

Katern Algebraïsche vaardigheden 2

§1 Rekenen met breuken, verhoudingen en procenten	4
§2 Rekenen met machten, wortels, exponenten, en logaritmen	10
§3 Rekenen met haakjes.....	24
§4 Formules en grafieken van standaardfuncties.....	29
§5 Redeneren met formules en grafieken	33
§6 Formules maken en modelleren	39
§7 Probleemaanpak en Gemengde opgaven.....	47
§8 Formatieve opdrachten	58

Auteurs: Peter Kop en Erik van Barneveld

Datum: maart 2022

Woord vooraf aan leerlingen en docenten

Aan leerlingen

In dit katern over algebraïsche vaardigheden staan hopelijk al een hoop dingen die je al weet/kan. Via uitgebreide oriëntatie door de centrale vragen moet je proberen uit te zoeken wat je al weet/kan en wat nog niet. In de V-vragen krijg je ondersteuning als je problemen hebt met de centrale vragen. Na de antwoorden op de centrale vragen volgen de algebraïsche bouwstenen: wat te onthouden (parate kennis en vaardigheden). We hebben geprobeerd om het aantal algebraïsche bouwstenen te beperken. Als er heel veel algebraïsche bouwstenen zouden zijn dan heb je problemen met “alles” te onthouden en te bedenken “wanneer moet ik wat gebruiken”. We kiezen daarom liever voor een wat kleiner algebraïsch gereedschapskistje en besteden meer aandacht aan de oefening om deze functioneel te gebruiken. In de oefenopgaven die volgen is onderscheid gemaakt tussen standaardopgaven (T1), die je effectief en efficiënt moet kunnen oplossen, en opgaven die het probleem oplossen oefenen (T2), dat wil zeggen om te oefenen om het algebraïsche gereedschapskistje te gebruiken in niet standaard situaties. De paragraaf Probleemaanpak en Gemengde opgaven bevat grotere opgaven die het probleem oplossen verder oefenen. Het is niet de bedoeling al deze opgaven te maken: meer is niet altijd beter. Overleg met je docent welke opgaven je het beste kunt oefenen.

Aan docenten:

In de katernen Algebraïsche Vaardigheden staat betekenisvol algebra onderwijs centraal. Onderzoek naar symbol sense, in het bijzonder inzicht in algebraïsche formules van Peter Kop, vormt een inspiratiebron voor deze katernen (<https://www.universiteitleiden.nl/nieuws/2020/10/vriendschap-sluiten-met-algebraïsche-formules>). Dit katern bevat dezelfde paragrafen-structuur als de katernen algebraïsche vaardigheden voor klas 4 en klas 5. In vergelijking met klas 5 is meer aandacht voor het rekenen met letters, het redeneren met formules, het gebruik van formules bij andere vakken, en modelleren. Daarnaast zijn de T2 vraagstukken complexer.

Bij klassikale besprekingen van gemengde opgave kan de docent gebruik maken van het framework voor probleemaanpak bij algebra dat in de paragraaf Probleemaanpak staat. Daarin wordt aan de hand van herkenningsniveaus (probleem familie herkennen, probleem opdelen in sub-problemen, kenmerken van probleem herkennen, en geen herkenning) heuristieken besproken. Bij het begeleiden van leerlingen die werken aan gemengde opgaven kan de docent hints geven op basis van dit framework. De formatieve opdrachten in de laatste paragraaf zouden ook als extra opdrachten voor specifieke doelgroepen van leerlingen gebruikt kunnen worden.

Een indicatie voor studielast van de paragrafen: totaal 16 lessen (ongeveer 6 weken)

Een indicatie voor studielast van de paragrafen

§1 2 lessen ; §2 2 lessen ; §3 2 lessen ; §4 2 lessen; §5 2 lessen ; §6 3 lessen;
§7 2 lessen ; §8 1 les

§1 Rekenen met breuken, verhoudingen en procenten

A. Centrale vragen

CV 1 Breuken in formules

Als het drukker op de weg wordt kunnen de auto's langzamer rijden en neemt de verkeersdichtheid K (het aantal auto's per kilometer weg) toe. Het verband kan beschreven worden met de formule: $\frac{K}{K_{max}} = 1 - \frac{v}{v_{max}}$

Waarbij K_{max} het maximale aantal auto's op de weg, v de snelheid van de auto's in km/u (aannahme is dat alle auto's met dezelfde constante snelheid rijden), en v_{max} de snelheid op de weg in km/u als de automobilisten niet door andere auto's gehinderd worden.

Schrijf deze formule om naar de vorm:

- $K = \dots$
- Schrijf nu de formule om naar 1 breuk: $K = \frac{\dots}{\dots}$

De oppervlakte van een cilindervormig blik met inhoud van 1 liter kan berekend worden met de formule:

$$Opp = 6,28R^2 + 6,28R \cdot \frac{1}{3,14R^2}, \text{ waarbij } R \text{ de straal van de ronde bodem.}$$

- Schrijf deze formule om naar 1 breuk, dus in de vorm $Opp = \frac{\dots}{\dots}$

CV 2 Met breuken rekenen

Misschien weet je al goed hoe je met breuken moet rekenen als er enkel getallen staan.

Gebruik die kennis de formules steeds om te schrijven tot de vorm $\frac{\dots}{\dots}$:

- $y1 = \frac{1}{x} + \frac{1}{x-2} = \dots$
- $y2 = \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{x-2} = \dots$
- $y3 = \frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{x-2}}$
- $y4 = x \cdot \frac{1}{x-2}$
- $y5 = \frac{p}{a} + \frac{q}{b} = \dots$
- $y6 = \frac{p}{a} \cdot \frac{q}{b} = \dots$
- $y7 = \frac{\frac{p}{a}}{\frac{q}{b}} = \dots$
- $y8 = p \cdot \frac{q}{b} = \dots$

CV3 Procenten

De prijzen worden met $a\%$ verhoogd. Een aantal weken later worden de prijzen weer met $a\%$ verlaagd.

- Leg door redenering uit of de prijzen nu gelijk zijn aan de oorspronkelijke prijzen, hoger, lager, of, afhankelijk van de oorspronkelijke prijs, soms hoger en soms lager.

Je kunt je uitspraak bij vraag a bewijzen door gebruik te maken van de formule

$P_2 = (1 + \frac{a}{100})(1 - \frac{a}{100}) \cdot P$, waarbij P de oorspronkelijke prijs en P_2 de prijs na de verhoging en verlaging.

- Toon aan dat deze formule juist is.
- Beredeneer aan de hand van deze formule dat prijs P_2 hoger/lager/soms hoger/lager is dan de oorspronkelijke prijs P .

CV 4 Verhoudingen

'De bol is tien keer zo groot als een voetbal'. Deze uitspraak kan verwarring geven. Wat wordt er nu bedoeld: een tien keer zo grote straal, of een tien keer zo grote oppervlakte, of een tien keer zo grote inhoud?

We vergelijken de aarde met de maan.

diameter aarde: 12.756 km

diameter maan: 3.476 km

oppervlakte aarde: 511.186.000 km²

oppervlakte maan: 37.959.000 km²

inhoud aarde: 1.086.781.300.000 km³

inhoud maan: 21.990.643.000 km³

- Bereken in elk van de drie aspecten de verhouding tussen aarde en maan en schrijf deze verhouding in de vorm ... : 1.
- Zoek een verband tussen de uitkomsten.
- Op 29 oktober 2006 werd een nieuw record Grootste Hamburger gevestigd in Clinton (New Jersey). De diameter van het vleesmonster was 71 cm. Een normale hamburger heeft een diameter van 10 cm en weegt 135 gram. Hoeveel zal het record gewogen hebben?



Indien je moeite had met deze centrale vragen kijk dan eerst naar onderstaande V opgaven

V Opgave V1

Kun je een opgave maken met +, -, *, : waarbij $\frac{1}{a}$ de uitkomst van de opgave is?

V Opgave V2

- a. $5 \cdot \frac{3}{20} =$
 b. $7 \cdot \frac{2b}{a} =$
 c. $\frac{1}{3} \cdot \frac{4}{5} =$
 d. $\frac{1}{3} \cdot \frac{a}{3} =$
 e. $\frac{1}{5} - \frac{1}{6} =$
 f. $\frac{1}{4} - \frac{a}{3} =$
 g. $\frac{3}{4} + \frac{2}{5} =$
 h. $\frac{b}{4} + \frac{a}{3} =$

V Opgave V3

Coronacijfers op 18 augustus 2021

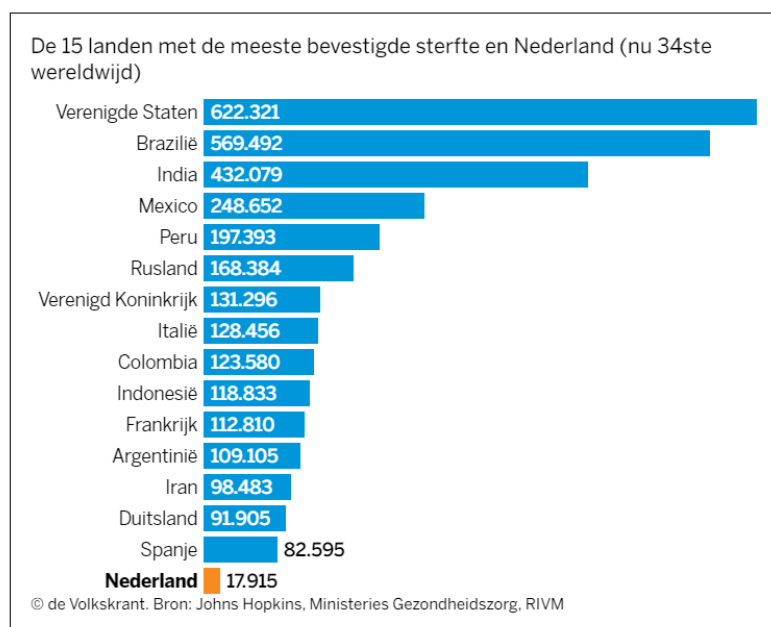
Positieve testen

In de afgelopen week kregen 16.564 mensen een positieve testuitslag, de week ervoor waren dit 18.048 mensen, een daling van **8%**. Het aantal positieve testen per 100.000 inwoners daalde van 103 naar 98. De afgelopen week lieten 104.270 mensen zich testen, de vorige week waren het er 123.253. Het percentage positieve testen in de GGD-teststraten steeg van **12,9%** naar **14,6%** (dit percentage is exclusief de testen die zijn afgenomen om te kunnen reizen).

Reken de dikgedrukte percentages na op basis van de andere gegevens.

V Opgave V4

Tijdens de corona pandemie stierven vele mensen aan corona. In de krant van 18 augustus 2021 stonden de volgende gegevens.



Om landen met elkaar te vergelijken wordt vaak gekeken naar de sterfte per miljoen inwoners. In onderstaande tabel zie je informatie over het aantal inwoners (in miljoenen) van de eerste acht landen en Nederland.

Verenigde Staten	333 miljoen
Brazilië	212

India	1326
Mexico	129
Peru	32
Rusland	142
Verenigd Koninkrijk	66
Italië	62
Nederland	17

Op basis van deze twee tabellen zou je kunnen zeggen dat 'India het veel beter doet dan Nederland'.

- Geef een argument voor deze uitspraak.
- Als een tabel gemaakt moet worden van landen die per miljoen inwoners de meeste sterfte hebben, welk land zou dan bovenaan staan? En welk land tweede

B. Theorie (om te onthouden) en opgaven

Theorie: breuken, verhoudingen en procenten

Breuken kun je zien als “deel van geheel”, verhouding, procent, getal, en als deling; de context bepaalt wat bedoeld wordt.

Bij het rekenen met breuken (breuk als getal) kun je enkel gelijksoortige (gelijknamige) breuken optellen; deze strategie kun je ook gebruiken bij delen; bij vermenigvuldigen is de basis steeds $1/3 \cdot 1/5 = 1/15$ (visualiseer $1/3$ deel van een vijfde taart of chocolade reep).

Met gezond verstand van optellen en vermenigvuldigen van breuken in dagelijkse taal naar formele wiskundige taal

Bij de berekening van procenten zijn verschillende strategieën: gebruik verhoudingstabel, gebruik vermenigvuldiging (5% van ... is hetzelfde als $0,05 \cdot \dots$), of gebruik uitschrijven via 1%

Bij verhoudingen is de basis steeds het totaal van de verhoudingsgetallen vergelijken met het totaal dat verdeeld moet worden (verdeel 150 in verhouding 2:3; verhoudingsgetallen zijn opgeteld $2+3=5$; dus de eerste krijgt $2/5 \cdot 150$ en de tweede $3/5 \cdot 150$)

Bij minder vaak voorkomende opgaven zoals omrekenen van snelheden, concentraties, enz. kun je het beste uitschrijven.

Bij gelijkvormige figuren (bijvoorbeeld vierhoeken) en lichamen (bijvoorbeeld balken) geldt dat als de afmetingen a keer zo groot zijn dan is de oppervlakte a^2 keer zo groot en de inhoud a^3 keer zo groot.

De rekenregels voor breuken kun je ook formeler opschrijven (aangevuld met getallenvoorbeelden)

Algemene regel	voorbeeld
$A \cdot \frac{B}{C} = \frac{AB}{C}$	$5 \cdot \frac{2}{3} = \frac{10}{3}$

$\frac{A}{B} \cdot \frac{C}{D} = \frac{AC}{BD}$	$\frac{2}{5} \cdot \frac{2}{3} = \frac{4}{15}$
$\frac{A}{B} + \frac{C}{D} = \frac{AD + BC}{BD}$	$\frac{2}{3} + \frac{4}{5} = \frac{2 \cdot 5 + 3 \cdot 4}{15}$
Als $\frac{A}{B} = \frac{C}{D}$ dan $A \cdot D = B \cdot C$	als $\frac{3}{6} = \frac{1}{2}$ dan $2 \cdot 3 = 6 \cdot 1$
Als $\frac{A}{B} = C$ dan $B \cdot C = A$	als $\frac{6}{3} = 2$ dan $2 \cdot 3 = 6$

T1 Opgave 1

Onderzoek of de volgende uitwerkingen juist zijn (indien niet, verbeter ze dan):

- $\frac{20t + 12}{4} = 5t + 3$
- $\frac{20a \cdot 12}{4} = 15a$
- $\frac{a + b}{c} = \frac{a}{c} + \frac{b}{c}$
- $\frac{ab}{c} = \frac{a}{c} \cdot \frac{b}{c}$

T1 Opgave 2

Het wereldrecord van 26:38 (26 minuten en 38 sec) bij de mannen is sinds 1 december 2019 in handen van Joshua Cheptegei gelopen in Valencia. Paula Radcliffe verbeterde op 23 februari 2003 in San Juan het wereldrecord bij de vrouwen naar 30:21.

Bereken het verschil in gemiddelde snelheid in km/u.

T1 Opgave 3

Bereken en schrijf de uitkomst als 1 breuk

- $\frac{37+37+37+37+37+37}{37+37+37+37} =$
- $\frac{8 \cdot 37+37+37}{37+37+37+37} =$
- $\frac{40a \cdot b^2}{4a \cdot b} =$
- $7a \cdot \frac{2b}{a} =$
- $\frac{1}{4} \cdot \frac{a}{4} =$
- $\frac{1}{4} + \frac{a}{4} =$
- $\frac{1}{4} / \frac{a}{4} =$
- $b \cdot \frac{2a}{3a} =$

T1 Opgave 4

Schrijf als één breuk.

- $k = \frac{3}{p+1} \cdot \frac{2}{p^2}$
- $k = \frac{3}{p} - \frac{2}{p^2}$
- $G = \frac{2}{h} - \frac{3}{10-h}$

$$\begin{aligned} \text{d. } T &= 3t \cdot \frac{t}{t+2} \\ \text{e. } b &= 3a + \frac{1}{a+1} \\ \text{f. } H &= \frac{2}{h} / \frac{3}{10-h} \end{aligned}$$

T1 Opgave 5

Weerstand van een draad met lengte l , doorsnede A en soortelijke weerstand ρ wordt gegeven door de formule $R = \rho \cdot \frac{l}{A}$

Herschrijf de formule zodanig dat doorsnede A als functie van de overige variabelen wordt gegeven.

Doe dat ook voor ρ .

T1 Opgave 6

- Gegeven is $\frac{3K+8}{6} = \frac{3p+1}{5}$; schrijf K in de vorm: $K = a \cdot p + b$
- Gegeven is $y = \frac{4}{2x-1}$; druk x uit in y

T2 Opgave 7

In de krant van 18 augustus stond onderstaande tabel over het aantal corona besmettingen.

Land	Afgelopen week			Totaal	
	Aantal	Per 100.000	Trend	Aantal	Per 100.000
Nederland	16.418	94	-9%	1.904.128	10.892
Georgië	34.105	855	30%	484.254	12.139
Aruba	877	821	22%	13.406	12.556
Dominica	565	785	232%	953	1.324
Sint-Maarten	235	548	31%	3.185	7.427
Cuba	60.668	536	-3%	526.837	4.651
Botswana	11.609	494	-25%	142.380	6.054
Israël	41.653	481	56%	948.058	10.953
Maleisië	144.863	448	8%	1.424.639	4.402
Swaziland	4.776	412	-6%	36.514	3.147

Trend: weektotaal vergeleken met voorgaande week
Volgorde: Nederland en vervolgens de landen met relatief de meeste besmettingen afgelopen week
 © de Volkskrant. Bron: Johns Hopkins, gezondheidsautoriteiten, analyse de Volkskrant

- Bereken op basis van deze gegevens voor Nederland het aantal besmettingen een week eerder.
- Bereken op basis van deze gegevens op twee manieren hoeveel inwoners Nederland heeft.

Of het 'goed' gaat in een land kun je op verschillende manieren bekijken; bijvoorbeeld de stijging van het aantal besmettingen per week, maar ook het aantal besmettingen per 100000 inwoners, of het percentage besmettingen op dit moment in vergelijking met het totaal aantal besmettingen.

- Vergelijk Nederland met Cuba en Israël op deze verschillende manieren.

§2 Rekenen met machten, wortels, exponenten, en logaritmen

A. Centrale vragen

CV 5 Wanneer met machten en logaritmen werken?

Wanneer is het handig om met machten te werken?

Om grote en kleine getallen weer te geven met wetenschappelijke notatie:

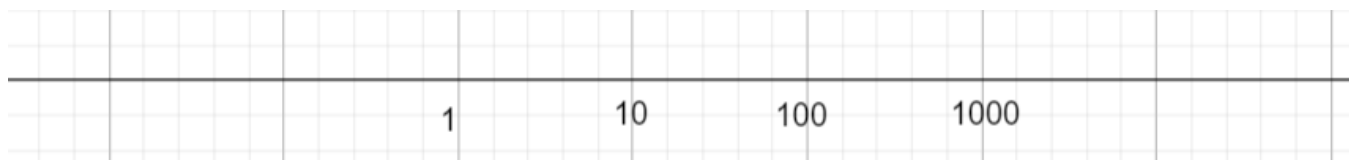
- De afstand van de aarde naar de zon is $1,496 \cdot 10^8$ km. Dit noemen we de wetenschappelijke notatie. Schrijf uit hoeveel meter dit is, dus zonder gebruik te maken van machten.
- Een arts heeft 4 microgram van een medicijn nodig; dat is $4 \cdot 10^{-6}$ gram. Schrijf uit hoeveel gram dat is, dus zonder gebruik te maken van machten.
- Om met machten te rekenen, in het bijzonder om te vermenigvuldigen en voor machtsverheffen en wortels te berekenen. $2^8 \cdot 2^{12} = 2^{\dots}$ (vergelijk dat met de berekening van $256 \cdot 4096 = \dots$)
- $(2^8)^5 = 2^{\dots}$
- $\sqrt{2^{16}} = 2^{\dots}$

Wanneer is het handig om met logaritmen te werken?

De logaritmische schaal wordt gebruikt om tegelijkertijd grote en kleine getallen op een schaal aan te geven.

- Geef het gewicht van de volgende wezens op deze schaal aan:

Mens 70 kg; olifant 3500 kg; muis 20 gram



Logaritmen werden vroeger gebruikt om vermenigvuldigingen en machten te berekenen.

Vroeger was het berekenen van vermenigvuldigingen een heel karwei. Met logaritmen was dat een stuk eenvoudiger, als je tenminste getallen kon omzetten naar logaritmen en omgekeerd, en dat kon men omdat er tabellen waren daarvoor.

$\log(a)$	a
0.01	1.023293
0.02	1.047129
0.03	1.071519
0.04	1.096478
0.05	1.122018
0.06	1.148154
0.07	1.174898
0.08	1.202264

- Tegenwoordig kun je daarvoor een rekenmachine gebruiken. Gebruik op je GR enkel de log en inverse log toetsen en bereken

$$4036 \cdot 17945 = \dots$$

$$496^{1621} = \dots$$

Logarithmen worden gebruikt als omkering van een exponentieel verband.

Als een bedrag van € 1000 wordt belegd met een rendement van 5% per jaar, dan zal het iedere jaar verdubbelen.

- h. Bereken de verdubbelingstijd (rond af op 1 decimaal) en vul de tabel hieronder in, waarin het verband is gegeven tussen bedrag en tijd waarop dit bedrag bereikt wordt. Geef ook een formule van dit verband in de vorm: $tijd = \dots$

Bedrag in euro	1000	2000	4000	8000	16000	32000	
Tijd in jaar	0						

De pH geeft aan hoe zuur een oplossing is en wordt berekend met het tegengestelde van de logaritme (met grondtal 10) van de concentratie (in mol/liter) H_3O^+ (het hydroxonium-ion).

In formulevorm: $pH = -\log(H_3O^+)$

Hier zie je de pH waarde van enkele stoffen:

- pH 14: natronloog (1 mol/liter)
 - pH 11: huishoudammonia (verdunde ammonia)
 - pH 10: zeepsop
 - pH 9: zeewater
 - pH 7: zuiver, gedestilleerd water (neutraal)
 - pH 6: natuurlijke regen, urine
 - pH 5: licht zure regen
 - pH 4: zure regen, tomatensap, bier
 - pH 3: wijn, zuurkool
 - pH 2,8: cola
 - pH 0: zoutzuur (1 mol/liter), zwavelzuur
- i. Ga na dat er geldt: steeds als de concentratie H_3O^+ 10 keer zo groot wordt daalt de pH waarde met 1.

CV 6 Machtsfunctie

In deze opgave kijken we naar het verband tussen gewicht (G) en hersengewicht (H) van een

zoogdier (beide in gram): $H = 0,16G^{\frac{2}{3}}$

Maak de volgende vragen:

Schrijf een aantal andere formules op die gelijkwaardig zijn. Hieronder staan enkele voorbeelden; vul op de puntjes correcte getallen in: $H = 0,06G^{\frac{2}{3}} + \dots$; $H = 0,16G^{\frac{1}{3}} \cdot \dots$; $H = 0,16\sqrt[3]{G^{\dots}}$; $H = (\dots G)^{\frac{2}{3}}$; $H = 0,16\frac{\dots}{G}$	Schets de grafiek van bij deze formule
Maak de omkeerformule, dus een formule van de vorm $G = \dots$	Maak een tabel bij deze formule en onderzoek hoe H steeds verandert als G twee keer zo groot wordt. En als G steeds drie keer zo groot wordt?

CV 7 exponentiele functie

We kijken naar het verband tussen het aankoopbedrag B en de tijd t in jaren bij een inflatie percentage van 6% per jaar en met $t=0$ in 2020

Maak de volgende vragen.

Maak een tabel voor B en leg uit dat $B = 100 \cdot 1,06^t$ een passende formule is.	Maak een schets van de grafiek van B
De tijd die het duurt om B twee keer zo groot te maken, de verdubbelingstijd, is steeds gelijk. Bereken deze verdubbelingstijd en leg uit dat die steeds constant is.	Schrijf de formule in de vorm: $t = \dots$ Schrijf de formule voor B in de vorm $B = 10^{\dots t + \dots}$ En in de vorm: $\log(B) = \dots t + \dots$

CV 8 logaritmische functie

De Amerikaan Charles Richter gebruikte seismogrammen, waarin de trillingen van de aarde als uitwijkingen gemeten worden, om de magnitude (kracht) M van een beving te kunnen bepalen.

De grootste uitwijking in het seismogram heet de maximale amplitude.

Om de magnitude van een beving te bepalen, kan de volgende formule gebruikt worden:

$M = \log(A) + 3$, waarbij M de magnitude en A de maximale amplitude.

Maak de volgende vragen

Als de maximale amplitude A tien keer groter wordt, neemt de magnitude met 1 eenheid toe. Toon dit aan door $M = \log(A) + 3$ en $M = \log(10A) + 3$ te vergelijken.	Schets het verband tussen M en A in een grafiek met horizontaal A en verticaal M . Noteer kenmerken van de grafiek.
De formule $M = \log(A) + 3$ is om te schrijven naar een exponentiele formule $A = 0,001 \cdot 10^M$	De formule $M = \log(A) + 3$ is om te schrijven naar $M = \log(1000A)$. Toon dit aan.

CV 9 Vormen van formules bij een exponentiele formule

Koolstof-14 of ^{14}C is een instabiel koolstofatoom die in levende materie voorkomt. Nadat een de levende materie dood gaat neemt de concentratie koolstof-14 af volgens de formule: $N = 100 \cdot$

$0,5^{\frac{t}{5730}}$ waarbij N de concentratie koolstof-14 op tijdstip t (in jaren)

Deze formule kan ook op andere manieren geschreven worden.

- Schrijf de formule $N = 100 \cdot 0,5^{\frac{t}{5730}}$ in de aangegeven vorm:
 $N = 10^{at+b}$; $\log(N) = at + b$; $N = a \cdot b^t$
- Onderzoek wat de betekenis van 5730 uit deze formule in deze context van koolstof-14.

CV 10 gelijkwaardige formules

- Welke formules zijn gelijkwaardig met $y = 6x^2$? (x is steeds positief)

$$y = 3x + 3x$$

$$y = (3x)^2$$

$$x = \sqrt{\frac{y}{6}}$$

$$y = 3x^2 + 3x^2$$

$$y = 3x^2 \cdot 2x^2$$

$$x = \frac{1}{6}\sqrt{y}$$

$$x = \left(\frac{1}{6} \cdot y\right)^{\frac{1}{2}}$$

b. Welke formules zijn gelijkwaardig met $y = 2\sqrt[4]{x^3}$? (x is steeds positief)

$$y = \sqrt[4]{16x^3}$$

$$y = \frac{2x}{\sqrt[4]{x}}$$

$$y = 2x^{\frac{3}{4}}$$

$$y = 2x \cdot x^{-\frac{1}{4}}$$

$$y = (2x)^{0,75}$$

$$x = 0,5y^{\frac{4}{3}}$$

$$x^3 = 2y^4$$

c. Welke expressies zijn gelijkwaardig met $y = 4x^{-1}$? (x is steeds positief)

$$y = \frac{1}{x^4}$$

$$y = \frac{4}{x}$$

$$y = (4x)^{-1}$$

$$y = \frac{6x}{2x^2}$$

$$y = \left(\frac{x^4}{x^5}\right)$$

$$y = 4x - 4x^{-2}$$

$$y = 2x^{-1} + 2x^{-1}$$

d. Welke formules zijn gelijkwaardig met $y = 9 \cdot 3^x$?

$$y = 2 \cdot 3^x$$

$$y = 3^{2x}$$

$$x = {}^3\log\left(\frac{y}{9}\right)$$

$$x = {}^3\log(y) - 2$$

$$x = {}^3\log(y) / 9$$

$$y = 3^{x+2}$$

e. Welke formules zijn gelijkwaardig met $y = 2^{4x+2}$?

$$y = 4 \cdot 8^x$$

$$y = 4 \cdot 4^x$$

$$y = 4 \cdot 4^{2x}$$

$$y = 4^{2x+1}$$

$$x = 0,25 \cdot {}^2\log(y) - 0,5$$

$$x = 4 \cdot {}^2\log(y) + 2$$

$$y = 4 \cdot 16^x$$

f. Welke formules zijn gelijkwaardig met: $y = 4 + {}^2\log(x)$? (x steeds positief)

$$y = {}^2\log(x + 4)$$

$$y = {}^2\log(2x + 8)$$

$$y = {}^2\log(16x)$$

$$y = 3 + {}^2\log(2x)$$

$$x = 2^{y-4}$$

$$x = \frac{2^y}{16}$$

$$x = 4 + \log(y)$$

g. Welke van de formules hieronder zijn gelijkwaardig met: $\log(y) = 2 - 3x$?

$$y = 10^{2-3x}$$

$$y = 100 \cdot 0,01^x$$

$$\log\left(\frac{y}{100}\right) = -3x$$

$$y = \log(2 - 3x)$$

$$\log(y) = \log 10^{2-3x}$$

Indien je moeite had met deze centrale vragen kijk dan eerst naar deze V opgaven

V Opgave 1

Geef aan of de volgende uitspraken WAAR of NIET WAAR zijn; indien niet waar geef dan een goede expressie

a. $4^{-5} = -20$

b. $2^{\frac{2}{5}} = \sqrt[2]{2^5}$

c. $\frac{1}{2^6} = 2^{-6}$

d. $2x^{-4} = 2 \cdot \frac{1}{x^4}$

e. $\frac{2}{\sqrt{x}} = 2x^{\frac{1}{2}}$

f. $\frac{150}{x} = 150x^{-1}$

g. $2x\sqrt[3]{x} = 2x^{\frac{2}{3}}$

h. $\frac{2}{\sqrt{x}} = 2x^{0,5}$

i. $3,2 = {}^2\log(10^{3,2})$

j. $2 \cdot \log(x) = \log(x^2)$

k. $\log(x + 4) = \log(x) + \log(4)$

l. $1,6 \cdot 10^{-3} = 0,0016$

m. $1000 \cdot 0,01^x = 10^{3-2x}$

V Opgave 2

Omdat het handig is met machten te rekenen (vermenigvuldigen, delen) moet je ook getallen om kunnen zetten in machten. Daarvoor kun je logaritmen gebruiken.

Vul bij de volgende opgaven steeds de ontbrekende waarden in.

$$1000 = 10^{\dots}$$

$$2000 = 10^{\dots}$$

$$0,0003 = 10^{\dots}$$

$$1000 = 5^{\dots}$$

$$2000 = 4^{\dots}$$

$$0,0034 = 3^{\dots}$$

V Opgave 3

Bereken vermenigvuldigingen, delingen en machten uit het hoofd

a. $10^{0,34} \cdot 10^{1,23} = 10^{\dots}$

b. $(2^6)^5 = 2^{\dots}$

c. $\sqrt{2^{16}} = 2^{\dots}$

d. $3^{3,5} \cdot 3^{1,2} = 3^{\dots}$

e. $10^{-2} \cdot 10^{-3} = 10^{\dots}$

f. $\frac{3^4}{3^8} = 3^{\dots}$

g. $\log(10^{2,13}) = \dots$

V Opgave 4

Een formule met parameters als a en b in de volgende formules zijn soms moeilijk te lezen voor leerlingen. $N = 10^{at+b}$; $\log(N) = at + b$; $N = a \cdot b^t$

De volgende vormen zijn meestal eenvoudiger te 'lezen': $N = 10^{\dots t + \dots}$; $\log(N) = \dots t + \dots$; $N = \dots \cdot \dots^{\dots}$

Kies enkele waarden voor a en b en noteer enkele voorbeelden bij ieder van de volgende formules $N = 10^{at+b}$; $\log(N) = at + b$; $N = a \cdot b^t$

V Opgave 5

Los op met wortels of machten of logaritmen

a. $4x^2 = 10$

b. $4 \cdot 3^x = 10$

c. ${}^3\log(4x) = 4$

d. $2\sqrt[3]{x} = 10$

e. $2\sqrt{x} + 2 = 6$

Antwoord op de centrale vragen

B Theorie (om te onthouden) en opgaven

Met machten kunnen we eenvoudig en overzichtelijk grote en kleine getallen weergeven. Gebruik de wetenschappelijke notatie!

$4,1 \cdot 10^9 = 4100000000$ ofwel 4,1 miljard (in VS noemen ze dit een billion)

Met machten kunnen we ook eenvoudig vermenigvuldigen, delen, en machtsverheffen (maar helaas niet optellen en aftrekken)

Rekenregels: $2^3 \cdot 2^4 = 2^7$; $\frac{2^{10}}{2^2} = 2^8$; $(2^3)^4 = 2^{12}$ (voor wortels gelden vergelijkbare regels)
 De exponenten en grondtallen hoeven niet geheel te zijn; met $10^{0,45}$, $3^{-2,5}$; $2, 3^{3,26}$ kunnen we prima rekenen
 In het bijzonder geldt dat sommige machten als wortel geschreven kunnen worden, zoals $7^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{7}$ en $\sqrt[3]{7^2} = 7^{\frac{2}{3}}$

De rekenregels kunnen algemeen geformuleerd worden en onthouden worden met getallenvoorbeelden

$a^p \cdot a^q = a^{p+q}$	$2^3 \cdot 2^4 = 2^7$
$\frac{a^p}{a^q} = a^{p-q}$	$\frac{2^{10}}{2^2} = 2^8$
$(a^p)^q = a^{p \cdot q}$	$(2^3)^4 = 2^{12}$
$a^p \cdot b^p = (a \cdot b)^p$	$2^5 \cdot 3^5 = 6^5$
$a^{-p} = \frac{1}{a^p}$	$2^{-3} = \frac{1}{2^3}$
$a^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{a^p}$	$2^{\frac{3}{5}} = \sqrt[5]{2^3}$

De rekenregels voor wortels zijn:

$$\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} = \sqrt{a \cdot b} \text{ en } \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a}{b}} \text{ en } (\sqrt{a})^2 = \sqrt{a^2} = a$$

Vergelijkbare regels gelden voor $\sqrt[q]{a}$

Bij het omzetten van getallen naar machten kunnen logaritmen gebruikt worden. Daarbij los je de vergelijking een exponentiele vergelijking op. Voorbeeld: stel je wilt 123 omschrijven als macht van 10; dan zoek je $123 = 10^{\dots}$ (ofwel je lost de vergelijking $123 = 10^x$ op). Je kunt logaritme zien als de omkering van een exponentiele functie. Of als een 'exponenten-teller' (hoe vaak kun je een getal (123) delen door 10 om op 1 uit te komen)

Rekenregels met logaritmen

Algemene regels	voorbeelden
${}^g\log(a) = b$, want $g^b = a$	${}^2\log(32) = 5$, want $2^5 = 32$
${}^g\log(a) = \frac{\log(a)}{\log(g)}$ (grondtal veranderen)	${}^4\log(20) = \frac{\log(20)}{\log(4)}$
${}^g\log(a) + {}^g\log(b) = {}^g\log(ab)$	${}^3\log(6) + {}^3\log(5) = {}^3\log(30)$
${}^g\log(a) - {}^g\log(b) = {}^g\log(\frac{a}{b})$	${}^3\log(30) + {}^3\log(5) = {}^3\log(6)$
$n \cdot {}^g\log(a) = {}^g\log(a^n)$	$4 \cdot {}^3\log(5) = {}^3\log(5^4)$

Deze rekenregels werden vroeger gebruikt om vermenigvuldigingen te berekenen. Nu wordt de logaritmische schaal gebruikt om zowel grote als kleine getallen tegelijkertijd in beeld te brengen op een schaal. De logaritmische schaal wordt gebruikt bij enkel logaritmisch papier (enkel de verticale as heeft een logaritmische schaal) en bij dubbel logaritmisch papier, waarbij beide assen een logaritmische schaalverdeling hebben.

Omdat je logaritmen als exponenten-tellers kunt beschouwen zijn (logaritmen zijn exponenten), lijken de rekenregel van machten $g^p \cdot g^q = g^{p+q}$ en ${}^9\log(x) + {}^9\log(y) = {}^9\log(x \cdot y)$ op elkaar. Beide geven aan dat je 'als je twee getallen vermenigvuldigt je de exponenten van beide getallen moet optellen'.

T1 Opgave 8

Zet in wetenschappelijke notatie d.w.z. $\dots \cdot 10^{\dots}$ ofwel $a \cdot 10^b$ met a tussen 1 en 10 en b geheel (bijvoorbeeld $6,1 \cdot 10^5$)

- 341000
- 0,000072
- 2^{10000}

T1 Opgave 9

Schrijf de volgende formules in de vorm $P = \text{constante} \cdot \dots$

- $P = 25p^2 \cdot 10p$
- $P = \frac{5A^{3,4}}{A}$
- $P = \left(\frac{a^5}{a^3}\right)^4$
- $P = \frac{(0,5x)^2}{x}$
- $P = 5R^3 \cdot \frac{R^6}{2R^2}$
- $P = \frac{5A^{5,2}}{4A^{0,6}}$
- $P = (d \cdot 3)^2 \cdot 4d$
- $P = (2C \cdot C)^3 \cdot \frac{C^2 C^4}{C^5}$

T2 Opgave 10

Nog regelmatig worden er in oude aardlagen skeletonderdelen en voetsporen aangetroffen van dinosauriërs. Uit de voetsporen kunnen we zelfs achterhalen hoe snel die dinosauriërs daar liepen. Deze snelheid hangt af van de afstand tussen de voetsporen, de paslengte, en van de grootte van de dinosaurus die het voetspoor achterliet. Doordat soms hele skeletten gevonden zijn weten we hoe groot zo'n dier geweest is.

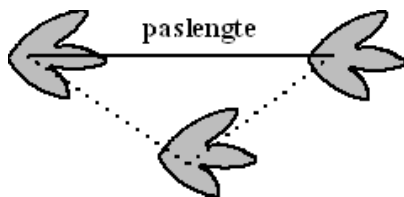
De biomechanicus R. McNeill Alexander heeft van diersoorten de relatie tussen paslengte, snelheid en grootte bepaald. Uit zijn onderzoek is een formule afgeleid die een goede schatting geeft voor de snelheid van deze dieren:

$$v = 2,81 \cdot s^{1,67} \cdot h^{-1,17}$$

Hierin is:

- v de snelheid in *kilometer per uur*
- s de paslengte in *meter*, de afstand tussen twee opeenvolgende voetafdrukken van dezelfde voet (zie onderstaande figuur).
- h de heuphoogte in *meter*

De formule geldt voor zowel twee- als viervoeters, zowel groot als klein.



- Schrijf de formule zonder negatieve en gebroken exponenten.
- Schrijf de formule in de vorm $s = \dots$ en ook in de vorm $h = \dots$
- Onderzoek hoe de snelheid verandert als de paslengte verdubbelt.

T2 Opgave 11

Een rechthoekig stuk land moet een oppervlakte krijgen van 160 m^2 .

x

Rechthoekig stuk land

De lengte y kan berekend worden met de formule: $y = 160x^{-1}$

Maak de opdrachten in onderstaande tabel.

Schrijf deze formule $y = 160x^{-1}$ op andere manieren	Schets de grafiek van bij deze formule Beschrijf de grafiek als x heel klein is, en ook als x heel groot is.
Geef een tabel bij deze formule Noteer: als x twee keer zo groot wordt dan zal y	x en y zijn omgekeerd evenredig Bedenk een andere context(en) bij deze formule $y = 160x^{-1}$

T2 Opgave 12

Het aantal diersoorten op een eiland (S) is o.a. afhankelijk van de oppervlakte van het eiland (A). Voor een bepaald gebied geldt: $S = 3,2 \cdot A^{0,3}$, waarbij S het aantal soorten en A de oppervlakte in km^2 .

In deze opgave kijken we naar de formule: $G = \frac{3,2 \cdot A^{0,3}}{A}$

- Maak de opdrachten in onderstaande tabel.

Beschrijf in eigen woorden wat G in deze context betekent	Schets de grafiek van S en G
De formule van G kan ook anders geschreven worden. Schrijf een aantal andere gelijkwaardige formules voor G op.	Maak een tabel voor G; onderzoek hoe G verandert als A tweemaal zo groot wordt

Voor cirkelvormige eilanden geldt dat de oppervlakte te berekenen is met de formule $\text{oppervlakte} = \pi R^2$, waarbij R de straal.

De formule voor S is nu om te schrijven tot: $S = a \cdot R^b$

b. Doe dit en bereken a en b.

T2 Opgave 13

Vanaf 1980 is de lengte van de bloeiperiode van een bloemsoort te beschrijven met de formule: $B = 30 \cdot 1,042^t$, waarbij B de lengte van de bloeiperiode in dagen en t de tijd vanaf 1980.

- Bereken de verdubbelingstijd van B
- Bereken hoelang het duurt voordat B 5 keer zo groot wordt.
- Leg uit hoe je uitgaande van het antwoord uit vraag a het antwoord op vraag b kunt vinden.

T1 Opgave 14

x	0	1	2	3	4	5	6		10
y			86,7	73,7	62,6	53,2			?

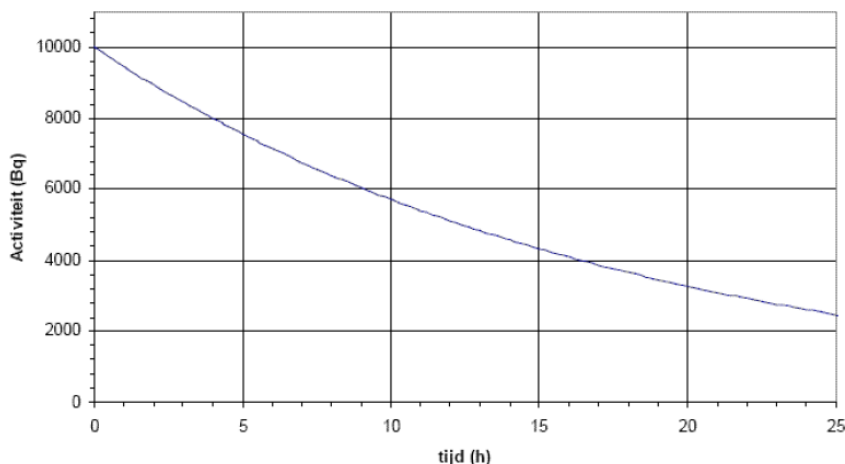
- Leg uit dat hier sprake kan zijn van een exponentieel verband
- Bereken de y waarde bij x=10
- Maak een formule in de vorm $y = b \cdot g^x$

Bij een ander exponentieel proces wordt de volgende tabel gegeven:

x	0	1	2	3	4	5	6
y			90			36	

- Bereken een formule bij dit exponentieel verband.

T1 Opgave 15



In de figuur is weergegeven het exponentieel verband tussen de radioactiviteit van een radioactief isotoop (in Bq) en de tijd in uren.

- Bepaal uit de grafiek de halveringstijd.
- Maak een formule bij deze grafiek.

T2 Opgave 16

Het verband tussen R , U , en I wordt gegeven door de formule $R = \frac{U}{I}$. Dit verband kan ook geschreven worden als $R \cdot I = U$ of als $R = U \cdot I^{-1}$.

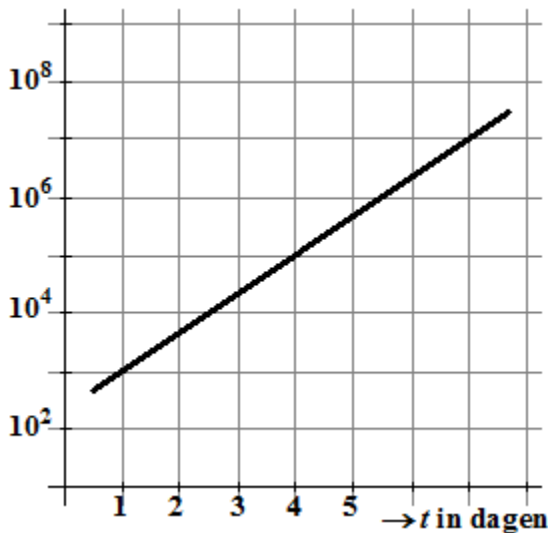
Geef ook nog andere formules die het verband tussen R , I en U kan geven. Bedenk er zo veel mogelijk.

T1 Opgave 17

Niet altijd is de schaalverdeling langs de assen gelijkmatig. Een bijzondere schaalverdeling zie je hieronder langs de verticale as. We noemen dit een logaritmische schaalverdeling. Deze schaalverdeling wordt o.a. gebruikt om exponentiele verbanden op te sporen: exponentiele functies uitgezet in deze figuur geven een rechte lijn als grafiek.

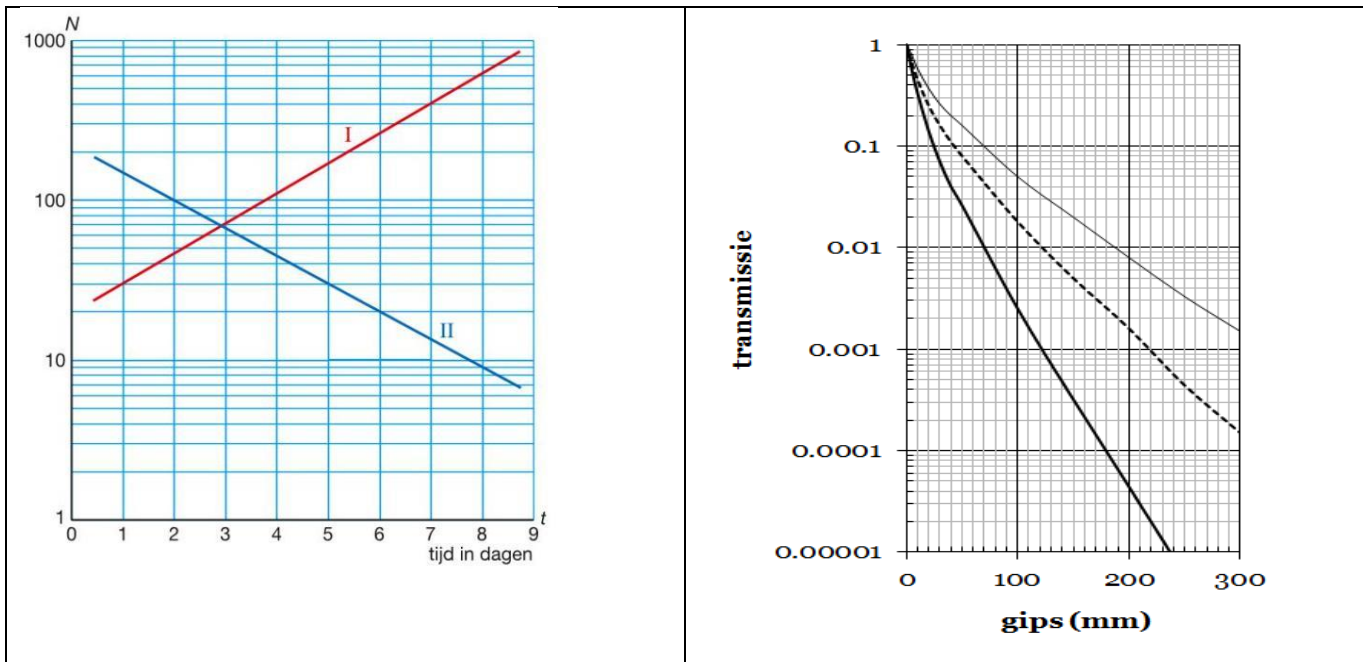
Bij de bovenste twee figuren zie je geen onderverdeling tussen de machten van 10. Je zult als lezer dus zelf aan moeten geven waar bijvoorbeeld getal 50 en getal 3000 moet staan.

- a. Geef in de figuur deze waarden op de verticale as aan en lees af na hoeveel dagen deze waarde bereikt wordt.



Soms hebben de makers van de figuren het de lezer gemakkelijk gemaakt. Ze hebben dan de onderverdeling tussen de machten van 10 al aangegeven. Zie de twee onderstaande figuren. In de linker figuur zie je dus de horizontale lijntjes bij 1,2,3,...,10,20,30,...,100,200,300,...,1000.

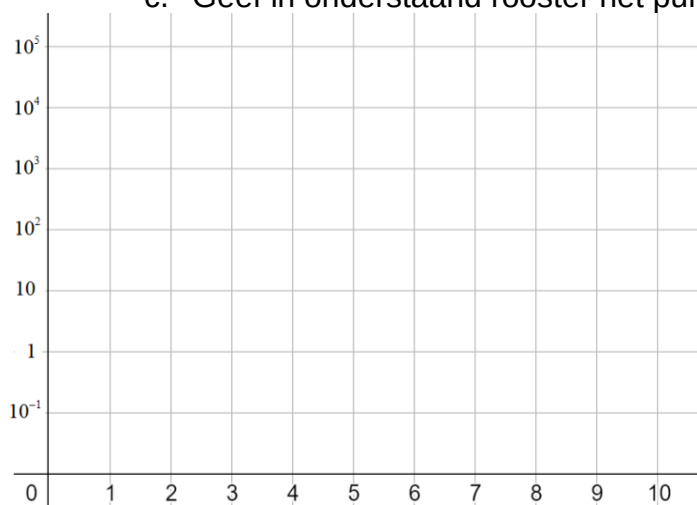
- a. Lees in de linker figuur de coördinaten van het snijpunt af. En in de rechter figuur de transmissie bij 100 mm gips



Ook is het mogelijk dat zowel de verticale als de horizontale schaalverdeling logaritmisch is.

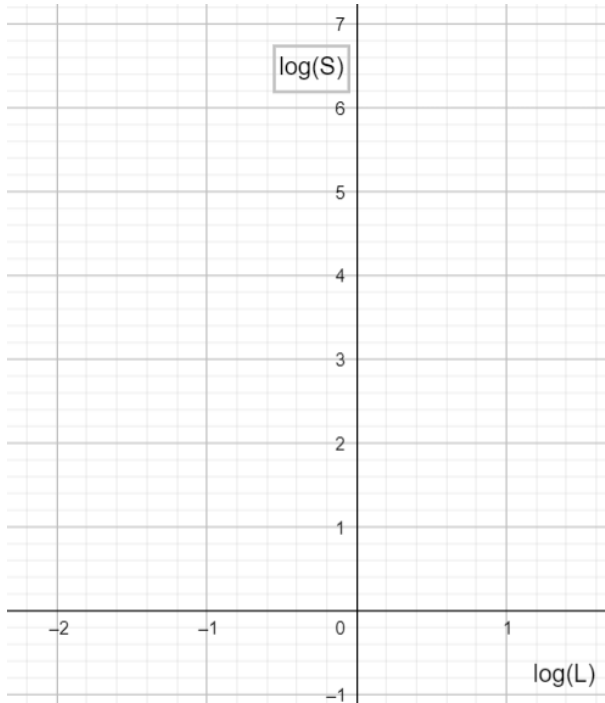


- Lees in deze figuur de lichaamsmassa en de pasfrequentie van een paard en van een rat af.
- Geef in onderstaand rooster het punt (3,100) aan; en het punt (5,400)



Er bestaat een verband tussen de lengte van diersoorten (de gemiddelde lengte van volwassen dieren van dat soort) en het aantal diersoorten met die lengte. Dobson vond het volgende verband $S = \frac{700}{L^2}$, waarbij L de lengte in meters en S het aantal diersoorten met die lengte. Deze formule geldt voor L -waarden van 0,01 tot 10 meter.

- a. Schets de grafiek van dit verband in onderstaande figuur. Let op de schaalverdelingen.



Het verband in de figuur lijkt op een rechte lijn.

- b. Toon dit aan door de formule $S = \frac{700}{L^2}$ om te schrijven in de vorm $\log(S) = a + b \cdot \log(L)$

T2 Opgave 19

Een geluidsbox produceert in alle richtingen even veel geluid. De geluidsintensiteit neemt af als je verder van de geluidsbox bevindt volgens de formule $I = \frac{P}{12,56R^2}$, waarbij I de geluidsintensiteit in Watt/m^2 , P het vermogen van het geluid in Watt dat door de geluidsbox geproduceerd wordt, en R de afstand tot de geluidsbox in meter.



Het verband $I = \frac{P}{12,56R^2}$ kan ook in andere vormen geschreven worden, bijvoorbeeld als $I = \dots \cdot P^{\dots} \cdot R^{\dots}$ of als $P = \dots$

- a. Schrijf het verband in beide vormen.

In plaats van de geluidsintensiteit wordt vaak het geluidsniveau G gebruikt om de sterkte van het geluid aan te geven. G wordt gegeven in decibel. Het verband tussen I en G wordt gegeven met de formule: $L = 10 \cdot \log(10^{12} \cdot I)$

Vaak zien we dit verband geschreven als $L = 120 + 10 \cdot \log(I)$

b. Toon aan dat beide formules gelijkwaardig zijn.

c. Maak een formule voor L , uitgedrukt in P en R

§3 Rekenen met haakjes

A. Centrale vragen

CV 11 winstfunctie

Voor een bedrijf is de opbrengstfunctie gegeven: $TO = -11q^2 + 96q$, waarbij q het aantal produkten.

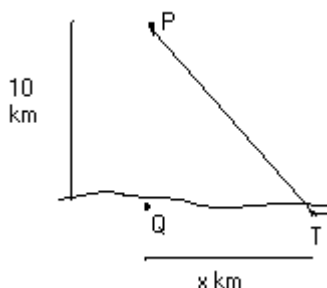
Voor de kosten wordt de formule $TK = q^2 + 10$

- Onderzoek met de GR bij welk aantal produkten winst gemaakt wordt.
- Bereken bij welk aantal produkten de winst maximaal is.

CV 12 kettingformule

Vanuit een olieplatform (P) dat 10 km uit de kust ligt moet een pijpleiding naar een punt (T) op de kust gelegd worden. Punt Q ligt op de kust en is het punt dat het dichtste bij P ligt (dus $PQ=10$).

We zijn geïnteresseerd in de lengte van de pijpleiding in zee, dus in de afstand PT.



Deze afstand kan berekend worden met de stelling van Pythagoras: $PT = \sqrt{100 + x^2}$

Om deze formule beter te doorzien maken we een zogenaamde *ketting* waarin, uitgaande van x , aan gegeven wordt hoe je PT kunt berekenen:

$$x \rightarrow \dots \rightarrow x^2 \rightarrow \dots \rightarrow x + 100 \rightarrow \dots \rightarrow \sqrt{x^2 + 100} \rightarrow \dots$$

(neem waarde van x , kwadrateer deze, tel er 100 bij op, en neem daarna de wortel)

We noemen $y = \sqrt{100 + x^2}$ een kettingfunctie omdat we deze formule door middel van een ketting kunnen beschrijven.

- Maak bij de volgende formules steeds een pijlenketting:

$$y = (x^2 + 5)^6$$

$$y = \sqrt{x^2 + 16}$$

$$y = \log(2^x + 5)$$

- Hoeveel en welke functies kun je maken door schakelen met de volgende drie functies:

$y = 2^x$; $y = x + 3$; $y = x^2$. Je mag iedere functie maar een keer gebruiken. Hieronder zie je een

Voorbeeld

$$x \rightarrow \dots \rightarrow 2^x \rightarrow \dots \rightarrow x+3 \rightarrow \dots \rightarrow x^2 \rightarrow \dots$$

Deze ketting geeft de functie $y = (2^x + 3)^2$

Je hoeft de uitkomst niet verder uit te werken.

Kettingen zijn handig als je bijvoorbeeld een vergelijking met de hand wilt oplossen of wanneer je een formule wilt 'omkeren' (dus de inverse functie wilt maken).

- c. Gebruik de pijlenketting om de vergelijkingen $y=10$ (met de formules uit vraag a.) met de hand op te lossen. Keer daarvoor de pijlenketting die je gemaakt had om.

CV 13

- a. Werk haakjes weg

$$y = 2x(x + 3)$$

$$y = (x - 6)(x + 3)$$

$$y = x(x - 4)^2$$

$$y = (x - 9)(x - 3)$$

$$y = (x - 4)^2 - (x - 9)(x - 3)$$

- b. Soms is het handig om juist haakjes te zetten, dat wil zeggen om een vermenigvuldiging te maken. Dat kan bijvoorbeeld door een factor buiten haakjes te halen. Doe dat in de volgende situatie en leg uit wanneer dat handig zou kunnen zijn.

$$x^2 - 15x = x(x \dots)$$

$$3x^2 - 36x = x(\dots)$$

Indien je moeite had met deze centrale vragen kijk dan eerst naar onderstaande V opgaven

Opgave V1

Werk de haakjes weg:

a. $(6ab)^2 =$

b. $(2a + b)^2 =$

c. $(ab)(cd) =$

d. $(a + b)(c + d) =$

Opgave V2

Om de waarde van een boom vast te stellen worden wiskundige modellen gebruikt.

In deze opgave wordt de waarde van een boom bepaald aan de hand van de hoogte van de boom: $w = 2h - 2$.

De hoogte van de boom is afhankelijk van de leeftijd, zeg $h = 1,2t + 0,8$

In dit model is w de waarde van een boom in euro, h de hoogte van een boom in meters, en t de leeftijd in jaren.

- a. Maak een formule voor de waarde van de boom, uitgedrukt in leeftijd t .

We noemen dit schakelen van functies en kunnen dit weergeven in een pijlenketting

$h = 1,2t + 0,8$	$w = 2h - 2$
$t \rightarrow h$	$h \rightarrow w$

In wiskundeboeken wordt vaak gewerkt met x en y . Dan ziet bovenstaande eruit als:

$1,2x + 0,8$	$2x - 2$
$x \rightarrow \dots$	$\dots \rightarrow \dots$

Bij bovenstaand voorbeeld zijn de schakels nog redelijk complex; liever gebruiken we enkel elementaire functies, zoals $+5$ (dus $x+5$), -6 (dus $x-6$), $*4$ (dus $x*4$), maar ook x^2 en 2^x .

b. Maak een formule bij de volgende pijlenkettingen

x	$\rightarrow$	$x + 8$	$\rightarrow$	$x - 2$	$\rightarrow$	$\dots$
-----	---------------	---------	---------------	---------	---------------	---------

x	$\rightarrow$	x^2	$\rightarrow$	$x - 2$	$\rightarrow$	2^x	$\rightarrow$	$\dots$
-----	---------------	-------	---------------	---------	---------------	-------	---------------	---------

c.

Stel we hebben een pijlenketting bij een formule:

We nemen de formule

$y = \sqrt[3]{x^2 + 20}$ en maken onderstaande pijlenketting

x	$\rightarrow$	x^2	$\rightarrow$	$x + 20$	$\rightarrow$	$\sqrt[3]{x}$	$\rightarrow$	$\dots$
-----	---------------	-------	---------------	----------	---------------	---------------	---------------	---------

We kunnen nu deze pijlenketting gebruiken om de vergelijking $\sqrt[3]{x^2 + 20} = 10$ op te lossen.

De uitkomst 10 zetten we rechts in de pijlenketting ($y=10$) en werken nu terug (van rechts naar links) en gebruiken steeds de omkeerfuncties.

Dus $\sqrt[3]{\dots} = 10 \rightarrow \dots = 10^3$; dan $\dots + 20 = 10^3 \rightarrow \dots = 10^3 - 20$; dan $\dots^2 = 10^3 - 20 \rightarrow \dots = \dots$

Maak deze redenering af en noteer de oplossingen van deze vergelijking.

d. Los op deze wijze de vergelijking $(x^2 + 5)^3 = 20$ op.

B Theorie (om te onthouden) en opgaven

Haakjes gebruik je om de natuurlijke volgorde van bewerkingen te veranderen. De natuurlijke volgorde van bewerkingen is: plus en min (+/-) doe je als laatste, en werk van links naar rechts; daarvoor doe je vermenigvuldigen en delen (ook van links naar rechts); en als eerste doe je haakjes en machten

Om dit te onthouden wordt wel de regel:

Meneer Van Dalen Wacht Op Antwoord (machtsverheffen, vermenigvuldigen/delen, wortels, optellen/afrekken)

Met haakjes kun je ook aangeven "wat bij elkaar hoort" (wat als een eenheid gezien kan worden); bijvoorbeeld om het verschil tussen $1/x+2$ en $1/(x+2)$ aan te geven en ook bij -4^2 en $(-4)^2$

Soms staan er geen haakjes maar moet je ze wel denken, zoals bijv. 2^{x+3} of $\frac{1}{x+3}$

Haakjes kun je vaak eenvoudig wegwerken:

$a(3a + 4) = 3a^2 + 4a$; $(a + 3)(3a + 4) = 3a^2 + 13a + 12$; $(a + 3)^2 = a^2 + 6a + 9$;

$3a(3a \cdot 4) = 36a^2$

Om te werken met formules en vergelijkingen op te lossen kun je soms gebruik maken van pijlenkettingen. Hierbij geef je in een aantal stappen aan hoe je een formule kan opbouwen. Voorbeeld: $y = \sqrt[3]{x^2 + 20}$ dan is de pijlenketting:

x	$\rightarrow$	x^2	$\rightarrow$	$x + 20$	$\rightarrow$	$\sqrt[3]{x}$	$\rightarrow$	$\dots$
-----	---------------	-------	---------------	----------	---------------	---------------	---------------	---------

T2 Opgave 20 duizelig van de minnen

Bereken

A $-3a \cdot -6a - 8a \cdot -2a = \dots$

B $-3a \cdot (-6a - 8a) \cdot -2a = \dots$

C $(-3a \cdot -6 - 8a) \cdot -2a = \dots$

D $-3a \cdot (-6a - 8 \cdot -2) = \dots$

E $(-3a \cdot -6a) - (8a \cdot -2a) = \dots$

T1 Opgave 21

a. Maak een pijlenketting bij

$y = (x + 1)^3 - 5$

$y = 2(x + 1)^2$

$y = 2^{x-5} + 1$

$y = \log(2x) - 3$

b. Los bij deze formules steeds de vergelijking $y=4$ op.

T2 Opgave 22

c. Welke expressies zijn niet gelijkwaardig met $y = x^2 - 16x$

$y = 4(x - 2)(x + 2)$

$y = (x - 3)(x - 13) + 39$

$y = \frac{x^3 - 16x}{x}$

$y = -x(16 - x)$

$y = (x - 8)^2 - 64$

T2 Opgave 23

Bewijs met algebra (in plaats van “bewijs met ...” worden dit soort opdrachten ook gevraagd met “toon aan dat ..”)

a. Bewijs dat de grafiek van $y = x(x + 1) - x^2$ een rechte lijn is.b. Bewijs dat $\frac{1}{5} + \frac{a}{b}$ gelijk is aan $\frac{2b+10a}{10b}$ c. Bewijs dat de uitkomsten van $y = 5(3x)^2$ altijd 9 keer zo groot zijn als die van $y = 5x^2$ d. Gegeven zijn de formules $A = 10,6 \cdot B$ en $U = \frac{2B}{c}$. Bewijs dat A is van de vorm $A = p \cdot U \cdot C$, waarbij p een constant getal is.

T1 Opgave 24

Veel gemaakte fouten.

Zoek ze op en verbeter:

$ax^p + bx^q + cx^p = abcx^{p+q}$

$(a + b)^2 = a^2 + b^2$

$\frac{a+b}{c} = a + b/c$

$-(a - b)^2 = -a^2 + b^2$

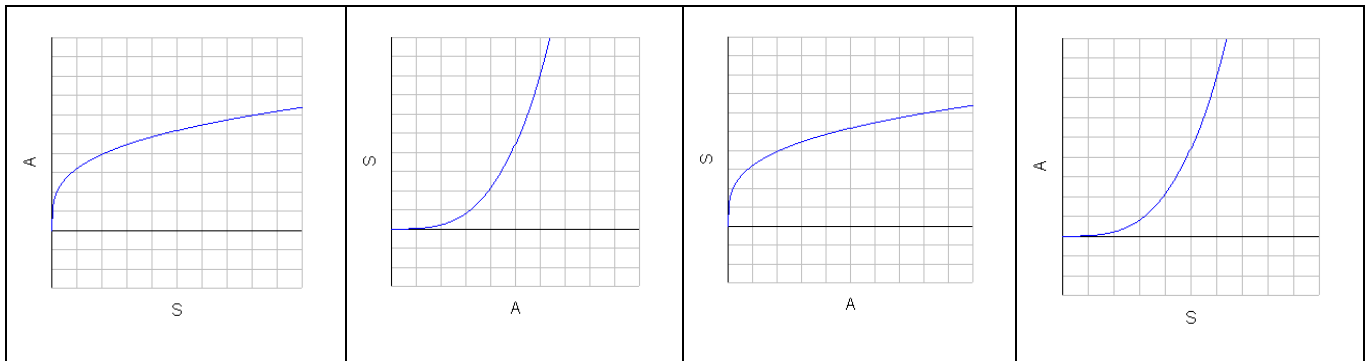
$a(bc) = ab \cdot ac$

T2 Opgave 25

We kijken naar het verband tussen de oppervlakte A van een eiland en het aantal soorten reptielen S op dat eiland. Dit verband kan gegeven worden door $S = 3,2A^{0,3}$

Steeds als A 100 keer groter wordt dan zal S ook met een vast getal vermenigvuldigd worden.

- Toon aan dat dit altijd geldt door de uitkomsten van $S = 3,2(100A)^{0,3}$ te vergelijken met die van $S = 3,2A^{0,3}$
- Maak een formule waarmee je A in S uitdrukt.
- Welke grafiek(en) passen bij het verband tussen A en S ? Licht je antwoord toe.



De formule $S = 3,2A^{0,3}$ kan ook geschreven worden als: $\log(S) = 0,51 + 0,3 \log(A)$

- Schrijf de formule $\log(S) = \log(3,2A^{0,3})$ om tot $\log(S) = 0,51 + 0,3 \log(A)$

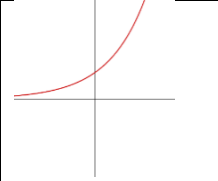
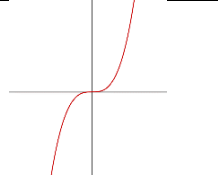
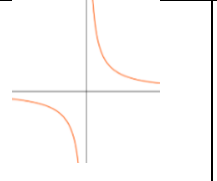
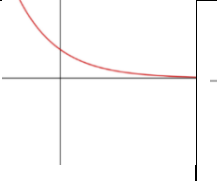
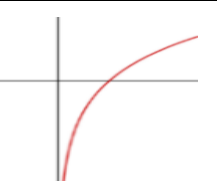
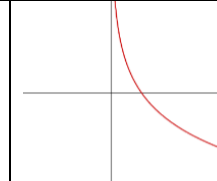
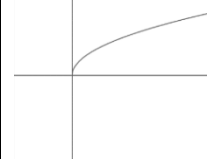
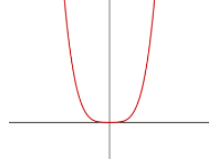
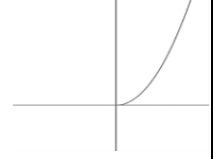
§4 Formules en grafieken van standaardfuncties

A. Centrale vragen

CV 14

Om formules te leren 'lezen' is het nodig om van een aantal formules direct een plaatje voor ogen te hebben.

Koppel de verschillende formules aan een correcte grafiek. Noteer bij iedere grafiek kenmerken.

					
			Geen van alle		
$y = x^2$	$y = \frac{4}{x}$	$y = x^3$	$y = \sqrt{x}$	$y = x^4$	$y = x^{1,2}$
$y = 2^x$	$y = 1,2^x$	$y = 0,5^x$	$y = x^{0,8}$	$y = 0,8^x$	$y = x^{-1}$
$y = {}^{0,5}\log(x)$	$y = 4^x$	$y = x^{1,5}$	$y = {}^3\log(x)$	$y = 100 \cdot 0,82^x$	$y = 6x^{2,32}$

CV 15

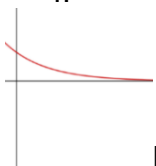
Los steeds de vergelijking $y=10$ op en maak daarna een formule voor de omkeersfunctie, dus druk x uit in y .

- $y = 2x + 5$
- $y = 2x^3$
- $y = 3,2x^{0,6}$
- $y = 4\sqrt[3]{x}$
- $y = 3 \cdot 1,2^x$
- $y = \frac{4}{x}$
- $y = {}^2\log(x)$

CV 16 Redeneren met standaardfuncties

Beredeneer WAAR of NIET WAAR

- $P = 100 \cdot 0,8^t$; als t groter wordt dan wordt P kleiner
- $Q = x^6$; Q is nooit negatief
- $R = t^{0,6}$; R is altijd kleiner dan 1
- $y = \left(\frac{1}{2}\right)^t$; als t heel groot is dan is y ongeveer 0
- $S = \frac{50}{x}$; grafiek van S heeft twee asymptoten
-



bij deze grafiek kunnen de volgende formules horen:

$$y = b \cdot g^t \text{ en } y = a \cdot x^b$$

g.



bij deze grafiek kunnen de volgende formules horen:

$$y = \log(x) \text{ en } y = a \cdot x^b$$

h.



bij deze grafiek kunnen de volgende formules horen:

$$y = \frac{10}{x} \text{ en } y = a \cdot x^b$$

Antwoord op de centrale vragen

B Theorie (om te onthouden) en opgaven

Het is belangrijk om van lineaire $y = a \cdot x + b$, exponentiele functies $y = b \cdot g^t$, machtsfuncties $y = a \cdot x^n$, logaritmisch functies $y = \log(x)$, gebroken functies $y = \frac{1}{x}$ de standaardgrafieken te kennen met hun kenmerkende eigenschappen. Daarnaast moet je ook eenvoudige vergelijkingen van de vorm $y = \text{constante}$ en een formule van de omkeersfunctie (inverse) kunnen opstellen.

T1 Opgave 26

Orden de onderstaande formules in de categorieën: lineair, exponentieel, machtsfunctie, geen van drie. Geef bij lineaire, exponentiele en machtsfuncties aan of de grafiek stijgt of daalt.

- a) $y = 100 - 2^t$
- b) $y = 100 \cdot 1,9^t$
- c) $P = 3,6^x$
- d) $A = 5 \cdot 1,2^p$
- e) $R = 120 - 0,6t$
- f) $y = 3(x + 2) - 9$
- g) $z = 100(4 \cdot 0,9)^t$
- h) $P = 3,2^{x+4}$
- i) $A = 5 \cdot 1,2^t + 120$
- j) $R = \frac{120 - 1,6t}{4}$
- k) $H = \frac{4}{2t}$
- l) $F = 5 \cdot 1,2^{-t}$
- m) $B = 120 + 3t(t + 2)$
- n) $C = 120 - (t + 2)$
- o) $D = \frac{4}{2^t}$
- p) $2x + 3y = 10$

- q) $2xy = 12$
 r) $K = 5 \cdot t^{1,4}$
 s) $L = 100 \cdot R^{0,5}$
 t) $y = \frac{10}{5t+30}$

T2 Opgave 27

Schrijf in de vorm $x = \dots$

- a. $y = 3x^4 - 5$
 b. $y = \frac{5}{x} - 6$
 c. $y = 3 + 2\sqrt{x}$
 d. $y = 3x^{\frac{1}{6}}$
 e. $y = 2x^{0,6}$
 f. $y = 2 \cdot \log(3x)$
 g. $y = 3^{0,6x} - 4$

T2 Opgave 28

t	1	7
y	26	80

Deze tabel kan horen bij een lineair verband ($y = a \cdot t + b$) maar ook bij een exponentieel verband ($y = b \cdot g^t$) of bij een machtsverband ($y = a \cdot x^b$)

- a. Maak zowel een lineaire formule, als een exponentiele formule als een machtsformule.
 b. Geef in alle drie gevallen een 'omkeerformule' (inverse functie). Dus een formule van de vorm $t = \dots$

T2 Opgave 29

Vergelijk de grafieken van de formules $P = x^n$, waarbij x tussen 0 en 1; en a positief. Beschrijf hoe de grafiek van P verandert als n van 0 naar oneindig stijgt.

T2 Opgave 30

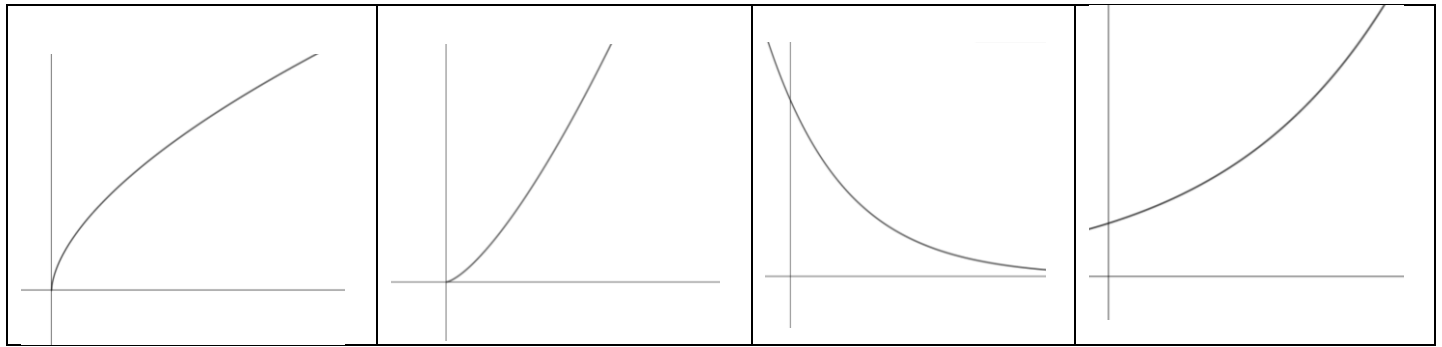
Bij tienkamp worden de prestaties op de verschillende onderdelen omgerekend naar punten via formules.

Bij de loopnummers $P = \frac{a}{t} - b$, bij werpnummers $P = a\sqrt{r} - b$, waarbij t de tijd en r de afstand en a en b positieve constanten.

Maak een schets van de grafieken van P , uitgedrukt in t of in r

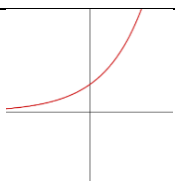
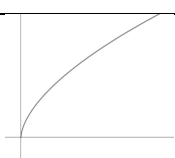
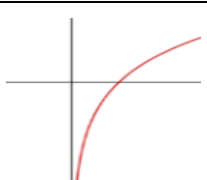
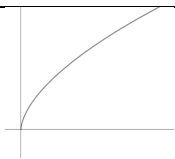
T2 Opgave 31

Bedenk formules die bij deze grafieken kunnen passen (probeer eerst de functie familie te bepalen)



T2 Opgave 32 What is out?

a. Geef steeds aan welke van de drie er niet bij hoort

1.	$y1 = 4x^{-1} \cdot 2x^{-1}$	$y2 = 6x^{-2}$	$y3 = 8x^{-2}$
2.	$y1 = 6x^{-1} + x^{-1}$	$y2 = 6x^{-2}$	$y3 = 7x^{-1}$
3.	$y1 = 6x^{-1} \cdot x^{-1}$	$y2 = 6x^{-2}$	$y3 = 7x^{-2}$
4.	$y1 = 6x^{-1} - x^{-1}$	$y2 = 6$	$y3 = 5x^{-1}$
5.	$y1 = \frac{6x^{-1}}{x^{-1}}$	$y2 = 6x$	$y3 = 6$
6.	$y1 = \frac{6x^{-2}}{x^{-1}}$	$y2 = \frac{6}{x}$	$y3 = 6$
7.		$y = 0,12x^{1,2}$	$y = 3 \cdot 1,2^t$
8.	$y = 7,22x^{0,2}$		$y = 7 \cdot 0,72^t$
9.	$y = 120t^{-3}$	$y = \frac{60}{0,5t^2}$	$y = t \frac{120}{t^3}$
10.	$y = (x + 3)^2$	$y = x^2 + 3^2$	$y = 9 + x^2$
11.	$T = 4\sqrt{A}$	$T = \sqrt{16A^2}$	$T = 4A^{0,5}$
12.	$P \cdot Q = 60$	$P = 60Q^{-1}$	$Q = \frac{60}{2P}$
		$y = 1,2\log(t)$	$y = 12 \cdot 2,3^{-0,2t}$
	$y = 7,2 \cdot 7^{-0,2x}$		$y = 3,4x^{0,2}$

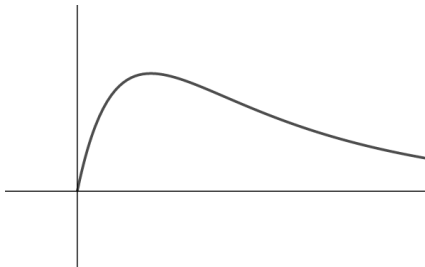
b. Bedenk nog drie drietallen waarbij er een niet bij hoort.

§5 Redeneren met formules en grafieken

A. Centrale vragen

CV 17 Oneindig gedrag van een functie

Gegeven is een grafiek waarin de concentratie van een medicijn in het bloed weergegeven is



Kenmerken van deze grafiek zijn:

- Bij $t=0$ moet $C=0$
- C moet overall positief zijn voor $t>0$ en groter
- Op den duur moet C naderen naar 0

Bereken of de volgende functies deze kenmerken vertonen:

- a. $C = 0,20(2^{-0,6t} - 2^{-3t})$
- b. $C = 0,20 \cdot 0,55^t - 0,20 \cdot 0,05^t$
- c. $C = \frac{0,2t}{t^2+10}$

CV 18 Oneindig gedrag en stijgen/dalen van functie

Een fabriek produceert een bepaald type huishoudelijk apparaat dat door veel consumenten wordt gekocht. Sommige van die apparaten gaan lang mee, andere zijn al vrij snel defect. De serviceafdeling van de fabriek verzamelt informatie over de gebruiksduur van dit type. Dat doet men door te onderzoeken op welk moment de apparaten defect raken.

Er zijn twee verschillende formules waarmee men de gebruiksduur probeert te beschrijven:

formule 1: $P = 100(1 - 0,8^t)$

formule 2: $P = 100 - \frac{600}{6+2t}$

Hierin is P het percentage apparaten dat na t jaar of eerder defect is geraakt.

Formules die gebruikt kunnen worden om de gebruiksduur te beschrijven, moeten aan de volgende vier eisen voldoen:

- eis1: op $t = 0$ moet gelden dat $P = 0$;
- eis2: als t groter is dan 0 dan moet P positief zijn;
- eis3: als t groter wordt, moet P toenemen;
- eis4: als t heel groot wordt, moet P naderen naar 100.

- a. Controleer of beide formules aan de eisen 1, 2 en 4 voldoen.

Om aan eis 3 te voldoen kun je bij formule 1 een redenering starten zoals hieronder aangegeven:

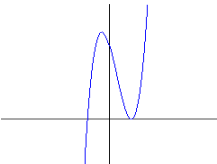
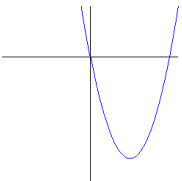
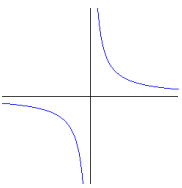
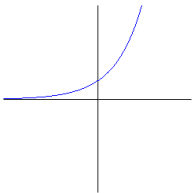
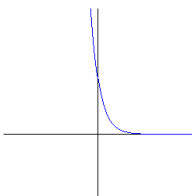
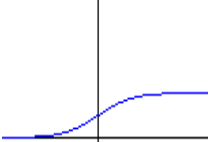
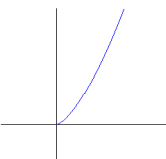
Als t groter wordt ($t \uparrow$) dan zal $0,8^t$ kleiner worden ($0,8^t \downarrow$). Dan zal $1 - 0,8^t$ groter worden ($1 - 0,8^t \uparrow$) dus ($1 - 0,8^t \uparrow$). Dan zal $100(1 - 0,8^t)$ ook groter worden ($100(1 - 0,8^t) \uparrow$)

Korter genoteerd: Als $t \uparrow$ dan zal $0,8^t \downarrow$. Dan zal $1 - 0,8^t \uparrow$. Dan ook $100(1 - 0,8^t) \uparrow$, dus P stijgt als t toeneemt. Maak ook voor de tweede formule zo'n redenering.

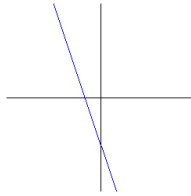
CV 19

Bij formules kunnen we een grafiek maken. Vaak zul je een GR gebruiken om grafieken te maken. Maar het is belangrijk om zelf vooraf een idee te hebben hoe die grafiek er ongeveer uit kan zien. *Door aan de hand van de formule te bepalen hoe groot y bij $x=0$ is, het oneindig gedrag te bepalen (dus als x heel groot dan $y \dots$), en door te kijken of y een stijgend/dalende functie is.*

Hier volgen steeds een formule en een grafiek. Bepaal steeds of de grafiek bij de formule kan passen. Geef steeds toelichting.

$y = 2x^2 + (x - 2)$	
$y = -x^2 + 18x$	
$y = 4x \cdot \frac{2}{5}$	
$y = 5(\sqrt{2})^x$	
$y = 200 - 3^x$	
$y = \frac{420}{2 + 8 \cdot 0,94^x}$	
$y = 3x^{0,83}$	

$$y = \frac{-4x - 12}{20}$$



Indien je moeite had met deze centrale vragen kijk dan eerst naar onderstaande V opgaven

Opgave V1

Van verschillende basisfuncties (lineair, exponentieel, machts-, gebroken functies) weten we het oneindig gedrag, d.w.z. we weten hoe groot de y-waarden worden als x heel groot wordt (dat zie je als je kijkt naar de staart de grafiek). Bekijk daarvoor nog eens de theorie van de vorige paragraaf.

We bekijken de volgende drie formules en beredeneren hoe groot de y-waarden worden als t heel groot wordt.

Voorbeeld 1: $y = 20 \cdot 0,52^t$

Vul de redenering aan:

Als t heel groot dan $0,52^t$ (kies uit heel groot positief, heel negatief, bijna 0, bijna); dus y wordt dan

Voorbeeld 2: $y = 4 + \frac{200}{2t+1}$

Vul de redenering aan:

Als t heel groot dan $2t + 1$; dan $\frac{200}{2t+1}$; dus y wordt dan

Voorbeeld 3: $y = 4t^2 - 2000t$

Vul de redenering aan:

Als t heel groot dan $4t^2$, maar ook $2000t$; $4t^2$ is sterker/zwakker (kies) dan $2000t$; dus y wordt dan

Opgave V2

We bekijken de formule: $N = \frac{60}{30+0,8^t}$

Vul de redenering aan:

Als t groter wordt dan $0,8^t$ groter/kleiner (kies), dan $30 + 0,8^t$ groter/kleiner; dan $\frac{60}{30+0,8^t}$ groter/kleiner

B Theorie (om te onthouden) en opgaven

Voordat je met formules gaat rekenen is het altijd verstandig om eerst te kijken of je op basis van de formule al e.e.a. kan zien. Vaak kun je bijvoorbeeld al beredeneren wat er op den duur met de y-waarden gebeurt (als x heel groot is). Ook kan je vaak beredeneren of de y-waarden zullen stijgen of dalen. Je gebruikt daarbij je kennis van de basisfuncties uit de vorige paragraaf: lineaire functies $y = a \cdot x + b$, exponentiële functies $y = b \cdot g^t$, machtsfuncties $y = a \cdot x^n$, logaritmisch functies $y = {}^g\log(x)$, gebroken functies $y = \frac{1}{x}$.

Een voorbeelden van zulke redenering zijn:

- a. Beredeneer dat de functie van $y = 100 \cdot 0,93^t + 50$ daalt.

Als t groter wordt ($t \uparrow$) dan zal $0,93^t$ kleiner worden ($0,93^t \downarrow$). Dan zal $100 \cdot 0,93^t$ ook kleiner worden ($100 \cdot 0,93^t \downarrow$) en dan zal $100 \cdot 0,93^t + 50$ ook kleiner worden ($100 \cdot 1,2^t + 50 \downarrow$), dus y wordt groter ($y \downarrow$).

- b. Beredeneer dat de uitkomsten van de functie van $y = 100 \cdot 0,93^t + 50$ op den duur naar een grenswaarde naderen.

Als t heel groot is dan zal $0,93^t$ ongeveer 0 worden ($0,93^t \approx 0$). Dan zal $100 \cdot 0,93^t$ ook bijna 0 worden ($100 \cdot 0,93^t \approx 0$) en dus dan zal $100 \cdot 0,93^t + 50$ naar 50 naderen.

Bedenk bij meer complexe functies dat machten als x^2 , x^3 , enzovoort op den duur altijd sterker zijn dan x (en x^3 sterker dan x^2 enzovoort). Bij $y = 0,01x^3 - 25x - 32000$ geldt dus dat x^3 sterker is dan de andere twee termen ($-25x$ en -32000) en dat die twee termen in de formule dus verwaarloosbaar zijn bij grote waarden van x . Bekijk je deze functie voor kleine waarden van x dan is de term $0,01x^3$ verwaarloosbaar en kan de formule redelijk benaderd worden door de formule $y = -25x - 32000$.

Daarnaast moet je weten dat exponentiële verbanden altijd sterker zijn dan machten. Dus bij $y = x^{120} \cdot 0,6^x$ zal op den duur de factor x^{120} in de formule verwaarloosbaar zijn ten opzichte van de factor $0,6^x$. De y-waarden zullen naar 0 naderen.

T1 Opgave 33

Gegeven zijn de formules:

A. $y = \frac{120}{60+4x} + 3$

B. $y = 30 + 70 \cdot 2^{-0,2t}$

C. $y = 100 - 70 \cdot x^{-0,2}$

D. $y = 120 + 50 \cdot 1,09^t$

E. $y = 30 + 70 \cdot x^{0,8}$

F. $y = \frac{130}{2 + 2x^{0,5}}$

G. $y = \frac{120}{40 + 20 \cdot 0,93^t}$

H. $y = \frac{120}{60 + 20 \cdot 1,93^t}$

I. $y = \frac{4200 + 25x}{60 + x}$

J. $P = \frac{240s^2 + 10s + 20}{4s^2 + 5s + 10}$

- a. Beredeneer aan de hand van de formule het *oneindig gedrag* van y (dus hoe groot worden de y-waarden als x (of t) heel groot wordt

Bij sommige formules kun je eenvoudig zien of y steeds stijgt of daalt. Bij andere is dat (veel) ingewikkelder.

- b. Beredeneer voor de formules A tm H aan de hand van de formule dat y steeds stijgt of steeds daalt (voor x (of t) groter of gelijk aan 0)

T2 Opgave 34

De lengte van een zonnebloem kan beschreven worden door de formule $L = \frac{400}{1+399 \cdot 0,55^t}$, waarbij t de tijd in weken.

Beredeneer aan de hand van de formule dat L stijgt en op den duur nadert naar een grenswaarde. Let op dat hier twee dingen gevraagd worden.

T1 Opgave 35

Een tuinder heeft een waterreservoir waarin hij regenwater opvangt. In een periode van droogte gebruikt hij het water om de planten water te geven. De formule $V = \frac{140}{(0,04t+1)^2}$ geeft de hoeveelheid water in het reservoir in m^3 na t dagen.

- Beredeneer aan de hand van de formule dat V daalt als t toeneemt.
- Beredeneer aan de hand van de formule het oneindig gedrag van V .
- Schets zonder GR een grafiek van V .

T1 Opgave 36

Beredeneer aan de hand van de formule

- dat de uitkomsten van $y = 2^{-x^2} \cdot x^2$ nooit negatief zijn.
- dat de uitkomsten van $y = \frac{-30}{x^2+4}$ altijd negatief zijn.

T2 Opgave 37

De grenzen van het 95% betrouwbaarheidsinterval kunnen berekend worden met de formules:

$$p - \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} \text{ tot } p + \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}, \text{ waarbij } p \text{ de steekproefproportie en } n \text{ de steekproefomvang.}$$

Beredeneer aan de hand van de formules dat voor grotere steekproefomvang de grenzen dichter bij elkaar liggen (en het betrouwbaarheidsinterval dus kleiner is)

T2 Opgave 38

Stel dat p staat voor de kans dat bij een bepaalde controleactie een willekeurige gecontroleerde automobilisten te veel gedronken heeft. We kijken nu naar de kans dat een gecontroleerde automobilist niet te veel gedronken heeft. Deze kans K is afhankelijk van p : $K = \frac{1-p}{1-0,60p}$.

Het is niet direct uit de formule af te lezen dat, als p toeneemt K kleiner wordt.

Toon aan dat K ook te schrijven is als $K = \frac{5}{3} - \frac{\frac{2}{3}}{1-0,60p}$ en toon daarmee aan dat K daalt als p toeneemt.

T2 Opgave 39

We bekijken de formule $y = -0,25x^2 + 600x + 80$

Geef commentaar (is de redenering correct of niet; missen er tussenstappen) op de volgende redeneringen

Voor y geldt:

- voor hele grote waarden van x is y te benaderen door $\dots$ is y te benaderen door $y = -0,25x^2$
- voor hele kleine waarden van x (in de buurt van $x=0$) is y te benaderen door $y = 600x + 800$
- voor x waarden groter dan 0 worden de uitkomsten y kleiner als x toeneemt omdat de x^2 sterker is dan $600x$.

T2 Opgave 40

Bij het ontwerpen van een weg moet er rekening gehouden worden met het schoon regenen van de weg.

Tijdens regenbuien wordt het vuil van de weg gespoeld. Het percentage vuil dat weggespoeld wordt (P) is afhankelijk van de tijd dat het regent (t in uren): $P = 100(1 - 10^{-ct})$

In deze formule geldt dat c afhankelijk van de weg. Voor betonwegen geldt $c = 0,02$, terwijl voor asfalt geldt $c = 0,01$.

a. Teken de grafieken voor beide wegen en zeg welke weg sneller schoongespoeld wordt.

Voor een vaste, positieve waarde van c geldt altijd: P is een stijgende functie van t (als t groter wordt dan stijgt P)

b. Toon dit aan met een redenering aan de hand van de formule $P = 100(1 - 10^{-ct})$, waarbij c positief.

T1 Opgave 41

Beredeneer of er waarde(n) voor x zijn waarvoor geldt:

- $2(-2x + 60) < 6\sqrt{x} - 4$
- $30 - x^2 > 14 + (x - 20)$
- $2 - \frac{100}{x^2 + 100} > 10$
- $\frac{1400}{10 + 90 \cdot 0,55^x} < 40$

T2 Opgave 42

De totale kosten per woning die de gemeente maakt, noemen we K . Voor het verband tussen K en x , het aantal woningen per hectare, kan de volgende formule worden afgeleid: $K = \frac{170}{x} + 0,4x^{0,8}$, waarbij K in duizenden gulden.

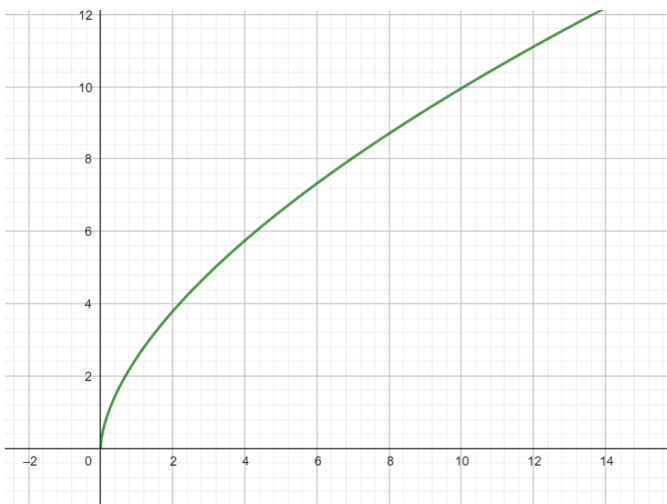
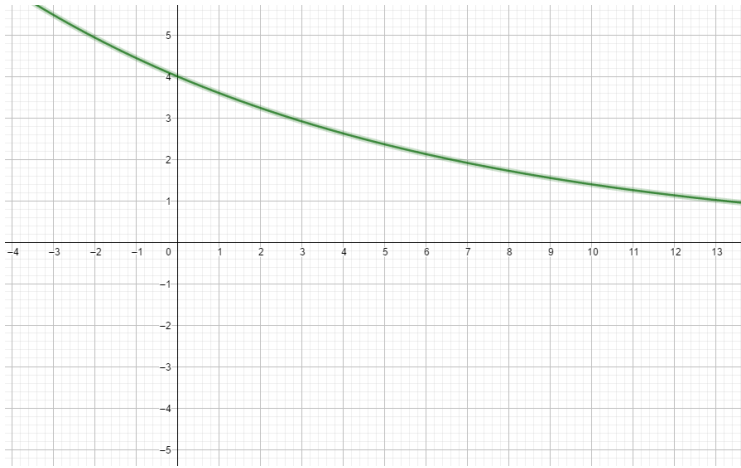
Beredeneer aan de hand van de formule dat de kosten per woning heel groot is als er heel weinig woningen per hectare zijn en ook als er heel veel woningen per hectare zijn, en dat er dus een aantal woningen is waarbij de kosten K minimaal zijn.

§6 Formules maken en modelleren

A. Centrale vragen

CV 20 formules maken met bekende vorm

Bedenk een mogelijke functiefamilie bij de volgende grafieken en maak een formule



CV 21 formule maken met onbekende vorm

Een woning wordt gebouwd op een rechthoekig stuk land dat aan het water ligt. De oppervlakte van het stuk land moet 1600 m^2 worden. Maar de afmetingen van het stuk land kunnen nog variëren. Noem de breedte x . Zie figuur.
water

x

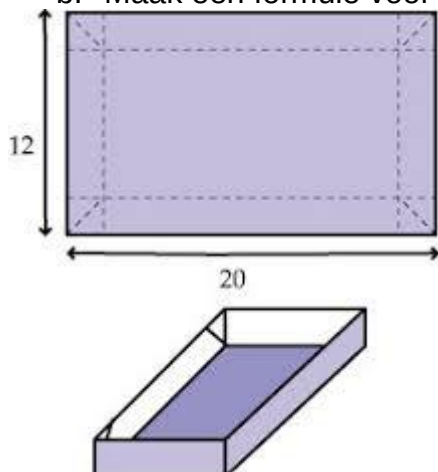
Rechthoekig stuk land

- a. Maak een formule voor de omtrek, uitgedrukt in x .

CV 22

Van een blaadje van 12 cm bij 20 cm wordt een (open) doosje gevouwen, door aan iedere kant een strook met breedte x om te vouwen. Zie figuur hieronder. De hoogte van het doosje wordt dus x .

b. Maak een formule voor de inhoud van het (open) doosje.



Iemand rijdt 600 km over autowegen naar zijn vakantiebestemming. De reistijd T (in uren) hangt af van de rijsnelheid v (in km/u). In de eerste helft (300 km) van de reis rijdt ze met een snelheid van v km/u en in de tweede helft met een gemiddelde snelheid van $v+20$ km/u.

c. Maak een formule voor de totale reistijd.

d. Hierboven werd in alle drie de voorbeelden steeds een (wiskundig) model gemaakt. Daarbij worden altijd aannamen gemaakt. Geef bij elk voorbeeld enkele aannamen die gemaakt worden.

CV 23 formules maken door omkeren

Schrijf de formules om in de vorm $x = \dots$ (maak omkeerformules)

a. $A = 100(1 - 0,8^x)$

b. $A = \frac{200}{1+3 \cdot 0,92^x}$

c. $A = 10^{c \cdot x + 2}$

d. $A = \log(2x + 3)$

CV 24 formules maken door formules te schakelen

Na een aanvaring zinkt een olietanker op zee en loopt er olie uit de tanker. We nemen aan dat een cirkelvormige olievlek op zee ontstaat. Per dag wordt bijgehouden hoe groot de diameter van de cirkelvormige olievlek is: $D = 5\sqrt{t}$, hierin is D de diameter in km en t de tijd in dagen.

De oppervlakte van de cirkel kan berekend worden met de formule $Opp = 0,25 \cdot \pi \cdot D^2$.

Maak een formule voor Opp uitgedrukt in t , en leg daarmee uit dat men er van uit mag gaan dat er iedere dag evenveel olie uit de tanker loopt.

CV 25 formules maken door herschrijven

Maak een formule in de aangegeven vorm

a. Schrijf $y = 3(2x - 6)(x - 1) - 4(-3x + 10)$ in de vorm $y = ax^2 + bx + c$

b. Schrijf $A = 120 \cdot 0,92^x$ in de vorm $A = 10^{a \cdot x + b}$

c. Schrijf $\log(y) = 0,3x + 2,12$ in de vorm $y = a \cdot b^x$

d. Schrijf $\log(y) = 0,3 \log(x) + 2,12$ in de vorm $y = a \cdot x^b$

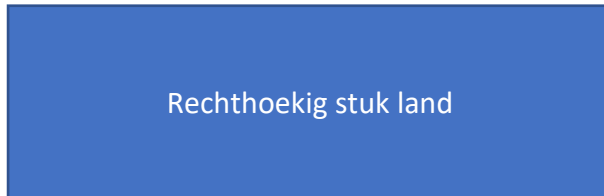
Indien je moeite had met deze centrale vragen kijk dan eerst naar onderstaande V opgaven

V Opgave 1

Op de camping mag je met een touw een rechthoekig stuk land afzetten. Nu is het slim om het stuk land langs het water te leggen omdat je dan het touw voor een zijde niet hoeft te gebruiken. Een rechthoekig stuk land moet een oppervlakte krijgen van 1600 m^2 .

water

x



Maak een getallenvoorbeeld: stel $x=20$. Bereken nu de omtrek. En hoe groot is de omtrek als $x=25$?

Maak nu een formule voor de omtrek van dit stuk land, uitgedrukt in x .

V Opgave 2

- Gegeven de formule $K = 500 + B \cdot Q^3$. Verder weet je dat $Q = 2$. Maak een formule waarbij je B uitdrukt in K .
Vul eerst Q in en maak dan B vrij.
- Gegeven $K = \frac{15R}{A}$ en $A = 3,14R^2$; maak een formule voor K uitgedrukt in R .
- Gegeven de formules $K = 4V + 6B$, $V = 0,5x$, en $B = \frac{10}{x}$; maak een formule voor K uitgedrukt in x .

V Opgave 3

In een formule de 'log wegwerken' kan via de vormen ' $\log(\dots)=\log(\dots)$ ' en via ' $\log(\dots)=\dots$ '

Werk de $\log(\dots)$ weg in de volgende formules:

- $\log(P) = \log(2x + 3)$
- $\log(P) = 2x + 5$
- $\log(P) = \log(x) + \log(x) + 2$ (maak eerst 1 $\log$ aan rechterkant van formule)

Theorie (om te onthouden) en opgaven

We zien hierboven een aantal soorten opgaven waarin steeds een formule gevraagd wordt. Ten eerste hebben we opgaven waarin naar een bekend soort formule gevraagd wordt, nl. lineair of exponentieel; je weet dan hoe de formule er gaat uitzien. Ten tweede, moet je soms formules combineren of omkeren om tot een nieuwe formule te komen. Ten derde, soms moet je formules maken vanuit een context.

Om te onthouden:

- Zorg dat je de standaardfuncties kent (met hun grafieken) en ook de omkeerformules van bekende standaardfuncties kent, zoals bij $y = 2x + 6$, $y = x^5$, $y = x^{0,6}$

- ii. Bij het opstellen van lineaire en exponentiele formules kun je altijd een (klein) tabelletje gebruiken; dus lees waarden uit grafiek en/of context af en zet die in een tabelletje.
- iii. Bij het combineren van twee formules tot een nieuwe, vul je vaak een hele formule in een andere in, zoals bijv. bij $A = 2B + C$ en $B = 3C + 5$ en je moet A uitdrukken in C (vul dan de tweede formule van B in voor B in eerste formule)
- iv. Moet je een formule uit een context maken, maak dan altijd eerst een getallenvoorbeeld, waarbij je de berekeningen laat staan.

Bij wiskundige modellen kun je allerlei vragen stellen, zoals Waar komt het model vandaan? Kan het model getest worden? Kan het model aangepast worden? Bij twee of meer modellen, waarin verschillen de modellen?

T1 Opgave 43

Druk t steeds uit in p , dus $t = \dots$,

$$6t - 20 = 12 + 4p$$

$$t^2 + 4 = 20p$$

$$4(t - 2) - 20p = 0$$

$$\frac{12}{p} = 20t$$

$$p = \frac{1200}{600 + t}$$

$$p = (t + 3)^2 - 4$$

T2 Opgave 44

Gegeven $P = 100 - 100 \left(\frac{50\,000}{x} \right)^{1,77}$ en $P = 100 - 100 \left(\frac{71\,396}{y} \right)^{1,77}$

- a. Toon aan dat het verband tussen beide formules een evenredig verband $y = a \cdot x$ is.

Een wiskundige heeft een formule opgesteld voor het aantal te verwachten Elfstedentochten E_w in de 21^e eeuw. Er is hierbij rekening gehouden met externe factoren: $E_w = \frac{0,74}{V} \cdot (p - p \cdot 0,60^V)$

Hierin is V het verschil in wintertemperatuur aan het einde van de 21^e eeuw en de gemiddelde wintertemperatuur van de 20^e eeuw in $^{\circ}\text{C}$ en p is het percentage werkelijk gereden tochten als een Elfstedentocht mogelijk is. Als V 3,6 $^{\circ}$ zal zijn, kan de formule herschreven worden tot de vorm: $E_w = a \cdot p$

- b. Laat dit zien en bereken a .

De gewichtstoename T in kg per dag van Morgan op een bepaalde dag hangt af van zijn energiebehoefte E_b op die dag. Er geldt: $T = 0,000128(5000 - E_b)$

Wanneer de formule gecombineerd wordt met de formule $E_b = 33,6 \cdot G$, ontstaat een formule van T uitgedrukt in G . Deze nieuwe vorm is te herleiden tot de vorm $T = a \cdot G + b$.

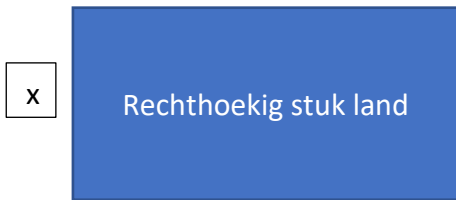
- c. Bereken a en b .

De formule $R = 100 \cdot \sqrt{\frac{A}{4,9}}$ geeft het verband weer tussen de reactietijd R in milliseconden en A de gemiddelde vangafstand in cm. Deze formule is te herleiden tot de vorm $A = c \cdot R^2$.

- d. Bereken c met behulp van deze herleiding.

T1 Opgave 45

Een rechthoekig stuk land moet een omtrek krijgen van 300 m. De lengte noemen we x . Zie figuur.



Maak een formule voor de oppervlakte, uitgedrukt in x .

T1 Opgave 46

Van een fabrikant kennen we de opbrengstfunctie $TO = -0,5x^2 + 84x$ en de kostenfunctie $TK = 20 + 0,8x^2 + 2x$

De winstfunctie wordt berekend door $TO - TK$

Maak een formule voor de winstfunctie en schrijf die in de vorm $y = ax^2 + bx + c$

T1 Opgave 47

Een ondernemer heeft de volgende gegevens ter beschikking: het verband tussen de prijs p en het aantal verkochte producten wordt gegeven door $p = 120 - 2q$, waarbij q het aantal verkochte produkten, p de prijs in euro's; daarnaast geldt dat $k = 2q + 25$, waarbij k het bedrag van de totale kosten in euro's.

Maak een formule voor de winst. Voor welke prijs p is de winst maximaal?

T1 Opgave 48

Gegeven de formule $B = 30 \cdot 0,87^t$

- Schrijf de formule in de vorm: $B = 10 \cdot \dots$
- Schrijf de formule in de vorm $B = 30 \cdot 0,5^{t/c}$, waarbij c de verdubbelingstijd is.
- Schrijf de formule in de vorm: $t = \dots$

T1 Opgave 49

Gegeven $M = 3k + 5$ en $A = -2k$

Maak een formule waarbij d en P uitgedrukt worden in k .
Schrijf daarna de formules zo kort mogelijk.

- $d = k \cdot M - 9k + A^2$
- $P = A \cdot M - 2M + A^3$

T1 Opgave 50

Gegeven de formules $F = \frac{mv^2}{r}$ en $F = Bqv$ met de variabelen m, v, r, B, q

Toon aan dat hieruit volgt dat $r = \frac{mv}{Bq}$

T2 Opgave 51

Maak een formule in de aangegeven vorm

- Schrijf $y = 2x(x - 1) - 3(x - 7)^2$ in de vorm $y = ax^2 + bx + c$
- Schrijf $y = \frac{200}{4+12 \cdot 0,94^t}$ in de vorm $y = \frac{c}{1+10^{a \cdot t+b}}$
- Schrijf $y = \log(2 \cdot 1,2^t)$ in de vorm $y = a \cdot \log(t) + b$
- Schrijf $\log(y) = -2,3 \log(t) + 3,4$ in de vorm $y = a \cdot t^b$
- Schrijf $\log(y) = -2,3t + 3,4$ in de vorm $y = a \cdot b^t$

T1 Opgave 52

Eind jaren 80 verscheen in de Volkskrant een artikel over de enorme groei van het aantal nijlbaarzen in het Victoriameer (dat in de buurt van Kenia ligt en tweemaal zo groot is als heel Nederland).

In 1960 werden er 400 nijlbaarzen uitgezet in het meer. In 1988 was het aantal nijlbaarzen uitgegroeid tot 400 miljoen (400000000). Een natuurramp dreigde.

- Toon aan, uitgaande van exponentiële groei, dat de jaarlijkse groeifactor gelijk is aan 1,638 en bereken hiermee hoe lang het duurt voordat het aantal nijlbaarzen verdubbeld is.

Om het aantal nijlbaarzen in de toekomst te voorspellen kan gebruik gemaakt worden van een exponentieel model maar ook van een lineair model.

- Bereken volgens beide modellen het aantal nijlbaarzen in 2010.

Het exponentiële model kan geschreven worden met een formule in de vorm van $N = 400 \cdot g^t$ maar ook in de vorm $N = 10^{a \cdot t+b}$, waarbij N het aantal nijlbaarzen is en t het aantal jaren na 1960.

- Bereken de formule met de vorm $N = 10^{a \cdot t+b}$.

Omdat het aantal nijlbaarzen niet onbepaald kan doorgroeien past met de wiskundige modellen meestal aan. Vaak zie je dan modellen van de vorm: $N = \frac{680000000}{1+1700000 \cdot 0,591^t}$

- Toon met een redenering aan dat dit model aan de volgende eisen voldoet:

- Het aantal nijlbaarzen zal steeds stijgen.
- Het aantal nijlbaarzen zal op den duur stabiliseren.

T2 Opgave 53 Honkbal, (ontleend aan 2014-I)

In Amerika is honkbal een populaire sport. De resultaten van Amerikaanse topteams worden zorgvuldig bijgehouden. Na elke wedstrijd wordt genoteerd hoeveel punten een team gescoord heeft (scorepunten) en hoeveel tegenpunten het team heeft moeten incasseren. Ook wordt genoteerd of het team gewonnen of verloren heeft. Gelijkspel is onmogelijk. Aan het einde van het seizoen wordt van ieder team het aantal gewonnen wedstrijden en het totaal aantal scorepunten en tegenpunten gepubliceerd. Er lijkt een verband te zijn tussen het percentage

gewonnen wedstrijden en het totaal aantal scorepunten en tegenpunten van een team. Over een heel seizoen geldt voor een team bij benadering de volgende formule:

$$P = \frac{100 \cdot S^2}{S^2 + T^2} \quad (1)$$

Hierin is P het percentage gewonnen wedstrijden in het seizoen, S het totaal aantal scorepunten en T het totaal aantal tegenpunten in het seizoen.

- a. Test deze formule (d.w.z. bereken P en beredeneer dat de uitkomst 'past' in de context) bij
 - i. $T = 0$
 - ii. $S = 0$
 - iii. $T = S$

- b. Beredeneer aan de hand van de formule 'als T groter wordt (en S blijft gelijk) dat dan P kleiner wordt'.

Lastiger is om aan de hand van deze formule te beredeneren dat als S groter wordt (en T blijft gelijk) dat dan P groter wordt. Twee mensen herschrijven beide deze formule naar een andere formule:

Persoon 1: $P = \frac{100}{1 + (\frac{T}{S})^2}$ (2) Persoon 2: $P = 100 - \frac{100T^2}{S^2 + T^2}$ (3)

- c. Beredeneer aan de hand van de formules (2) en (3) dat geldt 'als S groter wordt (en T blijft gelijk) dat dan wordt P groter'
- d. De vraag is echter of beide formules correct zijn. Onderzoek of beide formules gelijkwaardig zijn met formule (1)

T2 Opgave 54

De formule $N = a - b \cdot 0,6^t$ geeft het aantal ransuilen in een omgeving. Bij $t=0$ moet de formule 178 ransuilen geven, en bij $t=2$ 205 ransuilen. Welke waarde van a en voor b moet dan gekozen worden?

T2 Opgave 55

Om te bepalen of je op voldoende grote afstand achter je voorligger rijdt, kies je tijdens het rijden een herkenbaar punt langs de weg. Op het moment dat je voorligger dit punt passeert, tel je 2 seconden af.

Als je vervolgens binnen deze 2 seconden zelf voorbij dit punt rijdt, zit je te dicht op je voorligger en zul je vaart moeten minderen.

Er zijn ook formules voor de veilige afstand A , namelijk $A = 0,005v^2 + 0,28v$, waarbij v de snelheid in km/u en A de afstand in meters.

Bij een snelheid van 120 km/u is deze formule veel strenger dan de 2 sec regel.

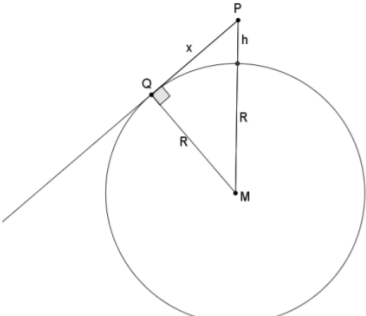
- c. Onderzoek bij welk aantal sec de veilige afstand van beide modellen even groot is.
- d. Noem een aantal aannamen die bij deze modellen gemaakt worden.

T2 Opgave 56

Het is prachtig weer, je staat op het strand en kijkt naar de horizon. Hoe ver kun je kijken?

We maken een wiskundig model.

- a. Bekijk hieronder de stappen die in de linker kolom staan. Geef rechts steeds uitleg waarom de uitspraak in linker kolom correct is.

Stappen van modelleren	Waarom is dit correct?
Maak een schets, met de aarde, een persoon en een kijklijn naar de horizon. R is de straal van de aarde in m, h de hoogte in m, en x de kijkafstand in km. De omtrek van de aarde is 40000km 	
$R^2 + x^2 = (R+h)^2$	
$x = \sqrt{2Rh + h^2}$	
$x \approx \sqrt{2Rh}$ (benadering van x)	
R is ongeveer 6370000 m (zie voor hint hieronder)	
$x \approx 3,6\sqrt{h}$	

Hint: omtrek cirkel is $2 \cdot \pi \cdot \text{straal}$

- b. Welke aannamen hebben we bij dit model gemaakt? Zijn de aannamen realistisch en acceptabel?

§7 Probleemaanpak en Gemengde Opgaven

Probleemaanpak bij algebra

Je gaat nu gemengde opgaven maken waarbij je algebraïsche vaardigheden moet inzetten om de vragen te beantwoorden. Hoe pak je dat nou aan? Lees onderstaande aandachtspunten door.

(A&B) Soms zul je direct herkennen hoe je aan het werk zou kunnen gaan: je herkent het probleem en/of de probleem-familie en kent een (standaard) aanpak. In je voorbereidingen moet je dus aandacht besteed hebben aan een repertoire van probleem-families. Dit zijn bouwstenen waarmee je problemen kunt aanpakken. Controleer wel altijd achteraf of je oplossing 'logisch' past bij de opgave.

Maar soms zul je geen enkel idee hebben wat je zou kunnen gaan doen. Dan kun je toch op verschillende manieren te werk gaan.

(C) Probeer het hele probleem in **deelproblemen** te hakken die je wel herkent: je maakt dan als het ware een stappenplan voor jezelf.

(D) Als dat niet lukt, kun je op zoek gaan naar **signaalwoorden**, zoals bijvoorbeeld 'gelijkmatige groei' (wijst op lineair model), of 'steeds relatief gelijke groei' (wijst op vaste groeifactor ofwel exponentiele groei).

Andere mogelijke associaties zijn bijvoorbeeld:

Gaat het over **breuken**, bedenk dan dat je alleen gelijknamige breuken kunt optellen en dat je breuken gemakkelijk kunt vermenigvuldigen ($\frac{1}{3} \cdot \frac{2}{5} = \frac{2}{15}$).

Gaat het over **procenten**, bedenk dan dat je berekeningen op drie manieren kunt maken: via de 1%-methode

(1% = ...), via een verhoudingstabel of via een vermenigvuldigingsfactor (5% van ... is 0,05*...).

Gaat het over **verhoudingen**, bekijk dan goed wat het totaal is dat verdeeld moet worden en het totaal van de verhoudingsgetallen.

Gaat het over **machten**, bedenk dan dat je alleen gelijksoortige machten kunt optellen ($2x^3 + 5x^3 = 7x^3$) en dat je machten wel altijd kan vermenigvuldigen ($x^2 \cdot x^3 = x^5$), delen en tot een macht kan verheffen.

Gaat het over **logaritmen**, bedenk dan dat je logaritmen alleen kan optellen $\log(a) + \log(b) = \log(a \cdot b)$

Spelen **haakjes** een rol, bedenk dan dat deze dienen om de volgorde van berekeningen te beïnvloeden en om "dingen bij elkaar te houden die bij elkaar horen".

Moet je een **formule maken**, bekijk dan eerst goed of

- Er gevraagd wordt naar het opstellen van een **formule met een bekende vorm**, bijvoorbeeld een lineaire of exponentiële formule bij een gegeven verhaal, tabel of grafiek.
- Je zelf een formule moet opstellen bij een gegeven context **zonder dat de vorm van de formule al bekend is**. Volg dan het verhaal van de context met een zelfgekozen getallenvoorbeeld en reken dit getallenvoorbeeld eens door.

Probeer van daaruit te algebraïseren dat wil zeggen vervang het gekozen getallenvoorbeeld door een variabele.

- Je twee (of meer) formules moet combineren (**schakelen**). Dan moet je de ene formule invullen in de andere formule. Dat is een beginstap die je dan eigenlijk altijd wel kunt zetten.
- Je een formule moet **omkeren**. Dan kun je zelf een pijlenketting maken bij de gegeven formule en dan die pijlenketting omkeren
- Je een formule in **een bepaalde vorm** moet schrijven (herleiden). Dan komt het erop neer om rekenregels toe te gaan passen. Dit kunnen rekenregels zijn voor breuken, machten, wortels, haakjes etc.

Gaat het over **formules en grafieken**, bekijk dan of je alle x -waarden kunt invullen, wat het snijpunt is met de y -as, of je de snijpunten met de x -as makkelijk kunt vinden, of de grafiek steeds stijgend of dalend verloopt, en wat het “oneindig gedrag” is.

(E) Als je ook nu nog geen idee hebt, dan kun je bijvoorbeeld een **schets** van de situatie maken of de situatie in een schema zetten.

Daarnaast is het maken van een **getallenvoorbeeld** nuttig; kies daarbij ‘mooie’ getallen en werk de berekeningen zo min mogelijk uit.

Ook kun je een **willekeurige uitkomst ‘gokken’** en vervolgens nagaan dat deze uitkomst niet mogelijk is.

Dit zijn dingen die experts ook doen als zij met een probleem worden geconfronteerd dat zij nog niet eerder hebben gezien en waarvan zij niet direct inzien hoe ze het zouden moeten oplossen.

Hieronder zie je de stappen nog eens schematisch in beeld:

Herkenningsniveau	Heuristieken
A. Gehele herkenning, de oplossing wordt direct herkend	Niet nodig
B. Een probleem-familie wordt herkend; de oplossing is niet direct concreet aanwezig maar een vaste oplossingswijze is bekend	Zoek ‘parameters’ van de probleem-familie of gebruik kenmerken van probleem-familie
C. Het probleem kan opgedeeld worden in een aantal familieproblemen	Los de deelproblemen op en voeg oplossingen samen, of, los de deelproblemen achter elkaar op
D. Enkel een (relevant) kenmerk van het probleem wordt herkend	
E. Er is geen herkenning, maar strategisch zoeken wordt gestart	Gebruik algemene heuristieken zoals Polya: bekijk aparte gevallen, bekijk extremen, maak probleem kleiner, bekijk andere representaties

Probeer te beginnen om een aanpak te bedenken. Belangrijk is dat je niet te snel opgeeft.

T2 Opgave 57

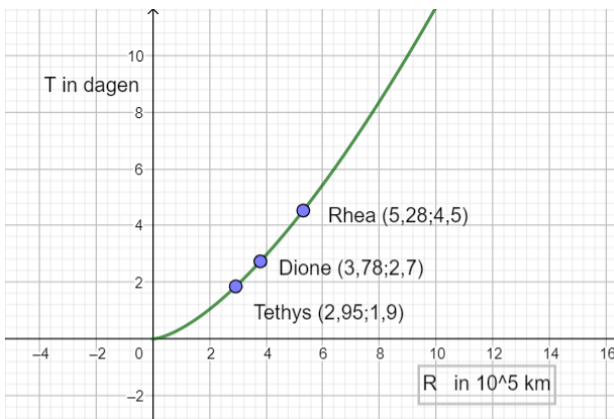
In het jaar 2000 beloofde de Nederlandse regering om het CO_2 -gehalte in de lucht terug te dringen. In 30 jaar tijd zou het CO_2 -gehalte met 49% af moeten nemen.

Stel het CO_2 -gehalte in het jaar 2000 op 100.

De afname in deze 30 jaar kan met een lineair maar ook met een exponentieel model beschreven worden. Beide modellen geven in 2000 en 2030 dezelfde uitkomsten maar niet voor de andere jaren.

Onderzoek hoe groot het verschil tussen beide modellen tussen 2000 en 2030 kan worden.

T2 Opgave 58



De planeet Saturnus heeft vele manen. In de grafiek zie je voor drie manen het verband tussen de omlooptijd T (in dagen) en de straal van de baan R (in 10^5 km).

Sterrenkundigen hebben aangetoond dat geldt dat $T = a \cdot R^{1,5}$

a. Laat met een berekening zien dat a ongeveer 0,37 is.

b. Maak een formule die R uitdrukt in T

Steeds als R twee keer zo groot wordt, verandert T steeds op eenzelfde wijze.

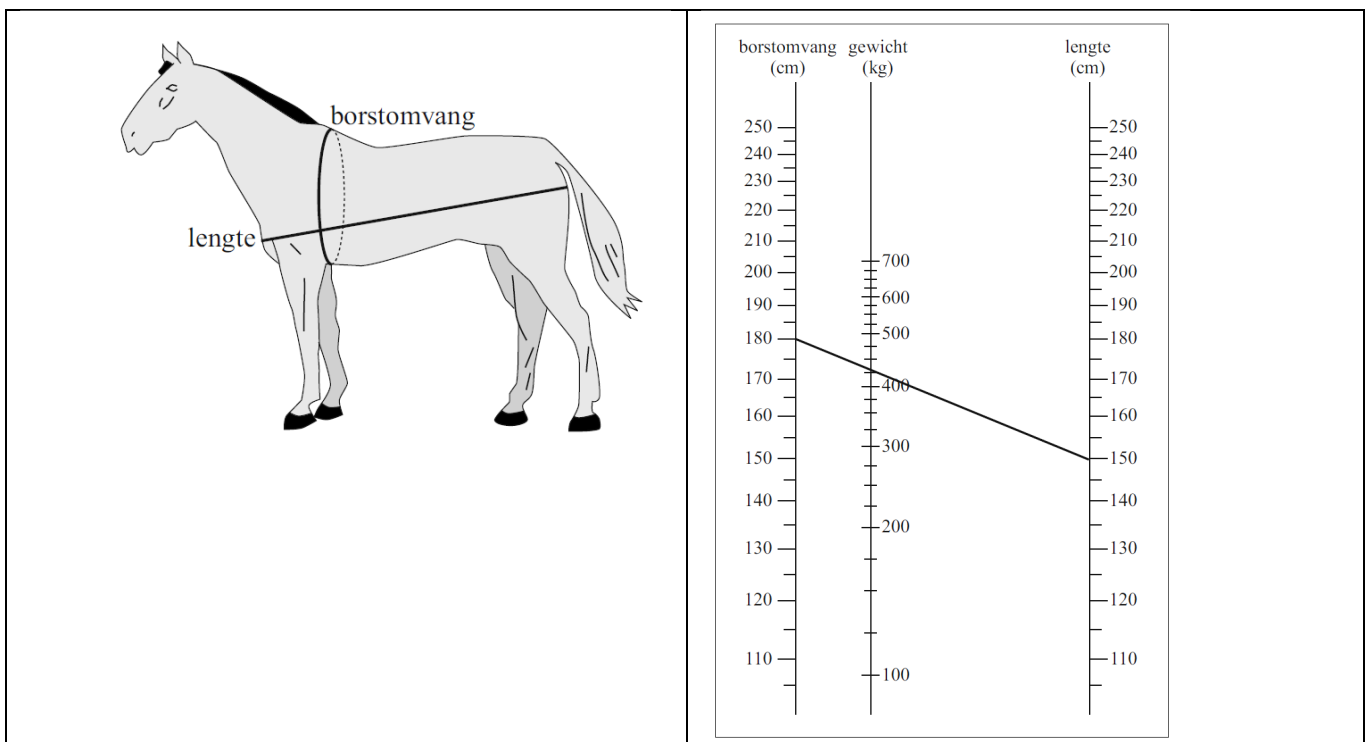
c. Toon aan dat dit geldt (een getallenvoorbeeld is niet voldoende)

Vaak wordt een dergelijke formule voor T afgeleid uit de formule $\log(T) = -0,43 + 1,5\log(R)$

d. Toon aan hoe uit $\log(T) = -0,43 + 1,5\log(R)$ de formule $T = 0,37 \cdot R^{1,5}$

T2 Opgave 59

Voor het verzorgen van paarden is het belangrijk het gewicht te weten. Met behulp van borstomvang en lengte (zie figuur) kan het gewicht geschat worden. Daarbij kan een nomogram gebruikt worden. In de figuur is aangegeven hoe een lengte van 150 cm en een borstomvang van 180 cm het gewicht (op de middelste as) afgelezen kan worden: 430 kg.



We vergelijken twee paarden met een even grote lengte. De borstomvang van het ene paard is 1,5 keer zo groot als die van het andere paard.

- a. Onderzoek met de figuur hierboven (nomogram) of dit betekent dat het gewicht van het paard dan ook 1,5 keer zo groot is. Licht je antwoord toe.

Er zijn ook formules om het gewicht van een paard te schatten op basis van de lengte en borstomvang.

Hier zie je er een: $G = \frac{B^2 \cdot L}{11900}$, waarbij B de borstomvang in cm, L de lengte in cm en G het gewicht in kg. Bij deze formule geldt dat als een paard 1,5 keer zo lang is, het ook 1,5 keer zo zwaar is.

Een paard dat 1,5 keer zo grote borstomvang heeft, is niet 1,5 keer zo zwaar.

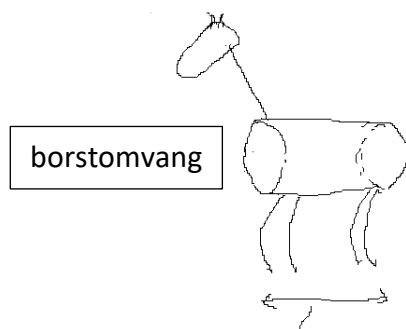
- b. Onderzoek met de formule wat het verband tussen borstomvang en gewicht is. Doe een algemene uitspraak: als de borstomvang 1,5 keer zo groot, dan is het gewicht en toon deze uitspraak ook aan.

Deze formule $G = \frac{B^2 \cdot L}{11900}$ kan omgeschreven worden naar andere formules.

- c. Geef bij elk van onderstaande formules aan of dit mogelijk is.

1. $L = 11900 \cdot \frac{G}{B^2}$
2. $B = \sqrt{\frac{11900G}{L}}$
3. $G \cdot 11900 = L \cdot B^2$
4. $B^2 = \frac{G}{L} \cdot 11900$

Om te komen tot een dergelijke formule voor het gewicht van een paard kan het paard gemodelleerd worden met een cilinder. Zie figuur hieronder. De omtrek van de cilinder is de borstomvang en de lengte van de cilinder de lengte L van het paard.



Om het gewicht te krijgen hebben we de inhoud van de cilinder nodig, dus de oppervlakte van de cirkel en de lengte van de cilinder.

- c. Bereken een formule voor de inhoud van de cilinder, uitgedrukt in B en L. Gebruikt daarbij de formules voor omtrek van cirkel ($2\pi R = \text{omtrek}$) en de oppervlakte van de cirkel ($\pi R^2 = \text{oppervlakte}$) en inhoud cilinder ($\text{inhoud} = \text{oppervlakte cirkel} \cdot \text{lengte}$)

T2 Opgave 60

Creatinine is een afbraakproduct dat door de nieren uit het bloed wordt gefilterd. De hoeveelheid creatinine in het bloed geeft aan hoe goed de nieren functioneren. Hoe kleiner de hoeveelheid creatinine in het bloed, des te beter de nierfunctie. Hiervoor wordt de *GFR* (Glomerular Filtration Rate, de filtratiesnelheid van de nieren in milliliter per minuut) berekend.

Mannen: $FGR = \frac{(140-L) \cdot G}{0,81C}$ en Vrouwen: $FGR = 0,85 \cdot \frac{(140-L) \cdot G}{0,81C}$

Hierin is L de leeftijd van de patiënt in jaren, G het lichaamsgewicht in kg en C de hoeveelheid creatinine in micromol per liter.

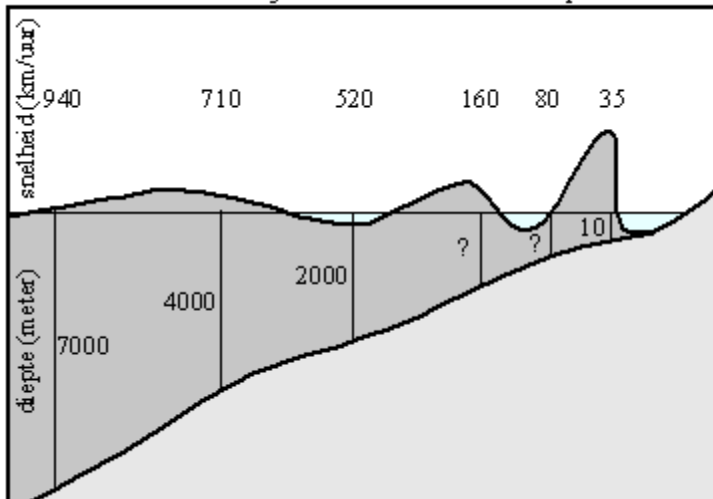
Bespreek overeenkomsten en verschillen tussen beide formules. Bijv. beantwoord vragen als “hoe verschilt GFR van mannen en vrouwen?” ; “hoe verandert GFR als men ouder wordt?”; “welke rol speelt het lichaamsgewicht?”

T2 Opgave 61

Op 26 december 2004 werd Zuidoost-Azië getroffen door een tsunami. Een tsunami is één heel lange golf die bij de kust heel hoog wordt. De tsunami had rampzalige gevolgen voor een aantal kustgebieden. Dit kwam door de enorme hoeveelheid water die door deze tsunami werd meegevoerd.

In onderstaande figuur is een schematisch overzicht te zien van het verloop van een tsunami. Boven elke genoemde waterdiepte is steeds de bijbehorende snelheid weergegeven.

snelheid in km/uur bij verschillende waterdiepten



De tsunami van december 2004 werd veroorzaakt door een aardbeving onder zee, 150 km uit de kust van het Indonesische eiland Sumatra. De tsunami plantte zich voort door de Golf van Bengalen, waar de zee ongeveer 3 km diep is.

- Bereken hoeveel minuten een tsunami nodig heeft om een afstand van 150 km af te leggen in water van 3 km diep.

In de figuur is ook te zien dat in de buurt van de kust, waar de waterdiepte niet zo groot is, de golfhoogte van een tsunami groter wordt. Op volle zee, waar de waterdiepte groot is, is de golfhoogte niet zo hoog.

Bij tsunami's is het volgende verband gevonden tussen waterdieptes en golfhoogtes

$$\frac{h_2}{h_1} = \sqrt[4]{\left(\frac{d_1}{d_2}\right)}, \text{ hierin is } h_1 \text{ de golfhoogte bij waterdiepte } d_1 \text{ en } h_2 \text{ de golfhoogte bij waterdiepte } d_2 ; h_1, d_1, h_2 \text{ en } d_2 \text{ zijn in meters.}$$

De tsunami van 26 december 2004 ontstond in een gebied met waterdiepte 1 km en golfhoogte 60 cm. Met deze gegevens en de formule hierboven kunnen we voor het verdere

verloop van deze tsunami het verband tussen de waterdiepte d en de golfhoogte h beschrijven met de formule: $h = 3,37d^{-0,25}$

b. Toon de juistheid van de formule aan.

Naarmate een golf dichterbij de kust komt, neemt de waterdiepte steeds verder af. Dit is ook in de figuur te zien.

c. Beredeneer aan de hand van de formule wat het gevolg hiervan is voor de golfhoogten.

T2 Opgave 62

Bij een scheikundige reactie zoeken we naar de concentratie H_3O^+ na het instellen van een evenwicht. De evenwichtsconstante $K = 6,3 \cdot 10^{-4}$

Om de concentratie H_3O^+ ($[H_3O^+]$) te berekenen kun je de formule $K = \frac{[H_3O^+]^2}{0,10 - [H_3O^+]}$ gebruiken.

Bereken $[H_3O^+]$ na instellen van het evenwicht. Los deze opgave op met de abc-formule, en controleer je antwoord met de GR.

T2 Opgave 63

In de natuurkunde kan de afkoeling van warme vloeistoffen beschreven worden met formules van de vorm: $T = k + b \cdot g^t$, waarbij T de temperatuur in graden Celsius en t de tijd in minuten.

Voor koffie geldt in een bepaalde kamer: $T_k = 18 + 10^{-0,10t+4,09}$

Voor thee geldt in dezelfde situatie $T_t = 18 + 58 \cdot 0,75^t$

a. Welke van de twee dranken koelt het snelste af?

b. Maak bij beide formules een omkeringsformule, dus een formule van de vorm $t = \dots$.

T2 Opgave 64

Zwaardere dieren hebben een zwaarder skelet, ook in verhouding. Zo weegt het skelet van een veldmuis (20 gram) nog geen gram (= 5%), en dat van een 4000 kg zware olifant ca. 1000 kg (= 25%). Het verband tussen lichaamsgewicht en skeletgewicht van (land)zoogdieren kan benaderd worden met de formule:

$$S = 0,0343 \cdot M^{1,083}$$

met S het skeletgewicht in gram en M het lichaamsgewicht in gram.

a. Laat zien hoeveel keer zo groot het skeletgewicht wordt wanneer het lichaamsgewicht 10 maal zo groot wordt (volgens deze formule).

Het lichtste zoogdier ter wereld is de winterspitsmuis, met een lichaamsgewicht van zo'n 2 gram.

b. Maak een formule waarmee je op grond van het lichaamsgewicht meteen kunt berekenen hoeveel procent het skeletgewicht bedraagt (bij deze dieren). Maak de formule zo eenvoudig mogelijk.

Bovenstaande formule blijkt voor zware landzoogdieren – zoals olifanten – minder goed te voldoen. Een betere formule voor die groep is:

$$S = 0,058 \cdot M^{1,1}$$

met S het skeletgewicht in gram en M het lichaamsgewicht in gram.

Het is eigenlijk vreemd om bij dergelijke zware dieren te werken met grammen.

c. Pas de formule zo aan dat zowel het skeletgewicht als het lichaamsgewicht in kg uitgedrukt worden. Maak je formule zo eenvoudig mogelijk.

d. Maak een formule waarmee je op grond van het skeletgewicht van een zwaar landzoogdier het lichaamsgewicht kunt berekenen.

T1 Opgave 65

In de natuurkunde wordt voor de slingertijd de volgende formule gebruikt:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{L}{g}}, \text{ waarbij } T \text{ de slingertijd in sec, } L \text{ de lengte van de slinger, } g \text{ de valversnelling in m/sec}^2 \text{ (} g=9,81 \text{)}$$

In onderzoek wordt ook vaak de formule $T^2 = \frac{4\pi^2}{g} \cdot L$ gebruikt.

- Leg uit hoe deze laatste formule volgt uit $T = 2\pi \sqrt{\frac{L}{g}}$
- Maak een formule die L uitgedrukt in T .

T2 Opgave 66

Hoeveel brandstof een personenauto verbruikt, hangt onder andere af van de af te leggen afstand, de rijstijl en het wachten voor verkeerslichten. We gaan dit met behulp van een wiskundig model nader onderzoeken. In dit model wordt het brandstofverbruik B (in mL) van een auto berekend met de volgende formule:

$$B = a \cdot L + b \cdot S + c \cdot D$$

met:

L = ritlengte in km;

S = aantal stops onderweg;

D = totale wachttijd voor verkeerslichten in seconden.

a en b zijn getallen die van de rijnsnelheid V (in km/h) afhangen en c is een constante. Voor a , b en c geldt:

$$a = 170 - 4,55V + 0,049V^2$$

$$b = 0,0077V^2$$

$$c = 0,39$$

We laten in dit model optrekken en afremmen buiten beschouwing, zodat we in de uitdrukkingen voor a en b steeds een constante waarde voor V kunnen invullen.

- Neem een rit over 1 km met een snelheid van 50 km/h, 2 stops onderweg en een totale wachttijd van 40 seconden.
Bereken hoeveel procent van het totale brandstofverbruik gebruikt wordt voor de stops en het wachten.

Twee auto's staan voor verkeerslicht P . 600 m verderop staat een verkeerslicht Q .

Als de auto's tussen P en Q met een snelheid van 50 km/h rijden, springt het verkeerslicht Q precies op tijd op groen en kunnen ze doorrijden.

Auto 1 rijdt tussen P en Q steeds met een snelheid van 50 km/h en kan dus doorrijden bij Q .

Auto 2 rijdt met een snelheid van 70 km/h, zodat deze zal moeten stoppen en wachten bij Q .

Bekijk de eerste 900 m na verkeerslicht P . Na Q komt er geen verkeerslicht meer en auto 1 rijdt ook daar 50 km/h en auto 2 rijdt daar weer 70 km/h.

We houden geen rekening met afremmen en versnellen.

- Onderzoek hoeveel keer zo veel brandstof auto 2 verbruikt ten opzichte van auto 1 op deze 900 meter.

T2 Opgave 67

Voor welke waarde(n) van x geldt:

- $2(-2x + 60) < 6\sqrt{x} - 4$
- $30 - x^2 > 14 - (x - 20)$

T2 Opgave 68

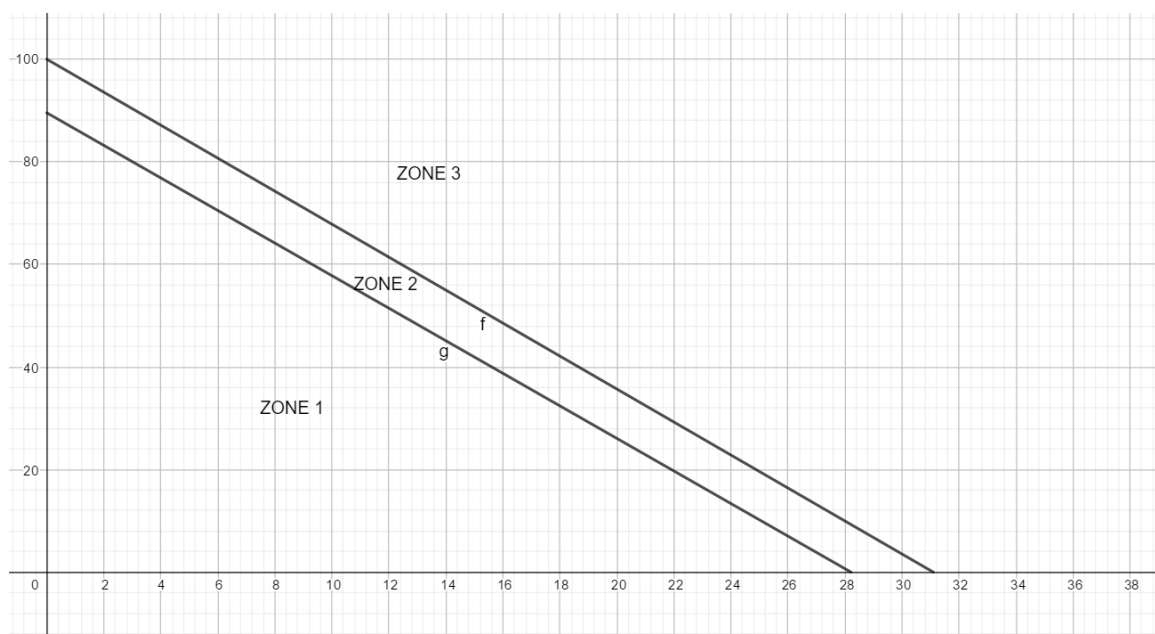
Een combinatie van hoge temperatuur en hoge luchtvochtigheid kan bij sporten tot gevaar leiden in verband met warmtestuwing. In onderstaande figuur zijn drie zones aangegeven.

Zone 1: “geen gevaar”

Zone 2: “pas op”

Zone 3: “gevaarlijk”

Vertikaal staat de luchtvochtigheid L aangegeven en de temperatuur T horizontaal.



Geef formules voor de grenslijnen tussen de zones. Leg bovendien uit hoe je enkel met de formules de verschillende zones zou kunnen aangeven.

T2 Opgave 69

Geef in een rooster aan voor welke combinaties van (x, y) geldt ze voldoen aan alle eisen:

$$8x + 5y \leq 800 \text{ en } 4x + y \leq 240 \text{ en } y \geq 40$$

T2 Opgave 70

Een boer bezit 56 ha land. Hij wil op de grond aardappelen en rogge verbouwen. Voor poten, het bewerken en oogsten van de aardappelen heeft de boer 5 mandagen per ha nodig. Voor zaaien en het oogsten van de rogge zijn 2 mandagen per ha nodig. De boer heeft totaal 250 mandagen per jaar ter beschikking.

Bij het oogsten van de aardappelen heeft hij een machine nodig die hij niet langer dan 20 dagen kan huren. Die machine doet een halve dag over de oogst van 1 ha aardappelen.

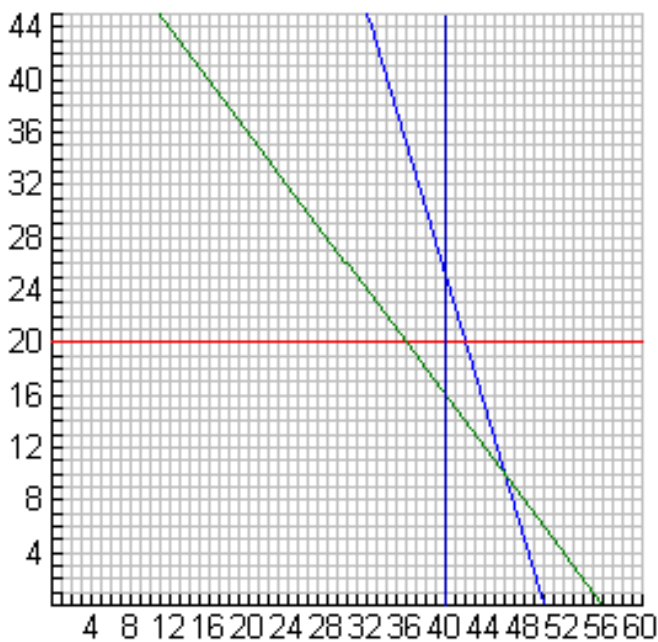
Voor het oogsten van de rogge maakt hij gebruik van een andere machine die hij maximaal 10 dagen kan huren. Deze machine kan per dag 2 ha oogsten.

We stellen het aantal ha aardappelen dat de boer gaat verbouwen op x en het aantal ha rogge op y .

Door middel van vergelijkingen kunnen bovenstaande beperkingen weer gegeven worden in wiskundige formules. Bijvoorbeeld: vanwege de beperkte hoeveelheid land moet gelden: $x + y \leq 56$

a. Geef ook de wiskundige formules bij de andere drie beperkingen.

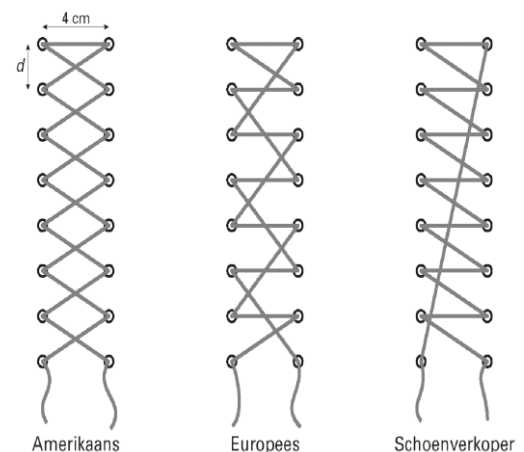
Hieronder zie je de lijnen die horen bij de grenzen bij de beperkingen getekend.



b. Geef aan welke beperking bij welke lijn hoort en welke beperking eigenlijk geen beperking is.

T2 Opgave 71

De meeste schoenen worden met veters dichtgemaakt. De schoen heeft dan twee rijen gaatjes waar een veter doorheen gehaald moet worden. Als je daarna een knoop legt in de overblijvende stukken, zit de schoen dicht. In deze opgave bekijken we drie manieren om schoenveters te rijgen: Amerikaans (zigzag), Europees (recht) en Schoenverkoper (snel).



Voor schoenen met drie paar gaatjes zijn twee van de drie manieren van rijgen gelijk.

a. Onderzoek welke twee manieren dan dezelfde veterlengte geven.

Bij elk van de drie genoemde manieren van rijgen hoort een formule voor de benodigde veterlengte. Daarbij laten we het deel van de veter waar de knoop in komt buiten beschouwing, omdat dat deel voor elke manier van rijgen even lang is. Voor de veterlengte l gelden dan de volgende formules.

Amerikaans: $l = 4 + 2(n - 1) \cdot \sqrt{d^2 + 16}$
 Europees: $l = 4(n - 1) + 2\sqrt{d^2 + 16} + (n - 2) \cdot \sqrt{4d^2 + 16}$
 Schoenverkoper: $l = 4(n - 1) + (n - 1) \cdot \sqrt{d^2 + 16} + \sqrt{(n - 1)^2 \cdot d^2 + 16}$

Hierbij is n het aantal paren gaatjes en d de afstand tussen de opeenvolgende gaatjes. De veterlengte l en de afstand d zijn in centimeters. Voor de formules is de afstand tussen de linker- en rechtergaatjes op 4 cm gesteld. De formules gelden voor schoenen met ten minste twee paar gaatjes.

- Toon aan dat voor $n=2$ de formules gelijke uitkomsten geven.
- Onderzoek aan de hand van de formules welke methode het goedkoopste is bij $n=8$, d.w.z. de kleinste lengte geeft.

T2 Opgave 72

Voor veel medicijnen geldt dat er een bepaalde hoeveelheid in het bloed nodig is, opdat het 'werkt'. Deze hoeveelheid noemen we het 'peil' of de 'spiegel'. Als het peil te laag is, is de medicatie niet effectief, als het peil echter te hoog is kan dit bij sommige medicijnen juist schadelijk zijn. Farmacologen onderzoeken bij welke dosering een medicijn effectief is.

Voor een bepaald medicijn geldt dat dagelijkse dosis van 1500 mg aanbevolen wordt. Er wordt vanuit gegaan dat per dag 25% van het medicijn uit het bloed verdwijnt door uitscheiding.

Onderzoek hoe de hoeveelheid medicijn zich ontwikkelt in het bloed.

T2 Opgave 73

Bij andere vakken wordt vaak gebruik gemaakt van dimensie-analyse: men kijk naar de eenheden van de grootheden. Dat doen we ook in het dagelijks leven.

Twee voorbeelden:

Voorbeeld 1

Stel we rijden met een snelheid van 80 km per uur, en we doen dat 3 uur lang. Om de totale afstand te vinden vermenigvuldigen we de snelheid in km/uur met de tijd in uren: 80 km/u x 3 uur geeft 240 km (immers km/uur x uur geeft km)

Voorbeeld 2

We hebben 120 euro en kopen stof om kleding te maken. Die stof kost 20 euro per meter. Hoeveel meter kun je kopen? We delen 120 euro door 20 euro per meter, hetgeen 6 meter geeft (immers euro / euro per meter geeft meter).

In onderstaande opgaven staat g voor gram, m voor meter, s voor seconde

Correct of niet (en vul eventueel aan)

- $g \cdot m/s^2 \cdot m$ is gelijk aan $g \cdot (\frac{m}{s})^2$?
- $\frac{m}{s} \cdot s + \frac{m}{s^2} \cdot s^2$ is $\dots \cdot m$
- $\frac{g \cdot m/s^2 \cdot m}{s}$ is gelijk aan $m^2 g s^{-3}$

Ook wordt er gewerkt met dimensies, zoals M voor massa, L voor lengte, en T voor tijd

Vul in:

- $\frac{M \cdot L/T^2}{L^2} = M^{\dots} \cdot L^{\dots} \cdot T^{\dots}$
- $\frac{L}{T^2} \cdot M \cdot L = M^{\dots} \cdot L^{\dots} \cdot T^{\dots}$

$$\text{f. } \frac{M \cdot L \cdot T^{-2}}{\frac{M \cdot L}{T^2}} = M^{\dots} \cdot L^{\dots} \cdot T^{\dots}$$

$$\text{g. } M \cdot L^{-3} \cdot L = \dots$$

Bedenk bij het volgende voorbeeld mogelijke grootheden

A is oppervlakte van een woonwijk in km^2 ; N_w is het aantal woningen per km^2 ; N_m is het aantal auto's in de woonwijk.

En er geldt: $N_a = N_w \cdot N \cdot A$

Waar staat N voor?

§8 Formatieve opdrachten

Formatieve toets

Opgave

Bij de verkoop van een bepaald artikel gelden de formules $TO = p \cdot q$ en $p = 400 - 2q$, waarin TO de totale maandelijkse opbrengst bij de verkoop van dat artikel is. p is de prijs (in €) en q is de verkochte hoeveelheid per maand. Je kunt beide formules combineren tot een formule voor TO als functie van q .

Voor de maandelijkse winst TW geldt: $TW = TO - TK$ waarin $TK = 40q + 9000$ de totale maandelijkse kosten voor dit artikel zijn.

5p 1 Bij welke verkoopcijfers wordt winst gemaakt?

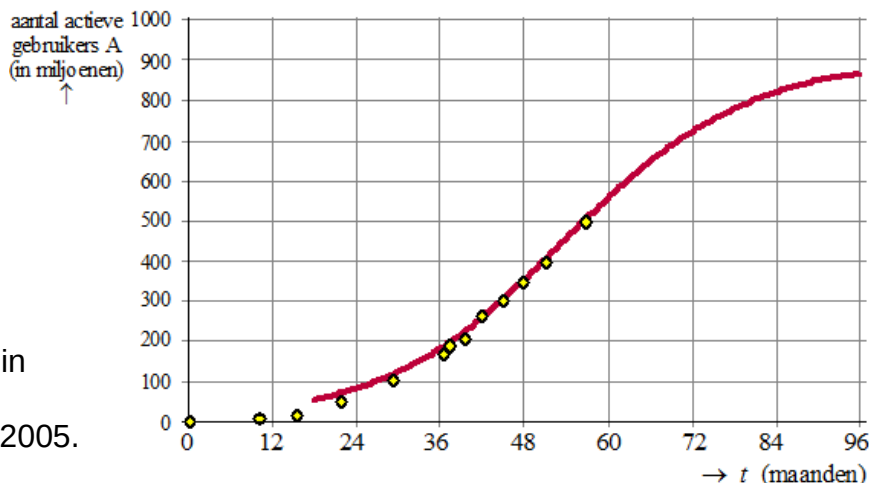
Opgave

Hier zie je informatie over het aantal facebook gebruikers.

Bij deze grafiek hoort de formule:

$$A = \frac{4500}{5 + 310 \cdot 0,93^t}$$

Hierin is A het aantal actieve gebruikers in miljoenen en t de tijd in maanden met $t = 0$ op 1-12-2005.



4p 2 Beredeneer aan de hand van de formule dat het aantal actieve gebruikers blijft stijgen en dat het aantal actieve gebruikers volgens deze formule nadert naar een grenswaarde.

4p 3 Maak een formule voor t , uitgedrukt in A

Opgave

Een boot vaart op een rivier van A naar B en terug. De afstand tussen A en B is 10 km. De boot vaart altijd met een snelheid van 20 km/u ten opzichte van het water. De rivier stroomt in de richting van A naar B .

Tijdens de reis van de boot van A naar B en terug is de stroomsnelheid van de rivier constant. We noemen de stroomsnelheid v (in km/u).

Een voorbeeld: als $v = 5$, dan vaart de boot op de heenreis met een snelheid van 25 km/u ten opzichte van de oever en op de terugreis met een snelheid van 15 km/u ten opzichte van de oever.

De totale reistijd T van een retourtocht wordt gegeven door:

$$T = \frac{10}{20+v} + \frac{10}{20-v}, \text{ waarbij } T \text{ in uren en } v \text{ in km/u met } 0 < v < 20.$$

4p 4 Toon de juistheid van de formule aan.

4p 5 Bij welke waarde van v is de totale reistijd van een retourtocht gelijk aan 2 uur?

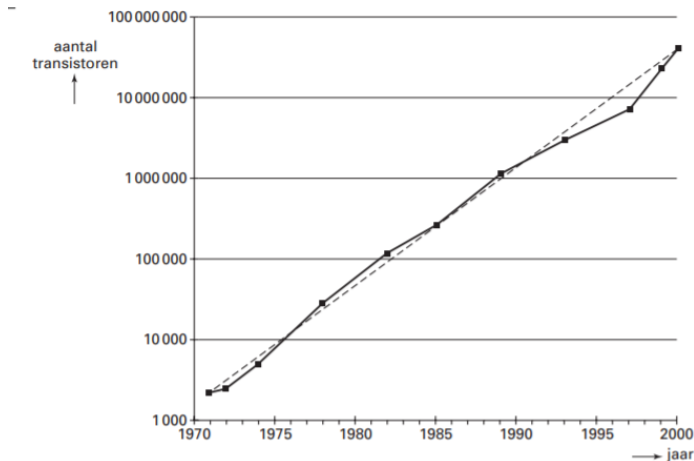
4p 6 Toon aan dat de formule ook te schrijven is als: $T = \frac{400}{400 - T^2}$

Aan de hand van deze laatste formule kun je beredeneren dat 'Als de stroomsnelheid v groter wordt neemt de totale reistijd van een retourtocht toe; en 'als v naar 20 nadert zal de totale reistijd van een retourtocht oneindig groot worden'.

4p 7 Geef deze redeneringen

Opgave

Het aantal transistoren op een chip neemt nog steeds exponentieel toe. Hieronder zie je informatie over deze exponentiele groei.



De Pentium-II chip uit 1997 ligt duidelijk onder de trendlijn.

4p 8 Bepaal met behulp van de figuur hoeveel procent het aantal transistoren onder die van de trendlijn ligt.

4p 9 Bepaal een exponentiele formule voor het aantal transistoren op een chip.

Er is een verband tussen de druk en temperatuur van waterdamp: $\log(P) = 4,1 - \frac{1144}{T-53,2}$, waarbij P de druk en T de temperatuur in Kelvin.

4p 10 Beredeneer aan de hand van de formule of P groter of kleiner wordt als T toeneemt.

Als de halveringstijd bij een stralingsproces 70 jaar is dan kan de formule voor de hoeveelheid straling na t jaar berekend worden met de formule $S = 100 \cdot 0,5^{\frac{t}{70}}$ (we nemen aan dat de straling op $t=0$ gelijk is aan 100)

3p 11 Leg de juistheid van deze formule uit.

3p 12 Herschrijf deze formule in de vorm $S = 10^{a \cdot t + b}$

Opgave

Het verband bij een zoogdier tussen het lichaamsgewicht G en het hersengewicht H kan benaderd worden met de formule $H = 0,12G^{0,67}$. Het verband tussen het lichaamsgewicht G en het skelet gewicht S met de formule $S = 0,06G^{1,1}$. Alle gewichten zijn in grammen.

Bij opgravingen worden vaak skeletten gevonden waarmee schattingen van het lichaamsgewicht gemaakt worden en daarmee van het hersengewicht.

5p 13 Maak een formule waarbij je bij een gegeven S het hersengewicht H kunt berekenen (dus een formule voor H uitgedrukt in S)

Dit soort formules worden vaak gevonden door meetgegevens uit te zetten in een assenstelsel waarop beide assen de log-schaal gebruikt wordt. Men vindt dan een verband als $\log(H) = -0,92 + 0,67 \cdot \log(G)$

5p 14 Toon aan dat deze formule te herschrijven is tot de formule $H = 0,12G^{0,67}$.

In de winter krijgen paarden voornamelijk hooi en biks te eten. Daarin zitten belangrijke voedingsstoffen als zetmeel en eiwit. Een pony heeft per dag 2100 gram zetmeel en 360 gram eiwit nodig.

In 1 kg hooi zit 300 gram zetmeel en 60 gram eiwit.

In 1 kg biks zit 600 gram zetmeel en 80 gram eiwit.

Stel dat de pony per dag a kg hooi en b kg biks eet. We nemen aan dat a en b zo gekozen worden dat de pony precies genoeg zetmeel en genoeg eiwit binnen krijgt.

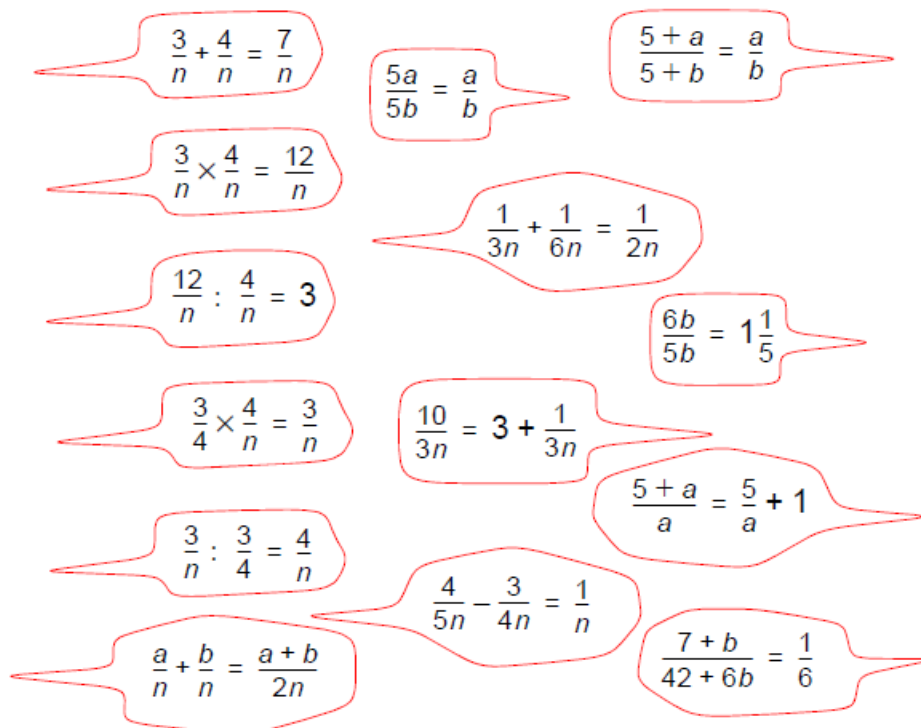
4p 15 Geef formules waaraan a en b dan moeten voldoen.

Opgave F1 (met dank aan Truus Dekker en Martin Kindt)

Uitspraken over breuken

40. a , b , n stellen willekeurige natuurlijke getallen voor.

Schrijf bij elke uitspraak of deze WAAR of ONWAAR is.



Bedenk zelf ook 2 ware en 2 onware uitspraken over 'algebrabreuken'.

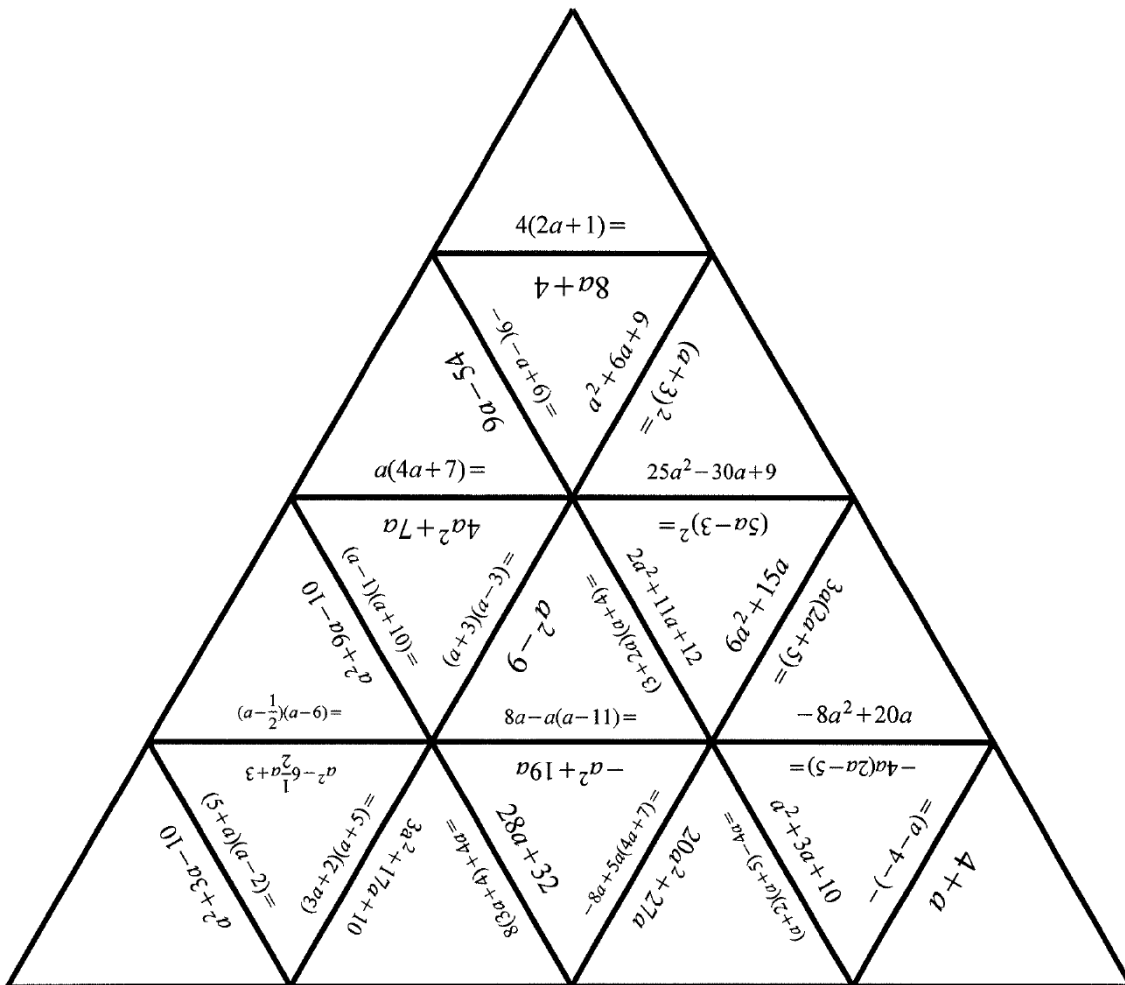
Opgave F2

Welke expressies horen bij elkaar (matchen); x steeds positief

Als het niet past vul het dan aan met expressies zodat het wel klopt

$2x(x-9)$	$x^2 + 6x - 18$
$2x^2(2x-9)$	$2x^2 - 18$
$2(x-3)(x+3)$	$(x-9)(x-3)$
$2(x-3)^2$	$(x-6)(x+3)$
$2x(x-4,5)$	$2x^2 - 9x$
$(x-9)^2$	$2x + 18$
$x^2 - 3x - 18$	$x^2 - 18x + 81$
$(x+9) + (x+9)$	$2x^2 - 12x + 18$
$x^2 + 6x - 18$	$2x^3 - 9x^2$

Maak het wat moeilijker door ook de ontbrekende zijden in te vullen maar zorg dat er geen verwarring kan ontstaan met de bestaande zijden van de driehoekjes



Maak zelf deze tri-omino af: vul de driehoekjes aan; je mag nieuwe driehoekjes erbij maken
Zorg dat iedere uitdrukking maar op “1 manier” aan een andere gelegd kan worden.

Opgave F4

Wat weet je te vertellen over (bijvoorbeeld over talen, grafiek, over waar je de formule tegenkomt, enz)

- e. De formule $y = 100 \cdot g^t$
f. De formule $A = x^{0,5}$
g. De formule $P = x^{-1}$

Opgave F5

Sorteer de formules die gelijkwaardig zijn ($x > 0$); gebruik zo min mogelijk categorieën.

$$y = 12x^{-1} \cdot 5; y = \frac{12}{x^2} \cdot 5x; y = \frac{60+x}{x^2}; y = 60 \cdot \frac{1}{x}; y = \frac{6}{x} \cdot \frac{10}{x}; y = \frac{6}{x} + \frac{54}{x}; y = \frac{30}{x} \cdot 2; y = \frac{60}{x^{60}};$$

$$y = \frac{1}{60x^{60}}; y = \sqrt{\frac{3600}{x^2}}; y = \frac{120x^2}{2x^3}; y = 60x^{-2} - x^{-1}; y = 30x^{-1} + 30x^{-1}; y = 30x^{0,5} + 30x^{0,5};$$

$$y = 30x^{0,5} \cdot 30x^{0,5}; y = 2x^{0,5} \cdot 30x^{0,5}; y = \frac{30}{x^{-0,5}} \cdot 2x^{0,5}; y = 60 \cdot x^{-60}; y = 2 \cdot \frac{30}{x^{30}} \cdot \frac{1}{x^2}; y = 60 \left(\frac{1}{x^{15}} \right)^4;$$

$$y = \frac{1}{x^{60}} \cdot 60; y = \left(\frac{2}{x^2} \right)^{30}; y = 10 \cdot 6x^{-1}; y = 2 \cdot x^{-30} \cdot x^2$$

Overzicht Rekenregels

Haakjes uitwerken

Regel	Voorbeeld
$a(b + c) = ab + ac$	$2(3x + 6) = 6x + 12$ $4 - (x + 2) = 4 - x - 2$
$(a + b)(c + d)$ $= ac + ad + bc + bd$	$(x + 3)(2x - 1) = 2x^2 - x + 6x - 3$ $= 2x^2 + 5x - 3$ $(x - 4)^2 = (x - 4)(x - 4)$ $= x^2 - 4x - 4x + 16$ $= x^2 - 8x + 16$

Breuken

Regel	Voorbeeld
$A \cdot \frac{B}{C} = \frac{AB}{C}$	$3x \cdot \frac{x}{2} = \frac{3x \cdot x}{2} = \frac{3}{2}x^2$
$\frac{A}{B} \cdot \frac{C}{D} = \frac{AC}{BD}$	$\frac{5x}{2} \cdot \frac{4x^3}{2x} = \frac{20x^4}{4x}$
$\frac{A}{B} + \frac{C}{D} = \frac{AD + BC}{BD}$	$\frac{5}{x} + \frac{x}{2} = \frac{10 + x^2}{2x}$

Wortels

Regel	Voorbeeld
$\sqrt[a]{a} = a^{\frac{1}{a}}, \quad \sqrt[p]{a} = a^{\frac{1}{p}}$	$\sqrt[4]{x} = x^{\frac{1}{4}}$
$\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} = \sqrt{a \cdot b}$	$\sqrt{x} \cdot \sqrt{3} = \sqrt{3x}$
$\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a}{b}}$	$\frac{\sqrt{3x}}{\sqrt{4x+1}} = \sqrt{\frac{3x}{4x+1}}$
$\sqrt[q]{a^p} = (\sqrt[q]{a})^p = a^{\frac{p}{q}}$	$(\sqrt{x^3})^5 = x^{\frac{3}{5}}$

Machten

Regel	Voorbeeld
$a^n \cdot a^p = a^{n+p}$	$x^7 \cdot x^3 = x^{10}$
$\frac{a^n}{a^p} = a^{n-p}$	$\frac{t^4}{t^3} = t$
$(a^n)^p = a^{n \cdot p}$	$(x^2)^5 = x^{10}$
$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$	$\frac{2x}{x^3} = 2x \cdot x^{-3} = 2x^{-2}$
$(a \cdot b)^p = a^p \cdot b^p$	$(4,5x)^2 = 4,5^2 \cdot x^2 = 20,25x^2$
$\left(\frac{a}{b}\right)^p = \frac{a^p}{b^p}$	$\left(\frac{x}{5}\right)^4 = \frac{x^4}{5^4} = \frac{x^4}{625} = \frac{1}{625} \cdot x^4$

Logaritmen

Regel	Voorbeeld
${}^g\log(a) + {}^g\log(b) = {}^g\log(ab)$	${}^g\log(5) + {}^g\log(6) = {}^g\log(30)$
${}^g\log(a) - {}^g\log(b) = {}^g\log\left(\frac{a}{b}\right)$	${}^g\log(30) - {}^g\log(6) = {}^g\log(5)$
$n \cdot {}^g\log(a) = {}^g\log(a^n)$	$3 \cdot {}^g\log(6) = {}^g\log(6^3)$
${}^g\log(a) = \frac{\log(a)}{\log(g)}$	${}^g\log(6) = \frac{\log(6)}{\log(g)}$