule van de vorm</p> <p>A. <math>y = a \cdot t</math></p> <p>B. <math>y = a \cdot t + b</math></p> <p>C. <math>y = a \cdot b^t</math></p> <p>D. <math>y = a \cdot \sqrt{t}</math></p> <p>E. <math>y = a \cdot t^b</math></p> | <p>Hier zie je de grafieken van de opbrengst <math>TO</math> en kosten <math>TK</math></p>  <p>Passend formules kunnen zijn:</p> <p>A. <math>TO = -3x^2 + 60x</math> en <math>TK = 4x + 130</math></p> <p>B. <math>TO = -2x^2 + 60x</math> en <math>TK = 4x + 130</math></p> <p>C. <math>TO = -2x^2 + 80x</math> en <math>TK = 4x - 130</math></p> <p>D. <math>TO = -3x^2 + 80x</math> en <math>TK = 4x - 130</math></p> |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|----|-----|----|-----|----|-----|----|-----|----|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Tijd $T$<br>In uren                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                              | Snelheid $V$<br>In km/u                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                          |                                                                                                                                                                                                                                                                                               |     |    |     |    |     |    |     |    |     |    |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                            |
| 2,0                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                              | 30                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                               |                                                                                                                                                                                                                                                                                               |     |    |     |    |     |    |     |    |     |    |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                            |
| 2,5                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                              | 24                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                               |                                                                                                                                                                                                                                                                                               |     |    |     |    |     |    |     |    |     |    |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                            |
| 3,0                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                              | 20                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                               |                                                                                                                                                                                                                                                                                               |     |    |     |    |     |    |     |    |     |    |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                            |
| 4,0                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                              | 15                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                               |                                                                                                                                                                                                                                                                                               |     |    |     |    |     |    |     |    |     |    |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                            |
| 5,0                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                              | 12                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                               |                                                                                                                                                                                                                                                                                               |     |    |     |    |     |    |     |    |     |    |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                            |
| <p><math>P = 100 - 100 \cdot 0,61^t</math></p> <p>Hierin is <math>P</math> het percentage apparaten dat na <math>t</math> jaar of eerder defect is geraakt.</p> <p>Welke uitspraken correct:</p> <p>A. Als <math>t</math> heel groot wordt, nadert <math>P</math> naar 100.</p> <p>B. Als <math>t=0</math> dan is <math>P=0</math></p> <p>C. Als <math>t</math> toeneemt dan neemt <math>P</math> ook toe</p> <p>D. <math>P = 100 \cdot 0,39^t</math></p>                                                                                                                                                        | <p>Gegeven <math>y = 3 \cdot e^{-0,8t}</math></p> <p>Is deze formule te schrijven in de vorm:</p> <p>A. <math>y = a \cdot t</math></p> <p>B. <math>y = a \cdot t + b</math></p> <p>C. <math>y = a \cdot b^t</math></p> <p>D. <math>y = a \cdot t^b</math></p>                                                                                                                                                                    | <p>De formule <math>E = 3,3G^{0,75}</math> kan worden omgeschreven naar ...</p> <p>Geef aan wat correct is:</p> <p>A. <math>E = p + q \cdot \log(G)</math></p> <p>B. <math>\log(E) = p + qG</math></p> <p>C. <math>E = p + qG</math></p> <p>D. <math>\log(E) = p + q \cdot \log(G)</math></p> |     |    |     |    |     |    |     |    |     |    |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                            |
| <p>Volgens een internationale norm mag men op het werk niet langer dan 8 uur blootgesteld worden aan geluid van 90 dB of meer. In harder geluid mag minder lang gewerkt worden: bij iedere 3 dB lawaaijstijging moet de werktijd gehalveerd worden. Het verband tussen de geluidssterkte <math>G</math> en de werktijd <math>W</math> is van de vorm:</p> <p>A. <math>W = a \cdot G</math></p> <p>B. <math>W = a \cdot G^b</math></p> <p>C. <math>G = a \cdot b^G</math></p> <p>D. <math>W = a \cdot \log(G)</math></p>                                                                                          | <p>De concentratie van een medicijn <math>C</math> kan na <math>t</math> minuten benaderd worden met de formules:</p> $C = \frac{240t}{t^2 + 40t + 240}$ $C = 0,13(e^{-0,2t} - e^{-4t})$ <p>Welke uitspraken zijn correct?</p> <p>A. Bij <math>t=0</math> zijn beide formules gelijk aan 0</p> <p>B. Op den duur zijn beide formules vrijwel 0</p> <p>C. Na <math>t=0</math> geven beide formules enkel positieve uitkomsten</p> | <p>Welke formules horen bij elkaar:</p> <p>A. <math>y = 2(x - 3) + 50</math></p> <p>B. <math>y = 68 - 2(12 - x)</math></p> <p>C. <math>y = \frac{88+2x}{2}</math></p> <p>D. <math>y = \frac{88}{2x+2}</math></p>                                                                              |     |    |     |    |     |    |     |    |     |    |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                            |

|                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                          |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                               |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                             |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <p>Welke formules horen bij elkaar:</p> <p>A. <math>b = \frac{600}{x}</math><br/>         B. <math>x \cdot b = 600</math><br/>         C. <math>x \cdot 2b = 600</math><br/>         D. <math>b = 600x^{-1}</math><br/>         E. <math>b = 600 \cdot \frac{1}{x}</math><br/>         F. <math>b = 1200/(2x)</math></p>                                                                                                                                                 | <p>Welke formules horen bij elkaar</p> <p>A. <math>y = 4^x</math>;<br/>         B. <math>y = 4 \cdot 2^{x-2}</math>;<br/>         C. <math>y = 4 \cdot 4^{x-2}</math>;<br/>         D. <math>y = 4 \cdot 2^x \cdot 2^{x-2}</math><br/>         E. <math>y = 4 \cdot (2^x)^2</math></p>                                                                                                        | <p>In de buurt van <math>x=0</math> zal de formule <math>y = -3x^2 + 80x + 700</math> het meest lijken op:<br/>         Geef aan wat correct is.</p> <p>A. <math>y = -3x^2</math><br/>         B. <math>y = 80x + 700</math><br/>         C. <math>y = -3x^2 + 700</math></p>                                                                                                                                                                                                                                                               |
| <p>Oppervlakte van een cilinder kan berekend worden met de formule: <math>Opp = 6,28Rh + 6,28R^2</math>, waarbij R de straal en h de hoogte.</p> <p>Als zowel R als h twee keer zo groot worden dan ....</p> <p>Wat is correct?</p> <p>A. wordt de oppervlakte 2 x zo groot<br/>         B. wordt de oppervlakte 4 x zo groot<br/>         C. wordt de oppervlakte tussen de 2 x zo groot en 4 x zo groot<br/>         D. wordt de oppervlakte meer dan 4 x zo groot</p> | <p>Gegeven <math>h = \frac{1}{25}v^2</math></p> <p>Welke van de formules zijn gelijkwaardig?</p> <p>A. <math>v^2 = 25h</math>;<br/>         B. <math>h \cdot v^2 = 25</math>;<br/>         C. <math>\frac{v^2}{h} = 25</math>;<br/>         D. <math>v = 5\sqrt{h}</math>;<br/>         E. <math>\frac{v}{\sqrt{h}} = 5</math></p>                                                            | <p>Verkeerslawaaai (L in dB) op een plaats hangt af van de snelheid (v in km/u) van het verkeer en de afstand tot een weg (a in meters). Stel dat geldt:<br/> <math>L = 105 - 2,1 \ln(a \cdot 100) - 0,03a</math></p> <p>Welke uitspraken zijn correct?</p> <p>A. Als a groter dan L kleiner<br/>         B. Als a groter dan L groter<br/>         C. Als a groter dan soms L kleiner, en soms groter<br/>         D. Dit model is voor grote waarden van a niet bruikbaar</p>                                                             |
| <p>Gegeven is</p> $m = 8b + \frac{5000}{b} \text{ met } b > 0$ <p>Welke van de uitspraken is correct?</p> <p>A. bij <math>b=0</math> heeft de grafiek van m een verticale asymptoot<br/>         B. m heeft zeker een minimum<br/>         C. m heeft zeker een maximum<br/>         D. voor een bepaalde waarde van b is m gelijk aan 0<br/>         E. op den duur (als b heel groot) dan is m ongeveer <math>\frac{5000}{b}</math></p>                                | <p><math>I = \frac{P}{4\pi R^2}</math>, met I, P, R positief</p> <p>Welke grafiek past hierbij?</p> <p>A. </p> <p>B. </p> <p>C. </p> | <p>Gegeven is de formule <math>V(t) = b(1 - 3^{-t})</math> waarbij b een positieve constante</p> <p>Welke grafiek past bij deze formule</p> <p>A. </p> <p>B. </p> <p>C. </p> <p>D. </p> |

### Opgave F3

Je ziet hier vele korte opgaven. Knip de kaartjes uit en leg de opdrachten die op elkaar lijken bij elkaar: ze vormen een categorie. Geef aan welke parate kennis en standaardopgaven bij iedere categorie kunnen horen.

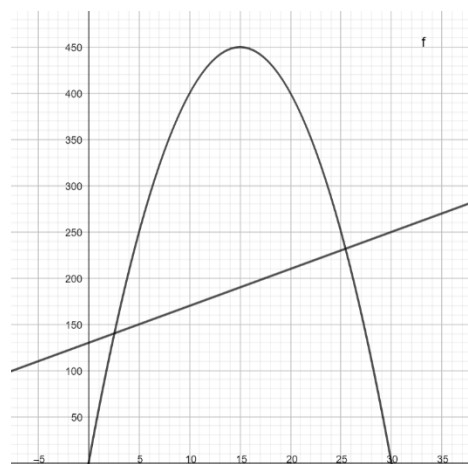
|                                                                                                                                                                                                                                                                                                                            |                                                                                                                                                                                                                                                                          |      |      |      |      |      |                     |      |      |      |      |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------|------|------|------|------|---------------------|------|------|------|------|
| <p>Gegeven <math>y = 3 \cdot e^{-0,8t}</math></p> <p>Is deze formule te schrijven in de vorm:</p> <p><math>y = a \cdot t</math>; <math>y = a \cdot t + b</math>; <math>y = a \cdot b^t</math>; <math>y = a \cdot t^b</math>?</p>                                                                                           | <table><tr><td>Jaar</td><td>2005</td><td>2010</td><td>2015</td><td>2020</td></tr><tr><td>Aantal woningen (W)</td><td>3120</td><td>3523</td><td>3926</td><td>4329</td></tr></table> <p>Maak op basis van deze tabel een voorspelling van het aantal woningen in 2035.</p> | Jaar | 2005 | 2010 | 2015 | 2020 | Aantal woningen (W) | 3120 | 3523 | 3926 | 4329 |
| Jaar                                                                                                                                                                                                                                                                                                                       | 2005                                                                                                                                                                                                                                                                     | 2010 | 2015 | 2020 |      |      |                     |      |      |      |      |
| Aantal woningen (W)                                                                                                                                                                                                                                                                                                        | 3120                                                                                                                                                                                                                                                                     | 3523 | 3926 | 4329 |      |      |                     |      |      |      |      |
| <p>Maak formule</p>                                                                                                                                                                                                                      |  <p>Maak schets van de totale opbrengst</p>                                                                                                                                           |      |      |      |      |      |                     |      |      |      |      |
| <p><math>P_1 = 100 \cdot (1 - 0,8^t)</math><br/><math>P_2 = 100 - (50t + 100) \cdot 0,61^t</math></p> <p>Hierin is P het percentage apparaten dat na t jaar of eerder defect is geraakt.</p> <p>Toon aan:</p> <p>eis1: als t groter wordt, moet P toenemen;<br/>eis2: als t heel groot wordt, moet P naderen naar 100.</p> |  <p>Maak een formule</p>                                                                                                                                                             |      |      |      |      |      |                     |      |      |      |      |
| <p>Bij de datering van archeologische vondsten wordt vaak gebruik gemaakt van C-14 methode: iedere 5730 jaar halveert de C-14.</p> <p>Stel dat in een opgegraven houten beeldje nog 60% van de C-14 over blijkt te zijn.</p> <p>Hoe oud is dat beeldje?</p>                                                                | <p>Bij een zeker productieproces kunnen de kosten K om q stuks te maken berekend worden met de formule</p> <p><math>K = 3q^2 + 16q</math> (K in euro's)</p> <p>Bereken <math>K'(5)</math>. Wat betekent de uitkomst in deze context?</p>                                 |      |      |      |      |      |                     |      |      |      |      |

Volgens een internationale norm mag men op het werk niet langer dan 8 uur blootgesteld worden aan lawaai van 90 dB of meer. In harder geluid mag minder lang gewerkt worden:

bij iedere 3 dB lawaai stijging moet de werktijd gehalveerd worden.

Bij welk lawaai mag een werkdag nog maar 1 uur duren?

Gegeven zijn een totale opbrengstfunctie  $TO = -2x^2 + 60x$  en een totale kostenfunctie  $TK = 4x + 130$ , waarbij  $x$  de productieomvang is. Bepaal bij welke productieomvang de winst maximaal is.

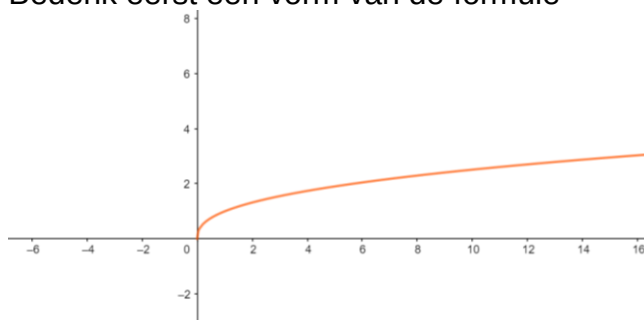


|     |    |    |      |      |      |      |
|-----|----|----|------|------|------|------|
| $x$ | 0  | 1  | 2    | 3    | 4    | 5    |
| $y$ | 20 | 24 | 28,8 | 34,6 | 41,5 | 49,8 |

Maak een formule bij deze tabel

Maak een formule

Bedenk eerst een vorm van de formule



Welke formules horen bij elkaar:

$$b = \frac{4000}{x}$$

$$x \cdot b = 4000$$

$$x \cdot 2b = 8000$$

$$b = 4000x^{-1}$$

$$b = 4000 \cdot \frac{1}{x}$$

$$b = 2000/2x$$

Welke formules horen bij elkaar:

$$y = 2(x - 3) + 5;$$

$$y = 120 - 3(12 - x);$$

$$y = \frac{14+3,2x}{4};$$

$$y = \frac{120}{2x + 4}$$

$E = 0,3G^{0,75}$ ,  $E$  staat voor het eiergewicht in grammen en  $G$  voor het lichaamsgewicht in grammen. Als  $G$  10 keer zo groot wordt, dan wordt  $E$  niet 10 keer zo groot. Bereken hoeveel keer zo groot  $E$  dan wel wordt.

Welke formules horen bij elkaar

$$y = 4,21^x;$$

$$y = 5 \cdot 1,34^{x-2};$$

$$y = 6 + 0,95^x;$$

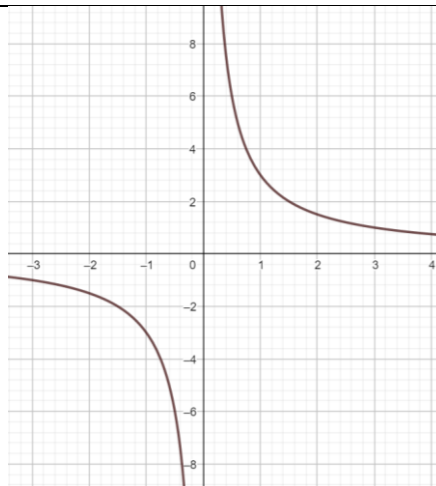
$$y = 4 \cdot 3,2 \cdot 2^x \cdot 0,9^x$$

$$y = 6x^{0,8}$$

$$y = 6 \cdot (0,95^x)^2$$

Oppervlakte van een cilinder kan berekend worden met de formule  $6,28Rh + 6,28R^2$ , waarbij  $R$  de straal en  $h$  de hoogte

Onderzoek hoe de oppervlakte verandert als zowel  $R$  als  $h$  twee keer zo groot worden



Bedenk een formule

| Tijd $T$<br>In uren | Snelheid $V$<br>In km/u |
|---------------------|-------------------------|
| 2,0                 | 21,1                    |
| 2,5                 | 16,9                    |
| 3,0                 | 14,1                    |
| 3,5                 | 12,1                    |
| 4,0                 | 10,5                    |

$T$  en  $V$  zijn omgekeerd evenredig

Toon dat aan.

De anatoom E. Dubois heeft een formule opgesteld voor de huidoppervlakte  $H$  van een mens, uitgedrukt in zijn lichaamsgewicht  $G$  en zijn lengte  $L$ :

$H = 0,007 \cdot G^{0,425} \cdot L^{0,725}$ , hierin is  $H$  in  $m^2$ ,  $G$  in kg en  $L$  in cm.

Maak een formule voor  $G$ , uitgedrukt in  $H$  en in  $L$

$$D = 79,78 \cdot \sqrt[3]{\frac{P}{R}}$$

$D$  is de diameter uitgedrukt in mm,  $P$  het vermogen, uitgedrukt in pk en  $R$  het toerental in tpm.

Maak een schets voor  $R$  tegen  $P$ , bij een vaste waarde voor  $D$

Gegeven is de formule:  $G = 10 \log(I) + 120$   
Bereken de afgeleide van  $G$  en toon daarmee aan dat de grafiek van  $G$  afnemend stijgend is.

$$E = \log \frac{1000 \cdot S}{A \cdot j}$$

Schrijf deze formule om in de vorm:

$A = \dots$

$$G = \frac{3,2 \cdot A^{0,3}}{A}$$

$G$  is gemiddelde aantal verschillende diersoorten per  $km^2$  en  $A$  de oppervlakte van een eiland

Toon aan dat  $G$  afnemend stijgend is

Geef aan welke verbanden uit  $h = \frac{1}{25} v^2$  volgen

Voor vogels geldt de formule  $E = 2,5M^{-0,15}$

|                                                                                                                                                           |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                             |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| $v^2 = 25h; h \cdot v^2 = 25; \frac{v^2}{h} = 25;$<br>$v = 5\sqrt{h}; v = 5\sqrt{h};$<br>$\frac{v}{\sqrt{h}} = 5$                                         | waarbij M het lichaamsgewicht in kg en E de transportenergie in wattuur die nodig is voor de verplaatsing van 1 kg lichaamsgewicht.<br>Maak een formule voor M uitgedrukt in E                                                                                                                                                                              |
| Kosten = $12\sqrt{100 + x^2} + 80a - 2x$ , waarbij de kosten in duizenden euro.<br><br>Onderzoek hoe de waarde van x waarbij K minimaal is afhangt van a. | De formule $D = 6,9\sqrt{T} - 12$ geeft de diameter van korstmos als de leeftijd T gegeven is. Het verband tussen de diameter D en de oppervlakte van het korstmos. De formule bij dit verband is $O = 0,8D^2$ , waarbij O de oppervlakte in mm <sup>2</sup> en D de diameter in mm. Toon aan dat $\frac{dO}{dT}$ constant is en geef aan wat dit betekent. |
| Bereken aan de hand van de formule dat<br><br>$m = 8b + \frac{5000}{b}$ een minimum heeft.                                                                | Verkeerslawaaï (L in dB) op een plaats hangt af van de snelheid (v in km/u) van het verkeer en de afstand tot een weg (a in meters).<br>Stel dat geldt:<br>$L = 89,5 - 2,1 \ln(a \cdot v) + 0,16v - 0,03a$ Onderzoek of geldt: <ul style="list-style-type: none"> <li>- Als a groter dan L kleiner</li> <li>- Als v groter dan L kleiner</li> </ul>         |
| $K = 20 + 80e^{-0,2t}$<br>Geef een formule voor t, uitgedrukt in t                                                                                        | <div data-bbox="783 1115 1305 1646" data-label="Figure"> </div> <p>In de grafiek kun je aflezen hoe de halveringstijd van het aantal bacteriën (V) afhangt van de temperatuur T. De formule is</p> $V = \frac{16,9}{-T^2 + 75T - 1350}$ <p>Is de groei van de bacteriepopulatie bij 42° C sterker dan de groei bij 40° C?</p>                               |

|                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                         |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                     |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| $N(t) = 4 \log \left( \frac{13}{13-t} \right)$ <p>Schrijf deze formule in de vorm <math>t = \dots</math></p>                                                                                                                                                                                                                                                                                                            | <div data-bbox="751 141 1426 353" data-label="Image"> </div> <p>Hier zie je de lenzenformule uit de natuurkunde; <math>f</math> staat voor de brandpuntsafstand, <math>b</math> voor de beeldafstand (de afstand van het beeld tot de lens) en <math>v</math> voor de voorwerpsafstand (de afstand van het voorwerp tot de lens). Deze formule zie je ook wel in de vorm: <math>b = \frac{f \cdot v}{v - f}</math></p> <p>Toon aan dat deze formule correct is.</p> |
| <p>Je kunt de formule <math>E = 3,3G^{0,75}</math></p> <p>Schrijf deze formule om naar de vorm <math>\log(E) = p + q \cdot \log(G)</math></p>                                                                                                                                                                                                                                                                           | $A(x) = 5000 \cdot \frac{5000 - 7,2x}{40000 - 3x}$ <p>Onderzoek of <math>A</math> een maximum heeft.</p>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                            |
| <p>Een geneesmiddel wordt door middel van een injectie in het bloed gebracht. De concentratie <math>C</math> na <math>t</math> minuten kan benaderd worden met de formules:</p> $C = \frac{240t}{t^2 + 40t + 240}$ $C = 0,13(e^{-0,2t} - e^{-4t})$ <p>Bij <math>t=0</math> zijn beide formules gelijk aan 0.</p> <p>Onderzoek met berekeningen en redeneringen of <math>C</math> eerst stijgt en daarna weer daalt.</p> | $L = 2\sqrt{x^2 + 0,25a^2} + 200 - x$ <p>De waarde van <math>x</math> waarvoor <math>L</math> minimaal is noemen we <math>x_{\text{opt}}</math> (<math>x</math>-optimaal)]</p> <p>Er bestaat een verband tussen <math>a</math> en <math>x_{\text{opt}}</math>. Schets dit verband.</p>                                                                                                                                                                              |
| <p>In de buurt van <math>x=0</math> zal de formule <math>y = -2x^2 + 60x + 900</math> het meest lijken op:</p> <ol style="list-style-type: none"> <li><math>y = -2x^2</math></li> <li><math>y = 60x + 900</math></li> </ol> <p>Beantwoord de vraag ook als <math>x</math> heel groot is.</p>                                                                                                                            | <p>Gegeven is de formule: <math>R = 100 \cdot 0,5^{\frac{t}{5730}}</math>, waarbij <math>R</math> de straling en <math>t</math> de tijd in jaren; hoe verandert de straling per jaar?</p>                                                                                                                                                                                                                                                                           |
| <p>In een gebied groeit de bevolking erg snel. In 2020 waren er 320 duizend mensen, over 17 jaar zijn dat er 640 duizend, en in 2054 het aantal weer verdubbeld. In welk jaar zou men de 10 miljoen mensen verwachten?</p>                                                                                                                                                                                              |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                     |

# Overzicht Rekenregels

## Haakjes uitwerken

| Regel                                | Voorbeeld                                                                                                                            |
|--------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| $a(b + c) = ab + ac$                 | $2(3x + 6) = 6x + 12$<br>$4 - (x + 2) = 4 - x - 2$                                                                                   |
| $(a + b)(c + d) = ac + ad + bc + bd$ | $(x + 3)(2x - 1) = 2x^2 - x + 6x - 3$<br>$= 2x^2 + 5x - 3$<br>$(x - 4)^2 = (x - 4)(x - 4) = x^2 - 4x - 4x + 16$<br>$= x^2 - 8x + 16$ |

## Breuken

| Regel                                            | Voorbeeld                                                      |
|--------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------|
| $A \cdot \frac{B}{C} = \frac{AB}{C}$             | $3x \cdot \frac{x}{2} = \frac{3x \cdot x}{2} = \frac{3}{2}x^2$ |
| $\frac{A}{B} \cdot \frac{C}{D} = \frac{AC}{BD}$  | $\frac{5x}{2} \cdot \frac{4x^3}{2x} = \frac{20x^4}{4x}$        |
| $\frac{A}{B} + \frac{C}{D} = \frac{AD + BC}{BD}$ | $\frac{5}{x} + \frac{x}{2} = \frac{10 + x^2}{2x}$              |

## Wortels

| Regel                                                                | Voorbeeld                                                |
|----------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------|
| $\sqrt[a]{a} = a^{\frac{1}{a}}, \quad \sqrt[p]{a} = a^{\frac{1}{p}}$ | $\sqrt[4]{x} = x^{\frac{1}{4}}$                          |
| $\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} = \sqrt{a \cdot b}$                         | $\sqrt{x} \cdot \sqrt{3} = \sqrt{3x}$                    |
| $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a}{b}}$                     | $\frac{\sqrt{3x}}{\sqrt{4x+1}} = \sqrt{\frac{3x}{4x+1}}$ |
| $\sqrt[q]{a^p} = (\sqrt[q]{a})^p = a^{\frac{p}{q}}$                  | $(\sqrt{x^3})^5 = x^{\frac{3}{5}}$                       |

## Machten

| Regel                                          | Voorbeeld                                                                                  |
|------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------|
| $a^n \cdot a^p = a^{n+p}$                      | $x^7 \cdot x^3 = x^{10}$                                                                   |
| $\frac{a^n}{a^p} = a^{n-p}$                    | $\frac{t^4}{t^3} = t$                                                                      |
| $(a^n)^p = a^{n \cdot p}$                      | $(x^2)^5 = x^{10}$                                                                         |
| $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$                       | $\frac{2x}{x^3} = 2x \cdot x^{-3} = 2x^{-2}$                                               |
| $(a \cdot b)^p = a^p \cdot b^p$                | $(4,5x)^2 = 4,5^2 \cdot x^2 = 20,25x^2$                                                    |
| $\left(\frac{a}{b}\right)^p = \frac{a^p}{b^p}$ | $\left(\frac{x}{5}\right)^4 = \frac{x^4}{5^4} = \frac{x^4}{625} = \frac{1}{625} \cdot x^4$ |

## Logaritmen

| Regel                                      | Voorbeeld                                  |
|--------------------------------------------|--------------------------------------------|
| ${}^g\log(a) + {}^g\log(b) = {}^g\log(ab)$ | ${}^g\log(5) + {}^g\log(6) = {}^g\log(30)$ |

|                                                                |                                            |
|----------------------------------------------------------------|--------------------------------------------|
| ${}^g\log(a) - {}^g\log(b) = {}^g\log\left(\frac{a}{b}\right)$ | ${}^g\log(30) - {}^g\log(6) = {}^g\log(5)$ |
| $n \cdot {}^g\log(a) = {}^g\log(a^n)$                          | $3 \cdot {}^g\log(6) = {}^g\log(6^3)$      |
| ${}^g\log(a) = \frac{\log(a)}{\log(g)}$                        | ${}^g\log(6) = \frac{\log(6)}{\log(g)}$    |
| $\ln(a) + \ln(b) = \ln(ab)$                                    | $\ln(5) + \ln(6) = \ln(30)$                |
| $\ln(a) - \ln(b) = \ln\left(\frac{a}{b}\right)$                | $\ln(30) - \ln(6) = \ln(5)$                |
| $n \cdot \ln(a) = \ln(a^n)$                                    | $3 \cdot \ln(6) = \ln(6^3)$                |
| ${}^g\log(a) = \frac{\ln(a)}{\ln(g)}$                          | ${}^g\log(6) = \frac{\ln(6)}{\ln(g)}$      |