

4 vwo
wiskunde A

Katern Algebraïsche vaardigheden 1

§1 Rekenen met breuken, verhoudingen en procenten	4
§2 Rekenen met machten, wortels, exponenten	11
§3 Rekenen met haakjes	17
§4 Formules en grafieken van standaardfuncties	21
§5 Redeneren met formules en grafieken.....	26
§6 Formules maken en modelleren.....	30
§7 Probleemaanpak en Gemengde Opgaven.....	36
§8 Formatieve opdrachten	41

Auteurs

Peter Kop, Erik van Barneveld, Anne Geert Blonk, Maico Burger (Vakgroep Wiskunde, GSG Leo Vroman Gouda, 2021)

Datum maart 2022

Woord vooraf aan leerlingen en docenten

Aan leerlingen

In dit katern over algebraïsche vaardigheden staan hopelijk al een hoop dingen die je al weet/kan. Via uitgebreide oriëntatie door de centrale vragen moet je proberen uit te zoeken wat je al weet/kan en wat nog niet. In de V-vragen krijg je ondersteuning als je problemen hebt met de centrale vragen. Na de antwoorden op de centrale vragen volgen de algebraïsche bouwstenen: wat te onthouden (parate kennis en vaardigheden). We hebben geprobeerd om het aantal algebraïsche bouwstenen te beperken. Als er heel veel algebraïsche bouwstenen zouden zijn dan heb je problemen met “alles” te onthouden en te bedenken “wanneer moet ik wat gebruiken”. We kiezen daarom liever voor een wat kleiner algebraïsch gereedschapskistje en besteden meer aandacht aan de oefening om deze functioneel te gebruiken. In de oefenopgaven die volgen is onderscheid gemaakt tussen standaardopgaven (T1), die je effectief en efficiënt moet kunnen oplossen, en opgaven die het probleem oplossen oefenen (T2), dat wil zeggen om te oefenen om het algebraïsche gereedschapskistje te gebruiken in niet standaard situaties. De paragraaf Probleemaanpak en Gemengde opgaven bevat grotere opgaven die het probleem oplossen verder oefenen. Het is niet de bedoeling al deze opgaven te maken: meer is niet altijd beter. Overleg met je docent welke opgaven je het beste kunt oefenen.

Aan docenten:

In de katernen Algebraïsche Vaardigheden staat betekenisvol algebra onderwijs centraal. Onderzoek naar symbol sense, in het bijzonder inzicht in algebraïsche formules van Peter Kop, vormt een inspiratiebron voor deze katernen (<https://www.universiteitleiden.nl/nieuws/2020/10/vriendschap-sluiten-met-algebraische-formules>). Dit katern bevat dezelfde paragrafen-structuur als de katernen algebraïsche vaardigheden voor klas 4 en klas 5. In vergelijking met klas 5 is meer aandacht voor het rekenen met letters, het redeneren met formules, het gebruik van formules bij andere vakken, en modelleren. Daarnaast zijn de T2 vraagstukken complexer.

Bij klassikale besprekingen van gemengde opgave kan de docent gebruik maken van het framework voor probleemaanpak bij algebra dat in de paragraaf Probleemaanpak staat. Daarin wordt aan de hand van herkeningsniveaus (probleem familie herkennen, probleem opdelen in sub-problemen, kenmerken van probleem herkennen, en geen herkenning) heuristieken besproken. Bij het begeleiden van leerlingen die werken aan gemengde opgaven kan de docent hints geven op basis van dit framework. De formatieve opdrachten in de

laatste paragraaf zouden ook als extra opdrachten voor specifieke doelgroepen van leerlingen gebruikt kunnen worden.

Een indicatie voor studielast van de paragrafen: totaal 16 lessen (ongeveer 6 weken)

§1 3 lessen ; §2 2 lessen ; §3 2 lessen ; §4 2 lessen; §5 2 lessen ; §6 3 lessen; §7 2 lessen ; §8 1 les

§1 Rekenen met breuken, verhoudingen en procenten

A. Centrale vragen

Rekenen met breuken

De afdelingsleiders van twee verschillende scholen bekijken halverwege het schooljaar hoe de leerlingen in leerjaar 4 er cijfermatig gezien voorstaan. Ze bepalen op basis van de beschikbare cijfers in magister en de bevorderingsnormen voor elke leerling of deze groen, oranje of rood staat. Dit geeft de volgende tabel.

	School A	School B
Groen	50	50
Oranje	70	20
Rood	30	10

Op beide scholen staan er 50 leerlingen groen. Het absolute aantal leerlingen dat op groen staat is in beide afdelingen hetzelfde. Toch zal de afdelingsleider van school A minder tevreden zijn dan de afdelingsleider van school B. Een uitleg waarom dit het geval is kan op verschillende manieren gebeuren. Via verhouding, procenten, breuken, ...

- CV1a Laat op minstens drie verschillende manieren zien waarom de afdelingsleider van school B meer tevreden zal zijn dan de afdelingsleider van school A.

Op school A staat $\frac{7}{15}$ deel oranje en $\frac{1}{5}$ deel rood. Als je wilt kijken naar welk deel niet op groen staat kun je deze twee delen bij elkaar optellen. Dat leidt tot het optellen van twee breuken, in dit geval dus $\frac{7}{15}$ plus $\frac{1}{5}$. Daar moet natuurlijk hetzelfde uitkomen als 1 minus het deel dat groen staat, in dit geval dus $1 - \frac{1}{3}$.

- CV1b Laat zien dan $\frac{7}{15} + \frac{1}{5}$ hetzelfde is als $1 - \frac{1}{3}$.

De afdelingsleider van school A weet uit ervaring dat $\frac{1}{10}$ deel van de leerling die groen staan uiteindelijk zal blijven zitten. Van de leerlingen die oranje staan is dit $\frac{1}{5}$ deel en van de leerlingen die rood staan is dit $\frac{1}{3}$ deel. Hij wil met deze gegevens berekenen welk deel van de leerling (naar verwachting) uiteindelijk zal blijven zitten. Daarvoor moet de volgende berekening worden gemaakt: $\frac{1}{10} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{5} \cdot \frac{7}{15} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{5}$.

- CV1c Voer de berekening $\frac{1}{10} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{5} \cdot \frac{7}{15} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{5}$ uit.

Bij school A staat $\frac{2}{3}$ deel van de leerlingen oranje of rood. Bij school B is dit $\frac{3}{8}$ deel. Je kunt je dan afvragen hoeveel keer zo groot het deel van de leerlingen is dat oranje of rood staat op school A ten opzichte van school B. Om dit te bereken moet de ene breuk door de andere worden gedeeld, in dit geval $\frac{\frac{2}{3}}{\frac{3}{8}}$.

- CV1d Voer de berekening $\frac{\frac{2}{3}}{\frac{3}{8}}$ uit.

Beredeneren met breuken

Als je moet werken met breuken, verhoudingen en/of percentages dan is het handig als je gemakkelijk kunt zien wat meer of minder is, bijvoorbeeld dat je meteen inziet dat $\frac{50}{150}$ kleiner is dan $\frac{50}{80}$. Dit kun je als volgt beredeneren: de teller van de twee breuken is hetzelfde; alleen de noemer is verschillend. Als bij een gelijke teller, de noemer van een breuk groter is dan is de uitkomst van de breuk kleiner. Dit is een voorbeeld van redeneren met breuken.

Hieronder nog 5 situaties waarin je met behulp van beredeneren kunt vertellen wat groter is.

- | | | | |
|---|-------------------|----|---------------------------|
| a | 55% van 80 | OF | $\frac{5}{8}$ deel van 80 |
| b | de helft van 321 | OF | een kwart van 620 |
| c | $\frac{414}{8}$ | OF | $\frac{230}{4}$ |
| d | $(\frac{3}{4})^3$ | OF | $(\frac{3}{4})^5$ |
| e | 0,75 ⁶ | OF | 0,75 ⁸ |

$$\text{Breuk} = \frac{\text{Teller}}{\text{Noemer}}$$

CV2 Beredeneer van elk van de bovenstaande situaties a t/m e wat groter is.

Verhoudingen

Voor goed beton meng je de gewichten cement, zand en grind in de verhouding 1:2:3. Een zak cement heeft een gewicht van 25 kg.

Voor de fundering van een groot hek is 1600 kg beton nodig.

CV3 Hoeveel zakken cement heb je nodig voor de fundering van het hek?

Procenten

- Laura krijgt korting op een paar schoenen van € 48,- en betaalt nu € 33,-. Hoeveel procent korting heeft zij?
- Op een broek van € 69,95 krijg ik 20% korting. Hoeveel betaal ik dan?
- Jan krijgt 3,25% rente op zijn spaarrekening. Hij heeft € 1200,- op zijn rekening staan. Hoeveel euro rente krijgt hij?
- Stefan spaart €350,- van zijn totale inkomen. Zijn inkomen is netto €2175,-. Hoeveel procent van zijn netto-inkomen spaart hij?
- Een zeker artikel wordt eerst 30% in prijs verhoogd en daarna (ten opzichte van de nieuwe prijs) weer 30% in prijs verlaagd. Hoeveel procent is de laatste prijs veranderd ten opzichte van de oorspronkelijke prijs?

CV4 Los bovenstaande procentopgaven op verschillende manieren op.

Medisch rekenen

Een verpleegkundige moet een infuus aanleggen bij een patiënt. Er wordt 180 ml oplossing per infuus voorgeschreven. Het moet drie uur inlopen, dat wil zeggen dat in drie uur deze 180 ml in het bloed moet komen. De vuistregel is: 1 ml komt overeen met 20 druppels.

CV5a Op welke druppelsnelheid (dat wil zeggen: aantal druppels per minuut) moet de verpleegkundige het infuus instellen?

De verpleegkundige beschikt over een 30% oplossing van een medicijn. Een 1% oplossing wil zeggen: 10 mg medicijn per ml. Er is 150 ml van 5% oplossing nodig, dat wil zeggen 150 ml met 50 mg per ml. Daarvoor neemt de verpleegkundige een hoeveelheid van de 30% oplossing die zij aanvult met water tot 150 ml.

CV5b Hoeveel van de 30% oplossing moet zij nemen?

Rekenen met breuken

a $\frac{37+37+37+37+37+37}{37+37+37+37} =$

f $\frac{1}{4} / \frac{a}{4} =$

b $\frac{60a}{300} =$

g $\frac{1}{4} = \frac{1}{5} + \frac{\dots}{\dots}$

c $7 \cdot \frac{2b}{a} =$

h $\frac{2}{5} + \frac{a}{12} =$

d $\frac{1}{4} \cdot \frac{a}{4} =$

i $5 \cdot \frac{2a}{3} =$

e $\frac{1}{4} + \frac{a}{4} =$

CV6 Bereken bovenstaande breuksommen handig zonder rekenmachine!

[Als je direct het antwoord op de centrale vragen kunt geven, geef die dan. Zo niet, maak dan de verkennende opgaven.](#)

V Opgave 1

Bereken:

a $\frac{2}{3} + \frac{4}{5} = \dots$ (maak gelijknamig om gelijksoortige breuken (gelijke noemers) te kunnen optellen)

b $\frac{2}{3} - \frac{4}{5} = \dots$ (zelfde als bij optellen)

c $\frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5} = \dots$ (vermenigvuldig tellers en noemers; bedenk eerst met gezond verstand $\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{5} = \frac{\dots}{\dots}$)

d $\frac{\frac{2}{3}}{\frac{4}{5}} = \dots$ (kan bijv. via gelijknamig maken; dan deel je gelijksoortige breuken op elkaar)

e $5 \cdot \frac{2}{3} = \dots$ (bedenk met gezond verstand $5 \cdot \frac{1}{3} = \dots$)

f $\frac{2}{3} \cdot 10 = \dots$

V Opgave 2

Terug naar de context van CV 1. Bij school B is de verhouding groen : oranje : rood gelijk aan 50 : 20 : 10. Omdat alle aantallen nog door tien gedeeld kunnen worden, kunnen we ook zeggen dat deze verhouding 5 : 2 : 1 is.

Vorig schooljaar lagen deze verhoudingen anders namelijk 4 : 3 : 2. Het aantal leerlingen was ook anders namelijk 81.

Bereken hoeveel leerlingen er toen groen, oranje, en rood stonden.

V Opgave 3

Een school had 1000 leerlingen waarvan er 450 op de mavo-afdeling zaten, 400 op de havo-afdeling en 150 op de vwo-afdeling. Veronderstel nu dat de verhouding van het aantal leerlingen op de drie afdelingen hetzelfde blijft en dat het totaal aantal leerlingen van de school gegroeid is naar 1200.

Bereken voor elk van de drie afdelingen hoeveel leerlingen zij dan hebben.

V Opgave 4

De rector kijkt vooral naar het totaalaantal leerlingen van de school en het aantal aanmeldingen van nieuwe brugklasleerlingen. Tot zijn vreugde zag hij in de afgelopen jaren het totaal aantal leerlingen stijgen van 1000 naar 1200. Trots meldt hij het percentage waarmee het totaal aantal leerlingen is gegroeid aan het schoolbestuur.

Bereken dit percentage.

V Opgave 5

Voor de komende jaren wordt er voorspeld dat het aantal leerlingen in het voortgezet onderwijs zal dalen met 15%. Neem aan dat deze daling zich ook op deze school voor zal doen. De schoolt heeft inmiddels dus al wel 1200 leerlingen.

Bereken hoeveel leerlingen de school dan nog zal hebben.

V Opgave 6

Neem aan dat op de vwo-afdeling met 180 leerlingen het aantal leerlingen met de genoemde 15% zal dalen, maar vervolgens ook nog eens met 10% verder zal dalen.

Bereken hoeveel leerlingen de vwo-afdeling dan zal overhouden.

V Opgave 7

Het aantal aanmeldingen van nieuwe brugklasleerlingen is met 18% gedaald naar 260.

Hoeveel aanmeldingen van nieuwe brugklasleerlingen waren er dan daarvoor?

Antwoord op de centrale vragen

B. Theorie en opgaven

Bij het rekenen met **breuken** (breuk als getal) kun je **alleen gelijknamige breuken optellen en aftrekken**;

bij **vermenigvuldigen** is de basis steeds $\frac{1}{3} \times \frac{1}{5} = \frac{1 \times 1}{3 \times 5} = \frac{1}{15}$. Het gelijknamig maken kan ook heel goed bij het delen van

$$\text{breuken: } \frac{\frac{2}{4}}{\frac{5}{5}} = \frac{\frac{2}{4} \cdot \frac{15}{15}}{\frac{5}{5} \cdot \frac{15}{15}} = \frac{2}{12} \left(= \frac{5}{6} \right)$$

Bij **verhoudingen** in de basis steeds het totaal van de verhoudingsgetallen vergelijken met het totaal dat verdeeld moet worden.

Bij de berekening van **procenten** zijn verschillende strategieën mogelijk:

- gebruik een verhoudingstabel,
- gebruik een vermenigvuldiging (5% van ... is hetzelfde als $0,05 \cdot \dots$),
- gebruik uitschrijven via 1%.

Bij groepen vergelijken of het vergelijken van toenames kunnen we naar **absolute verschillen** of toenames kijken maar ook naar **relatieve verschillen** en toenames.

Voorbeelden

Vraag: verdeel 150 in verhouding 2 : 3

Antwoord: verhoudingsgetallen opgeteld is $2 + 3 = 5$;
dus eerste krijgt $\frac{2}{5} \times 150 = 60$ en de tweede $\frac{3}{5} \times 150 = 90$.

Het absolute verschil tussen 50 en 26 is: $50 - 26 = 24$

Het relatieve verschil tussen 50 en 26 is bijvoorbeeld: $\frac{50-26}{26} \times 100\% = 92,3\%$

T1 Opgave 1

In de tabel zie je gegevens over de bevolkingsomvang en het bruto binnenlands product (bbp = de totale geldwaarde van alle in een land geproduceerde goederen en diensten gedurende een jaar)

	land	2000	2005	2020	2030
bbp (x 100 miljard)	Japan	32,7	34,7	42,4	47,1
	India	24,5	33,8	70,7	103,0
	VS	95,9	110,9	167,5	214,1
bevolkings- omvang (x miljoen)	Japan	127	128	123	115
	India	1.021	1.109	1.359	1.509
	VS	284	298	338	361

vrij naar: Japan Center for Economic Research

We bekijken de kolom van 2020 (dat was een prognose).

a In welk van de drie landen is het gemiddelde bbp per hoofd van de bevolking het grootst?

We kijken nu naar de kolommen voor 2020 en 2030.

b In welk van de drie landen gaat het bbp tussen 2020 en 2030, naar verwachting, in absolute zin het meest toenemen? En in relatieve zin?

T1 Opgave 2

Zet op volgorde van klein naar groot, maar gebruik geen rekenmachine. $\frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{2}{9}, \frac{1}{3}$

T1 Opgave 3

- a Hoeveel gram weegt 56 ml alcohol? Gegeven is de dichtheid (aantal grammen per ml) van alcohol namelijk 0,80 g/ml.
- b Een stuk ijzer van 12 cm³ heeft een massa van 94 gram; bereken hoeveel de massa is van 15 cm³ ijzer.
- c Bereken de gemiddelde snelheid in km/u van Usain Bolt toen hij de 100 meter hardlopen liep in 9,58 sec.
- d Op een landkaart komt 6 cm overeen met 33 km in de werkelijkheid; hoe lang is een stuk van 15 km in werkelijkheid op **de kaart**?

T2 Opgave 4

Een patiënt krijgt een Burinexpomp. Hij krijgt 14 mg per 24 uur voorgeschreven. Op de afdeling is een oplossing van 2 mg per 4 ml aanwezig. Je vult deze oplossing aan met NaCl tot 48 ml en stelt de pomp op 2 ml per uur in.

- a Hoeveel NaCl moet je toevoegen?

In 4 uur moet 250 ml glucoseoplossing worden toegediend. Een vuistregel bij pompen is: 1 ml komt overeen met 20 druppels.

- b Op hoeveel druppels per minuut moet je de pomp instellen?

Een potje voedingssupplement Vitamine D3 bevat 120 tabletten. Een dagdosering van 3 tabletten bevat 3 microgram vitamine D3. OP het potje staat deze dosering 60% is van de aanbevolen dagelijkse hoeveelheid.

- c Hoeveel tabletten heb je nodig voor de volledige aanbevolen dagelijkse hoeveelheid?

T1 Opgave 5

- a Hoeveel keer zo duur wordt een product als de prijs toeneemt met 18%, met 1,8%, en met 267%?
- b Hoeveel keer zo duur wordt een product als de prijs afneemt met 18%, met 1,8%, met 99% ?
- c Met hoeveel procent neemt de prijs toe of af, als het product 3 keer zo duur wordt? Als het 0,75 keer zo duur wordt? Als het 1,03 keer zo duur wordt? En als het 0,15 keer zo duur wordt?

T1 Opgave 6

Waar of niet waar? Leg uit!

a $\frac{3}{x} \cdot \frac{1}{y} = \frac{3}{xy}$

c $\left(\frac{x}{y}\right)^2 = \frac{x^2}{y^2}$

e $3 \cdot \frac{x}{y} = \frac{3x}{y}$

b $\frac{3}{x} + \frac{1}{y} = \frac{4}{x+y}$

d $\frac{3}{x} - \frac{1}{y} = \frac{2}{x-y}$

f $\frac{\frac{6}{x}}{2} = \frac{6}{2x}$

T1 Opgave 7

In de uitverkoop betaal je voor een paar schoenen € 54 in plaats van de oorspronkelijke prijs van € 90 .

Hoeveel procent korting krijg je?

Deze opgave kun je op verschillende manieren oplossen. Bedenk verschillende manieren.

Manier 1	Manier 2

Manier 3

Manier 4

T1 Opgave 8

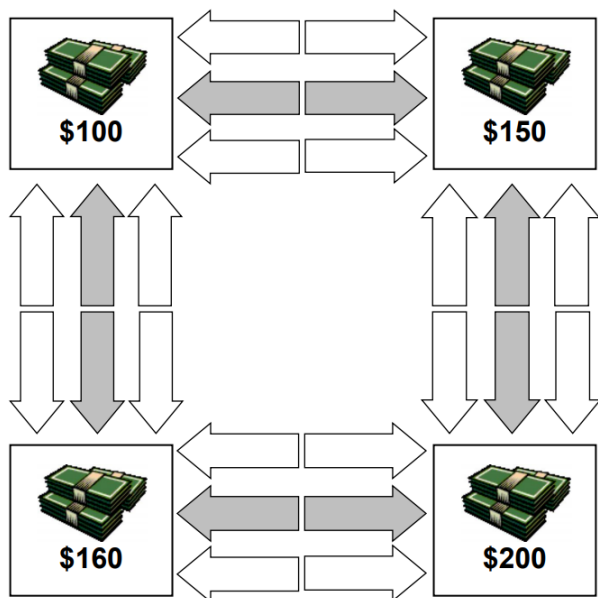
Bekijk onderstaande figuur.

Bij iedere overgang horen in de pijlen een percentage, een decimale vermenigvuldigingsfactor, en een breuk als factor te staan.

Voorbeeld: in de pijlen van \$100 naar \$150 hoort dus een percentage te staan (50%), een decimale vermenigvuldigingsfactor ($\times 1,50$), en een breuk als factor ($\times 150/100$ of $\times 3/2$)

Vul de andere pijlen in.

Percents, Decimals, and Fractions (1)



§2 Rekenen met machten, wortels, en exponenten

A. Centrale vragen

Nederland heeft een oppervlakte van 41 500 km². In 2020 had het 17 280 000 inwoners. Het bruto nationaal product was toen \$ 483 400 000 000. Naarmate getallen groter worden, is het steeds lastiger om goed te lezen wat er nu precies staat. Daarom wordt dezelfde informatie vaak in woorden weergegeven als 41,5 duizend km², 17,28 miljoen mensen en 483,4 miljard US dollar. In economische contexten komen grote getallen als miljoenen en miljarden vaak voor. Daarbij wordt niet altijd gekozen voor een weergave met behulp van woorden, maar soms ook voor de wetenschappelijke notatie. In dit voorbeeld is de wetenschappelijke notatie als volgt: 41,5·10³ km², 17,28·10⁶ mensen en 483,4·10⁹ US dollar.

In onderstaande tabel staan dezelfde drie gegevens over 2020 (oppervlakte, aantal inwoners en bruto nationaal product) voor de vijf landen van de Europese Unie met het hoogste BNP.

LAND	Inwoners (*10 ⁶)	Oppervlakte (*10 ³ km ²)	BNP (*10 ⁹ dollar)
Duitsland	80,160	357	4.199,00
Frankrijk	67,848	643,8	2.856,00
Italië	62,403	301,3	2.317,00
Spanje	50,016	505,4	1.778,00
Polen	38,282	312,7	1.126,00

We kijken nu voor Nederland en voor elk van de vijf landen in de tabel naar de bevolkingsdichtheid (=aantal inwoners per vierkante kilometer) en naar het bruto nationaal product per inwoner.

- CV7 Vergelijk de bevolkingsdichtheid en het bruto nationaal product (BNP) per inwoner van Nederland met dat van Duitsland? Maak de benodigde berekeningen met de GR en gebruik daarbij de wetenschappelijke notatie.

Men heeft 200milligram Dopamine opgelost in 50 ml zoutoplossing. Dosering voor een bepaalde patiënt is 2 microgram per kg lichaamsgewicht per minuut. De patiënt weegt 80 kg.

- CV8 Bereken de pompstand van de dopaminepomp, dat wil zeggen hoeveel ml per uur moet toegediend worden?

Bij de twee bovenstaande centrale vragen werd er gewerkt met machten van tien. Voor het werken met machten van tien kunnen algemene regels geformuleerd worden, bijvoorbeeld $10^p \cdot 10^q = \dots$

We kijken eerst naar getallenvoorbeeld en proberen daarna algemene regels.

Onderzoek of de volgende machts-opgaven eenvoudig te berekenen zijn:

$$2^3 + 2^4 = 2^{\dots} \quad \frac{2^6}{2^2} = \dots$$

$$2^6 - 2^4 = 2^{\dots} \quad (a^3)^4 = \dots$$

$$2^3 \cdot 2^4 = \dots \quad (2 \cdot 3)^5 = \dots$$

Formuleer nu zelf hieronder de algemene rekenregels voor machten (indien mogelijk)

$$a^p + a^q = \dots \quad \frac{a^p}{a^q} = \dots$$

$$a^p - a^q = \dots \quad (a^p)^q = \dots$$

$$a^p \cdot a^q = \dots \quad (a \cdot b)^p = \dots$$

CV9 Onderzoek de voorbeelden en formuleer de algemene rekenregels voor machten.

“Gewone” wortels, wortels met grondtal 2 of anders gezegd de tweede-machtswortels, heb je o.a. nodig voor het oplossen van tweedegraads vergelijkingen. Voorbeeld: $\sqrt{5}$ en $-\sqrt{5}$ zijn de oplossingen van de vergelijking $x^2 = 5$. Maar als we hogere graads vergelijkingen willen oplossen hebben we hogere machts wortels nodig. Voorbeeld: de exacte oplossingen van de vergelijking $x^4 = 5$ zijn $\sqrt[4]{5}$ en $-\sqrt[4]{5}$ (vierde-machtswortels).

CV10a Leg uit waarom $\sqrt{5}$, maar ook $\sqrt[4]{5}$, als macht te schrijven is.

Hieruit volgt dat getallen als $16^{\frac{1}{2}}, 27^{\frac{1}{3}}, 32^{\frac{1}{5}}$ ook te schrijven zijn als wortels.

CV10b Schrijf deze als wortel en bereken uit je hoofd: $16^{\frac{1}{2}}, 27^{\frac{1}{3}}, 32^{\frac{1}{5}}$.

CV10c Noteer de oplossingen van de volgende vergelijkingen met wortels en met machten:

$$x^4 = 10; x^2 = 5; x^5 = 40 \text{ (bedenk vooraf hoeveel oplossingen er zijn)}$$

Wortels zijn dus ook machten. Net zoals de machten kunnen we voor wortels ook algemene rekenregels opstellen. Formuleer eerst weer de rekenregels voor wortels met getallenvoorbeelden en dan de algemene rekenregels met wortels.

$$\begin{array}{ll} \sqrt{5} + \sqrt{6} = \sqrt{\dots} & \frac{\sqrt{30}}{\sqrt{6}} = \sqrt{\dots} \\ \sqrt{10} - \sqrt{3} = \sqrt{\dots} & (\sqrt{5})^2 = \dots \\ \sqrt{5} \cdot \sqrt{6} = \sqrt{\dots} & 2^{\frac{3}{4}} = \sqrt[4]{\dots} \end{array}$$

Algemeen:

$$\begin{array}{ll} \sqrt{a} + \sqrt{b} = \dots & \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \dots \\ \sqrt{a} - \sqrt{b} = \dots & (\sqrt{a})^2 = \dots \\ \sqrt{a} \cdot \sqrt{b} = \dots & a^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{\dots} \end{array}$$

CV11 Onderzoek de voorbeelden en formuleer de algemene rekenregels voor wortels.

CV12 exponentiele functie

We kijken naar de groei van een bedrag B op een spaarrekening waarbij de bank ieder jaar 4% rente op de rekening bijschrijft. Op $t=0$ (1 januari 2020) staat er € 2000 op de spaarrekening.

Maak de volgende vragen.

Maak een tabel voor B voor $t=0$ tm $t=5$ en leg uit hoe je in de tabel ziet dat er ieder jaar 4% rente bijgeschreven wordt	Leg uit dat $B = 2000 \cdot 1,04^t$ een passende formule is.
De tijd die het duurt om B twee keer zo groot te maken, de verdubbelingstijd, is steeds gelijk. Bereken deze verdubbelingstijd en leg uit dat die steeds constant is.	Maak een schets van de grafiek van B

Als je direct het antwoord op de centrale vragen kunt geven, geef die dan. Zo niet, maak dan de verkennende opgaven.

Zet in wetenschappelijke notatie dat wil zeggen als $\dots \cdot 10^{\dots}$ ofwel in de vorm $a \cdot 10^b$ met a tussen 1 en 10 en b geheel (bijvoorbeeld $610000 = 6,1 \cdot 10^5$)

a	500	d	0,5
b	6730	e	0,341
c	34100000	f	0,000067

V Opgave 2

Geef aan of de volgende uitspraken WAAR of NIET WAAR zijn.

a	$10^3 \cdot 10^3 = 10^9$	g	$(10 \cdot 100)^2 = 10^2 \cdot 100^2$
b	$10^2 \cdot 10^5 = 10^7$	h	$10^2 + 10^3 = 10^5$
c	$\frac{10^9}{10^3} = 10^3$	i	$10^2 + 10^3 = 10^6$
d	$\frac{10^9}{10^3} = 10^6$	j	$10^8 - 10^2 = 10^6$
e	$(10^3)^2 = 10^6$	k	$10^8 - 10^2 = 10^4$
f	$(10^3)^2 = 10^5$		

V Opgave 3

Formuleer zoveel mogelijk algemene regels voor het rekenen met machten van tien.

a	$10^p + 10^q = \dots$	d	$\frac{10^p}{10^q} = \dots$
b	$10^p - 10^q = \dots$	e	$(10^p)^q = \dots$
c	$10^p \cdot 10^q = \dots$	f	$(2 \cdot 10)^p = \dots$

V Opgave 4

Geef aan of de volgende uitspraken WAAR of NIET WAAR zijn.

a	$\sqrt{2} \cdot \sqrt{3} = \sqrt{6}$	e	$2\sqrt{3} = \sqrt{12}$
b	$\sqrt{2} + \sqrt{3} = \sqrt{5}$	f	$2\sqrt{3} + 4\sqrt{3} = 6\sqrt{3}$
c	$(\sqrt{6})^2 = 6$	g	$2\sqrt{3} \cdot 4\sqrt{3} = 8\sqrt{3}$

B. Antwoord op de centrale vragen

C. Theorie en opgaven

Machten

Machten gebruik je om gemakkelijk grote en kleine getallen weergeven. Vaak gebruikt men daarbij de wetenschappelijke notatie, bijvoorbeeld $4,1 \cdot 10^9 = 4100000000$ ofwel 4,1 miljard. In de wetenschappelijke notatie wordt gebruik gemaakt van machten van 10.

Machten van 10	Als gewone getallen	In woorden
10^1	10	Tien
10^2	100	Honderd (hecto)
10^3	1000	Duizend (kilo)
10^4	10000	Tienduizend
10^5	100000	Honderdduizend
10^6	1000000	Miljoen
10^7	10000000	Tien miljoen
10^8	100000000	Honderd miljoen
10^9	1000000000	Miljard
Enzovoort		

Machten kunnen ook **negatieve exponenten hebben**. Dit komt in economisch-maatschappelijke contexten misschien niet zo vaak voor, maar in de vakgebieden natuurkunde, scheikunde en biologie kom je ze wel vaak tegen. Ook bij medisch rekenen kom je ze vaak tegen.

Machten van 10	Als kommagetal	In woorden
10^{-1}	0,1	Eén-tiende (deci)
10^{-2}	0,01	Eén-honderdste (centi)
10^{-3}	0,001	Eén-duizendste (milli)
10^{-4}	0,0001	Eén-tienduizendste
10^{-5}	0,00001	Eén-honderdduizendste
10^{-6}	0,000001	Eén-miljoenste (micro)
Enzovoort		

Met **machten** kunnen we eenvoudig

-> vermenigvuldigen $10^3 \cdot 10^4 = 10^7$

-> delen $\frac{10^{10}}{10^2} = 10^8$

-> machtsverheffen $(10^3)^4 = 10^{12}$

-> Maar niet optellen of aftrekken.

Daarom zijn er alleen rekenregels voor het vermenigvuldigen, delen en machtsverheffen van machten. Deze rekenregels zijn:

$$a^p \cdot a^q = a^{p+q} \quad (a^p)^q = a^{p \cdot q}$$

$$\frac{a^p}{a^q} = a^{p-q} \quad a^p \cdot b^p = (a \cdot b)^p$$

Net als voor machten gelden er ook rekenregels voor **wortels**:

$$\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} = \sqrt{a \cdot b} \quad \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a}{b}} \quad (\sqrt{a})^2 = a$$

De exacte oplossingen van vergelijkingen als $x^2 = 5$ zijn te schrijven als wortels maar ook als machten.

$$x^2 = 5$$

$$x = \sqrt{5} \text{ of } x = -\sqrt{5}$$

Anders geschreven:

$$x = 5^{\frac{1}{2}} \text{ of } x = -5^{\frac{1}{2}}$$

$$x^3 = 15$$

$$x = \sqrt[3]{15}$$

Anders geschreven:

$$x = 15^{\frac{1}{3}}$$

$$x^4 = 6$$

$$x = \sqrt[4]{6} \text{ of } x = -\sqrt[4]{6}$$

Anders geschreven:

$$x = 6^{\frac{1}{4}} \text{ of } x = -6^{\frac{1}{4}}$$

Merk op dat even machten 2 antwoorden hebben en oneven machten maar 1 antwoord.

Voorbeelden

$$a^6 \cdot a^3 =$$

$$a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a =$$

$$a^9$$

$$\frac{2a^{12}}{4a^{10}} =$$

$$\frac{2a^2}{4} =$$

$$\frac{1}{2}a^2$$

$$\frac{72a^{10}b^2}{8a^3b} =$$

$$9a^7b$$

$$-(3a)^2 =$$

$$-3^2 \cdot a^2 =$$

$$-9a^2$$

$$(a^4)^2 \cdot 5a^2 =$$

$$a^8 \cdot 5a^2 =$$

$$5a^{10}$$

$$3x^3 \cdot 5x^{0,2} \cdot 4x =$$

$$3 \cdot 5 \cdot 4 \cdot x^3 \cdot x^{0,2} \cdot x^1 =$$

$$60x^{4,2}$$

$$a^4 + a^3 =$$

Kan niet korter

$$a^4 + a^4 =$$

$$2a^4$$

$$3^x \cdot 3^2 =$$

$$3^{x+2}$$

$$\sqrt{a} \cdot \sqrt{5} =$$

$$\sqrt{5a}$$

$$\frac{\sqrt{12}}{\sqrt{3}} =$$

$$\sqrt{\frac{12}{3}} =$$

$$\sqrt{4} = 2$$

$$\sqrt{5a} + \sqrt{5a} - \sqrt{5} =$$

$$2\sqrt{5a} - \sqrt{5} =$$

kan niet korter

T1 Opgave 9

Welke uitdrukkingen kunnen korter geschreven worden en welke niet? Zo ja, schrijf dan ook korter.

- | | | | |
|---|-------------------------------------|---|---------------------------------------|
| a | $\sqrt{5} \cdot \sqrt{6} = \dots$ | f | $2\sqrt{5} - 3\sqrt{6} = \dots$ |
| b | $\sqrt{5} \cdot \sqrt{5} = \dots$ | g | $2\sqrt{5} + 4\sqrt{5} = \dots$ |
| c | $\sqrt{5} + \sqrt{6} = \dots$ | h | $(\sqrt{5} \cdot \sqrt{6})^2 = \dots$ |
| d | $\sqrt{5} + \sqrt{5} = \dots$ | i | $(\sqrt{5})^4 = \dots$ |
| e | $2\sqrt{5} \cdot 3\sqrt{6} = \dots$ | | |

T1 Opgave 10

Schrijf zo kort mogelijk:

- | | | | |
|---|--------------------------|---|---------------------------------|
| a | $100a - a =$ | f | $-3a \cdot -2 - 6a \cdot -2a =$ |
| b | $5a^2 + 3a^2 =$ | g | $(5a^2)^2 =$ |
| c | $\frac{a+a+a}{a+a} =$ | h | $\frac{12a^5}{6a^3} =$ |
| d | $\frac{6a}{2a} =$ | i | $3a^4 + (-2a)^4 =$ |
| e | $-5x^3 + x^2 \cdot 3x =$ | | |

T1 Opgave 11

Schrijf zo kort mogelijk:

- | | | | |
|---|--------------------------------|---|---------------------------------|
| a | $(\sqrt{31})^2 =$ | d | $\sqrt{x} + 2\sqrt{x} =$ |
| b | $\sqrt{31} \cdot 2\sqrt{31} =$ | e | $\frac{\sqrt{2x}}{\sqrt{x}} =$ |
| c | $\sqrt{x} \cdot 2\sqrt{x} =$ | f | $\frac{3\sqrt{x}}{2\sqrt{x}} =$ |

T1 Opgave 12

Welke uitdrukkingen zijn gelijkwaardig met $y = 4x^2$; x is steeds positief.

- | | | | |
|---|--------------------------|---|---------------------------|
| a | $y = 6x^3 - 2x$ | d | $y = 3x^2 + x^2$ |
| b | $y = (2x)^2$ | e | $y = 3x^2 \cdot x^2$ |
| c | $x = \sqrt{\frac{y}{4}}$ | f | $x = \frac{1}{2}\sqrt{y}$ |

T1 Opgave 13

Welke uitdrukkingen zijn gelijkwaardig met $y = 6\sqrt{x}$; x is steeds positief.

- | | | | |
|---|---------------------------------|---|---------------------------------|
| a | $y = \frac{12x}{2\sqrt{x}}$ | d | $y = 3\sqrt{x} + 3\sqrt{x}$ |
| b | $y = \sqrt{3x} \cdot \sqrt{3x}$ | e | $y = 3\sqrt{x} \cdot 3\sqrt{x}$ |
| c | $y = \sqrt{3x} + \sqrt{3x}$ | f | $y = \sqrt{6x}$ |

T2 Opgave 14

- Bij een exponentieel groeiproses is de verdubbelingstijd 14 jaar.
Bereken in hoeveel jaar een hoeveelheid met 200% stijgt.
- Bij een ander exponentieel verband geldt dat de halveringstijd 8 jaar is.
Bereken met hoeveel procent een hoeveelheid in 20 jaar afneemt.

T2 | Opgave 14

- a. Schrijf de formule $y = 58 \cdot 2^{-x}$ in de vorm $y = b \cdot g^x$
- b. Schrijf de formule $y = 5^x$ in de vorm $y = 10^{ax}$
- c. Schrijf de formule $y = 120 \cdot 0,90^x$ in de vorm $y = 10^{ax+b}$

§3 Rekenen met haakjes

A. Centrale vragen

Een flippo is een schijfje van karton dat eind jaren '90 gratis in zakken chips van het toenmalige merk Smiths zat. Op de flippo werden verschillende stripfiguren afgebeeld. In Nederland werd de flippo voor het eerst geïntroduceerd in 1995, waarna er een ware rage ontstond. Vooral bij kinderen van de basisschoolleeftijd was de flippo om te verzamelen en onderling te ruilen erg populair.



Eén van de spelletjes dat voortkwam uit de flipporage was een rekenspelletje. Het doel van dit rekenspelletje was om met vier cijfers een berekening te maken met als uitkomst 24. Je moet daarbij gebruik maken van alle vier de cijfers.

- CV13 Maak voor elk van de vier bovenste flippo's (flippo 1 t/m 4) met eenmalig gebruik van elk van de vier cijfers die er op staan een berekening met als uitkomst 24 en schrijf die berekening in één regel op.

We hebben nu gezien dat haakjes gebruikt worden om de volgorde van rekenbewerkingen op getallen te beïnvloeden. Dit geldt niet alleen voor het rekenen met getallen, maar ook voor het werken met variabelen. Dit zie je bijvoorbeeld terug in de volgende economische context.

In een markt met "volkomen concurrentie" wordt een producent in de economie ook wel een "hoeveelheidsaanpasser" genoemd, omdat het wel zelf de hoeveelheid producten kan kiezen die het produceert, maar de prijs van de producten niet zelf kan bepalen. De prijs wordt bepaald door "de markt". Een veronderstelling die in de economie vaak wordt gemaakt is dat een producent naar maximale winst streeft.

In een economisch model ziet de situatie er dan bijvoorbeeld als volgt uit.

$p = 8 - 0,2q$ hierin is p de prijs en q de gevraagde hoeveelheid.

$TO = p \cdot q$ hierin is TO de totale omzet.

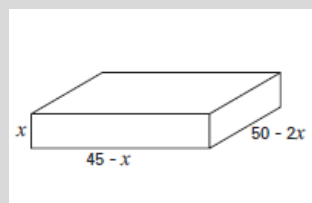
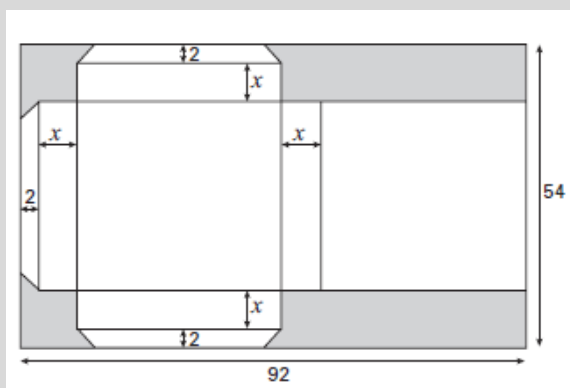
$TK = 3q + 10$ hierin is TK de totale productiekosten.

$TW = TO - TK$ hierin is TW de totale winst.

- CV14a Maak een formule voor TO uitgedrukt in q .
 CV14b Maak een formule voor TW uitgedrukt in q .
 CV14c Bereken met behulp van de GR voor welke waarde van q de totale winst (TW) maximaal is.

Een leverancier van de kartonnen dozen maakt dozen van verschillende afmetingen.

De meeste dozen worden gemaakt uit een stuk karton 54 cm bij 92 cm. De drie plakranden zijn allemaal 2 cm breed. De hoogte van de dozen die hiervan gemaakt kunnen worden, is instelbaar op de snijmachine. Deze variabele hoogte noemen we x . Bij het snijden van de doos uit het stuk karton worden de grijze delen weggesneden.



Na het vouwen en plakken krijg je een doos zoals rechts staat afgebeeld.

CV15a Maak een formule voor de inhoud van deze doos uitgedrukt in x .

CV15b Bereken met behulp van de GR de maximale inhoud van een doos die op deze manier gemaakt kan worden.

Onderstaande uitdrukkingen hebben allemaal haakjes, maar kunnen ook zonder haakjes geschreven worden.

a $y = (6ab)^2$

e $y = 3(a \cdot b)$

b $y = (a + 3)^2$

f $y = (a + b)(c + d)$

c $y = (ab)(cd)$

g $y = 3(ab)^2$

d $y = 3(a + b)$

h $y = (a + b)^2$

CV16 Schrijf bovenstaande uitdrukkingen zonder haakjes.

[Als je direct het antwoord op de centrale vragen kunt geven, geef die dan. Zo niet, maak dan de verkennende opgaven.](#)

V Opgave 1

Bereken zonder gebruik te maken van een rekenmachine:

a $-4^2 = \dots$

d $-5 \cdot -2 + 6 \cdot -2 = \dots$

b $(-2)^3 = \dots$

e $(10 + 6)(10 + 4) = \dots$

c $5 \cdot 3^2 = \dots$

V Opgave 2

Bekijk de getallen 3, 4 en 5.

Je mag rekenbewerkingen $+$, $-$, $\times$, $\div$, $^$ gebruiken en je mag haakjes zetten.

a Maak een berekening waar 27 uitkomt.

b Maak een berekening waar 17 uitkomt.

c Bedenk nog andere mogelijke uitkomsten van een berekening met de drie gegeven getallen.

V Opgave 3

Leg uit hoe je onderstaande berekeningen (handig) zonder gebruik van een rekenmachine kunt maken. Voer de berekeningen ook uit.

a $14 \cdot 21 + 16 \cdot 21 =$

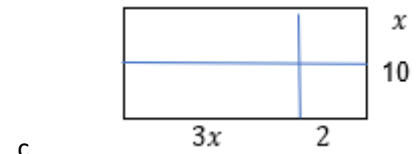
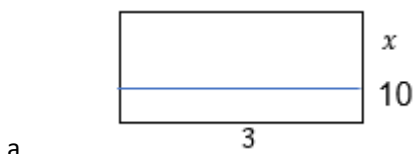
b $\frac{4}{5} \cdot 21 + \frac{1}{5} \cdot 21 =$

c $7 \cdot 5 \cdot 6 + 13 \cdot 5 \cdot 6 =$

d $99 \cdot 53 =$

V Opgave 4

Geef een formule voor de oppervlakte van onderstaande rechthoeken, geschreven zonder haakjes



B Theorie en opgaven

Haakjes gebruik je om de gewone volgorde van bewerkingen te veranderen.

Haakjes gebruik je ook om aan te geven "wat bij elkaar hoort". Bijvoorbeeld de prijs (p) als één geheel zien betekent dat in berekeningen $8 - 0,2q$ tussen haakjes gezet wordt: een formule voor de totale omzet is dan $TO = q(8 - 0,2q)$

Soms staan er geen haakjes maar moet je ze wel denken, zoals bijvoorbeeld bij $2^{x+3} = 2^{(x+3)}$

Enkele haakjes wegwerken:

$$a(3a + 4) = 3a^2 + 4a$$

Dubbele haakjes wegwerken:

$$(a + 3)(3a + 4) = 3a^2 + 4a + 9a + 12 = 3a^2 + 13a + 12$$

Let op: $3a(3a \cdot 4) = 36a^2$ en $-4^2 \neq (-4)^2$

T1 Opgave 15

Onderzoek waar of niet waar (W of NW); geef toelichting

a $98 \cdot 48 = 100 \cdot 48 - 2 \cdot 48$

b $98a = 100a - 2a$

c $56 \cdot 7 + 56 \cdot 3 = 56 \cdot 10$

d $15 \cdot 95 + 3 \cdot 95 + 2 \cdot 95 = 20 \cdot 95$

e $15a + 3a + 2a = 20a$

f $((a + a)a)a = 2a^4$

T1 Opgave 16

Schrijf zonder haakjes en zo kort mogelijk:

a $10a - 5(a + 10) =$

b $-10a - 5(-2 + (a + 3)) =$

c $(x + 2)(x + 3) =$

d $2a(a^2 + a) - 2a^2 =$

e $2 \frac{(ab)^4}{ab^4} =$

T1 Opgave 17

Welke uitdrukkingen zijn gelijkwaardig met $y = x^2 - 9x$

a $y = (x - 3)(x + 3) - 9$

b $y = (x - 3)(x + 3)$

c $y = (x - 3)(x + 6) - 18$

d $y = \frac{x^3 - 9x}{x}$

e $y = x(x - 9)$

f $y = (x - 4,5)^2 - 20,25$

g $y = (x - 6)(x - 3)$

T1 Opgave 18

Welke functies zijn lineair

a $y = 2(x - 3) - 3(x + 3) - 9$

b $y = (x - 3) + x(x + 3)$

c $y = x(x - 3) + x(-x + 6) - 18$

d $y = \frac{x^2 - 9x}{x}$

e $y = x - (x - 9)$

f $y = (x - 4,5)^2 - 20,25$

g $y = (x - 6)(x - 3)$

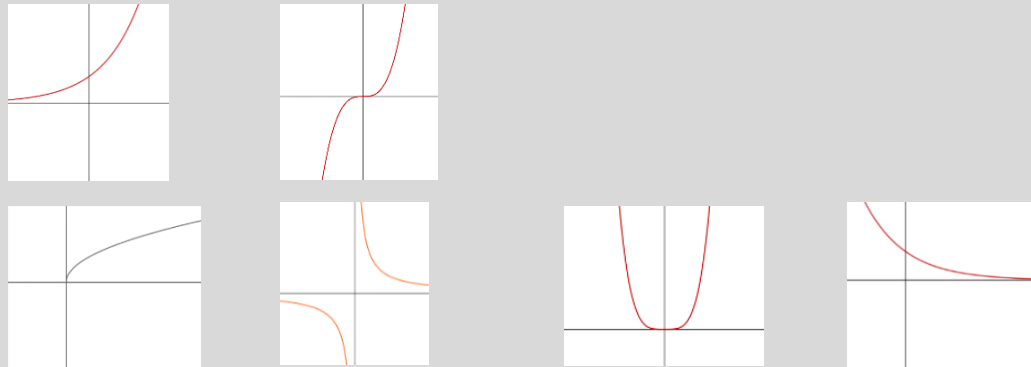
h $y = \frac{4 - 9x}{3}$

§4 Formules en grafieken van standaardfuncties

Wanneer je moet werken met formules is het handig om van een aantal standaardfuncties direct een beeld van de bijbehorende grafiek voor ogen te hebben. Dat wil zeggen: hoe ziet de vorm van de grafiek er globaal gezien uit?

A. Centrale vragen

Hieronder staan schetsen van een aantal standaard functies. Bij deze grafieken horen de bijzondere kenmerken van een grafiek zoals de snijpunten met de assen, het globale verloop (stijgend, dalend), de eventuele toppen, en de eventuele asymptoten.



Bij deze grafieken horen de formules:

$$\begin{array}{llll} y = x^2 & y = x^3 & y = x^4 & y = 2^x \\ y = \frac{1}{x} & y = 0,5^x & y = \sqrt{x} & \end{array}$$

CV17 Neem de schetsen van bovenstaande grafieken over en zet de juiste formules erbij. Beschrijf steeds de bijzondere kenmerken van de bijbehorende grafiek.

In contexten met lineaire verbanden staat de formule niet altijd in de standaardvorm $y = ax + b$ geschreven, bijvoorbeeld omdat er in de formule nog haakjes staan en/of omdat er in de formule breuken voorkomen. Het is belangrijk dat je ook in dergelijke situaties herkent dat er sprake is van een lineair verband. Hieronder staan zes voorbeelden waarin je je kunt afvragen of het nou wel een lineair verband is.

a	$y = 3(x - 4) + 4$	d	$y = 3 + 3x + 2x$
b	$y = 1 - 3x(x - 1)$	e	$y = \frac{x+8}{4}$
c	$y = 1 - 3x$	f	$y = \frac{4}{x+2}$

CV18 Onderzoek bij welke van bovenstaande formules een lineair verband hoort?

Net als bij lineaire verbanden is het bij exponentiële verbanden belangrijk dat je in een context herkent dat er sprake is van een exponentieel verband ook als de bijbehorende formule nog niet in de standaardvorm $y = b \cdot g^x$ geschreven is. Bij het werken met contexten is het dus heel handig als je in staat bent om gegeven formules in drie categorieën te verdelen: lineaire formules, exponentiële formules en overige formules.

Hieronder een aantal formules die nog niet gecategoriseerd zijn.

$$y = 100 - 2^t$$

$$P = 3,2^{x+4}$$

$$C = 120 - (t + 2)$$

$$y = 100 \cdot 1,9^t$$

$$A = 5 \cdot 1,2^t + 120$$

$$D = \frac{4}{2^t}$$

$$P = 3,6^x$$

$$R = \frac{120-1,6t}{4}$$

$$2x + 3y = 10$$

$$A = 5 \cdot 1,2^p$$

$$H = \frac{4}{2t}$$

$$2xy = 12$$

$$R = 120 - 0,6t$$

$$F = 5 \cdot 1,2^{-t}$$

$$y = 2 \cdot t^3$$

$$y = 3(x + 2) - 9$$

$$B = 120 + 3t(t + 2)$$

$$L = 5 \cdot R^4$$

$$z = 100(4 \cdot 0,9)^t$$

CV19 Verdeel bovenstaande formules drie categorieën: lineaire formules, exponentiële formules, overige formules.

[Als je direct het antwoord op de centrale vragen kunt geven, geef die dan. Zo niet, maak dan de verkennende opgaven.](#)

V Opgave 1

De formule $y = 3x - 5$ is gemakkelijk te herkennen als een lineaire formule omdat de formule in de standaardvorm van lineaire formules staat geschreven.

Hieronder staan twee formules die je wellicht niet direct herkent als een lineaire formules, maar die dat wel zijn. Je kunt ze namelijk in de vorm $y = ax + b$ schrijven. Je moet daarbij gebruik maken van rekenregels voor breuken (paragraaf 1) en rekenregels voor haakjes (paragraaf 3).

a Schrijf $y = \frac{2x-1}{4}$ in de vorm $y = ax + b$

b Schrijf de formule $y = 3(x - 1) + 2$ in de vorm $y = ax + b$

V Opgave 2

Een formule als $y = 100 \cdot 0,8^x$ is gemakkelijk te herkennen als een exponentiële formule omdat deze in de standaardvorm van exponentiële formules is geschreven.

Hieronder staan twee formules die je wellicht niet direct herkent als exponentiële formules maar die dat wel zijn. Je kunt ze namelijk in de vorm $y = b \cdot g^x$ schrijven. Je moet daarbij gebruik maken van de rekenregels voor machten die in paragraaf 2 zijn behandeld.

Schrijf de formule $y = 2^{x+3}$ in de vorm $y = b \cdot g^x$

Hint: bedenk dat 2^{x+3} geschreven kan worden als $2^x \cdot 2^3$ of maak een tabel

Antwoord op de centrale vragen

B Theorie en opgaven

Lineaire functies

De basis is $y = x$ en in het algemeen: $y = ax + b$

De grafieken van lineaire functies zijn lijnen.

Lineaire formules zijn te schrijven in de vorm $y = ax + b$, maar de formules hoeven er nog niet zo uit te zien. Als je twijfelt of je te maken hebt met een lineaire verband, maak dan een tabel en kijk of bij gelijke "x" toename gelijke "y" toename horen.

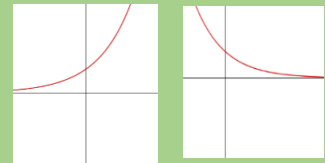
Exponentiële functies

De basis is $y = g^x$ en in het algemeen: $y = b \cdot g^x$

De grafieken hebben de volgende vorm afhankelijk van de waarde van de groeifactor.

Als de groeifactor groter is dan 1 dan verloopt de grafiek toenemend stijgend.

Als de groeifactor kleiner is dan 1 dan verloopt de grafiek afnemend dalend.



Exponentiële formules kunnen geschreven worden in de vorm $y = b \cdot g^x$, maar de formules hoeven er niet zo uit te zien. Als je twijfelt of je te maken hebt met een exponentieel verband, maak dan een tabel en kijk of bij gelijke "x" toename steeds eenzelfde groeifactor hoort.

Lineair, exponentieel of overig.

Grofweg zou je functies in kunnen delen als lineaire functies, exponentiële functies en overige functies. Het is belangrijk dat je lineaire functies en exponentiële functies kunt herkennen niet alleen in een context of aan een gegeven tabel of gegeven grafiek maar ook aan een gegeven formule.

Onder de restcategorie overige functies vallen onder meer wortelfuncties, machtsfuncties en gebroken functies.

Wortelfuncties

De basis is $y = \sqrt{x}$

De grafiek heeft een beperkt domein ($x \geq 0$) en een beperkt bereik ($y \geq 0$).

De grafiek verloopt afnemend stijgend.



Machtsfuncties

Met gehele exponenten:

$$y = x^2, y = x^4$$

Even machten



$$y = x^3, y = x^5$$

Oneven machten



Met gebroken exponenten:

Exponent tussen 0 en 1

Afnemende stijging



Exponent groter dan 1

Toenemende stijging



Gebroken functies

De basis is $y = \frac{1}{x}$

De grafiek heeft een beperkt domein ($x \neq 0$) en een beperkt bereik ($y \neq 0$).



De grafiek heeft een verticale asymptoot ($x = 0$)
 en een horizontale asymptoot ($y = 0$).
 Deze grafiek noemen we een **hyperbool**.

T1 Opgave 19

Onderzoek bij elk van de onderstaande formules of er sprake is van een lineair verband.

Zo ja, schrijf de formule in de vorm $y = ax + b$

a $y = \frac{15x+8}{3}$

c $y = \frac{24-3x}{2}$

b $y = \frac{3(x+7)}{5}$

d $y = \frac{6(x+8)}{x}$

T1 Opgave 20

Onderzoek bij elk van de onderstaande formules of er sprake is van een exponentieel verband. Zo ja, schrijf de formule in de vorm $y = b \cdot g^x$

a $y = 100 \cdot 0,9^x$

d $y = 5 \cdot 1,2^{2x}$

b $y = 100 + 0,9^x$

e $y = 120 - 0,6x$

c $y = 3,2^x$

T1 Opgave 21

Welke expressies zijn gelijkwaardig met $y = \frac{60}{x}$; x is steeds positief

a $\gg y = 12x^{-1} \cdot 5$

b $\gg y = \frac{12}{x^2} \cdot 5x$

c $\gg y = \frac{60+x}{x^2}$

d $\gg y = 60 \cdot \frac{1}{x}$

e $\gg y = \frac{6}{x} \cdot \frac{10}{x}$

f $\gg y = \frac{6}{x} + \frac{54}{x}$

g $\gg y = \frac{30}{x} \cdot 2$

T2 Opgave 22

We bekijken de grafieken van de functies $y_1 = x^{0,82}$ en $y_2 = x^{0,70}$; voor $x \geq 0$

Beschrijf de overeenkomsten en de verschillen tussen beide grafieken.

T2 Opgave 23

We bekijken de grafieken van de functies $y_1 = 0,82^x$ en $y_2 = 0,70^x$

Beschrijf de overeenkomsten en de verschillen tussen beide grafieken.

T2 Opgave 24

We bekijken de grafieken van de functies $y_1 = x^4$ en $y_2 = x^6$

Beschrijf de overeenkomsten en de verschillen tussen beide grafieken.

T2 | Opgave 25

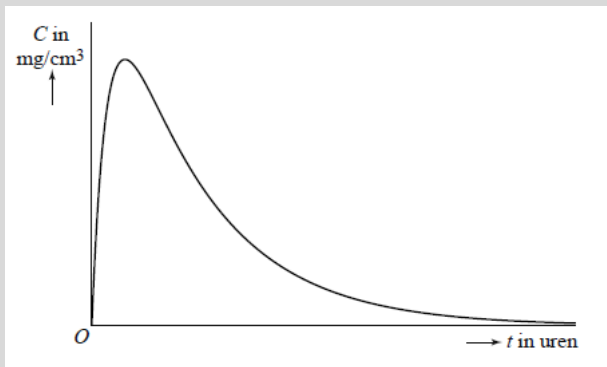
We bekijken de grafieken van de functies $y_1 = \frac{10}{x}$ en $y_2 = \frac{10}{x-3}$

Beschrijf de overeenkomsten en de verschillen tussen beide grafieken.

§5 Redeneren met formules en grafieken

A. Centrale vragen

Een farmaceut brengt een nieuw medicijn tegen hooikoorts op de markt. Het nieuwe medicijn wordt als pillen verkocht. Als een patiënt klachten krijgt, neemt hij een pil. De werkzame stof komt dan via de maag en de darm in de bloedbaan terecht. De hoeveelheid werkzame stof in de bloedbaan stijgt eerst en neemt daarna af omdat het door het lichaam wordt afgebroken. De concentratie van de werkzame stof in de bloedbaan noemen we C . In onderstaande figuur zie je een schets van de grafiek van C .



Aan de schets van de grafiek is te zien dat de werkzame stof na verloop van tijd nagenoeg uit het bloed verdwenen is. Als er naar een formule wordt gezocht om deze grafiek te beschrijven zal de formule dus in ieder geval aan deze eigenschap moeten voldoen.

Onderzoekers hebben twee formules opgesteld om de grafiek van C te beschrijven.

$$C_1(t) = \frac{16t}{190t^2 + 60}$$

$$C_2(t) = 0,13(0,52^t - 0,02^t)$$

Beide formules voldoen aan de eigenschap dat de C -waarden bijna nul zijn als t heel groot is. Dit kun je narekenen door voor t een hele grote waarde in te vullen in de formule en dan de bijbehorende waarde voor C te berekenen. Je moet dit ook kunnen aantonen met een redenering aan de hand van de formule.

CV20 Beredeneer voor elk van de twee formules dat C bijna nul is als t heel groot is.

Voor elke standaardfunctie uit de vorige paragraaf ($y = ax + b$, $y = \sqrt{x}$, etc) kun je bedenken wat de grafiek doet als x heel erg groot wordt. Wat gebeurt er dan met de bijbehorende y -coördinaat? Dit noemen we het oneindig gedrag van de functie.

Bijvoorbeeld bij $y = \frac{1}{x}$: Als x heel groot wordt, deel je door een steeds groter getal, dus wordt de uitkomst (y -waarde) steeds kleiner. Maar het zal altijd positief blijven, dus steeds dichterbij 0.

Nog een voorbeeld van $y = -2x^2 + 60x + 900$:

Als x heel groot is dan zal $-2x^2$ heel negatief zijn en $60x$ heel positief; maar de $-2x^2$ is sterker; de 900 speelt nauwelijks nog een rol; dus y zal heel negatief zijn.

a $y = -3(x - 1)^2 + 200$

c $y = \frac{250x^2 + 10x}{4x^2 + 5x + 10}$

b $y = 0,4 + \frac{200}{x}$

d $y = \frac{300}{2 + 0,9^x}$

CV21 Bepaal met behulp van een redenering steeds het "oneindig gedrag" van de bovenstaande formules.

Bij sommige formules geldt dat de grafiek steeds stijgend of steeds dalend verloopt. In sommige gevallen moet je ook dit kunnen beredeneren aan de hand van de formule. Bestudeer onderstaand voorbeeld

Opgave: Beredeneer dat de grafiek van y stijgend verloopt als $y = 100 \cdot 1,2^t + 50$.

Antwoord: als t groter wordt ($t \uparrow$) dan zal $1,2^t$ groter worden ($1,2^t \uparrow$). Dan zal $100 \cdot 1,2^t$ ook groter worden ($100 \cdot 1,2^t \uparrow$) en dan zal $100 \cdot 1,2^t + 50$ ook groter worden

($100 \cdot 1,2^t + 50 \uparrow$), dus y wordt groter ($y \uparrow$).

Bijna zonder woorden geschreven kun je deze redenering als volgt opschrijven:

als $t \uparrow \rightarrow 1,2^t \uparrow \rightarrow 100 \cdot 1,2^t \uparrow \rightarrow 100 \cdot 1,2^t + 50 \uparrow$ dus $y \uparrow$

Bij onderstaande formules verloopt de grafiek steeds stijgend of steeds dalend.

a $y = 3\sqrt{x-2} + 5$

c $y = \frac{4(x-3)}{10}$

b $y = \frac{100}{20+4x} + 5$ voor $x \geq 0$

d $y = \frac{200}{4+0,8^x}$

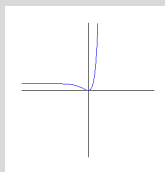
CV22 Laat met behulp van een redenering aan de hand van de formule zien dat bovenstaande formules stijgend of dalend zijn.

In contexten wordt vaak een grafiek gegeven die bij een formule hoort, maar soms wordt ook alleen een formule gegeven. Vaak is het handig als je vooraf al een idee hebt hoe de grafiek ongeveer loopt. Daarvoor kun je gebruik maken van de context en van redeneringen aan de hand van de formule, bijvoorbeeld over het oneindig gedrag.

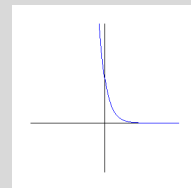
Door naar het oneindig gedrag te kijken en ook even de y -waarde bij $x = 0$ te berekenen (het snijpunt met de y -as te bepalen) kun je al snel een idee krijgen hoe de grafiek bij de gegeven formule er uit zou kunnen zien. Andersom kun je ook snel bedenken of een bepaalde grafiek wel of niet bij de gegeven formule zou kunnen passen.

Hier volgen steeds een formule en een grafiek. De grafiek hoeft niet bij de formule te passen. Aan jou de taak om op te sporen wanneer de grafiek echt niet bij de grafiek kan passen. Licht je antwoorden toe.

a $y = -2x(x-2)(x+4)$



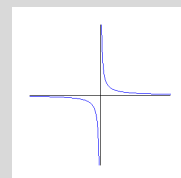
h $y = -2 \cdot 3^x$



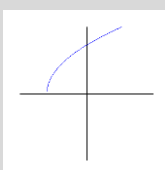
b $y = 4 + \frac{2}{x}$



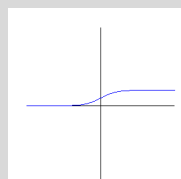
i $y = 2x + \frac{4}{x}$

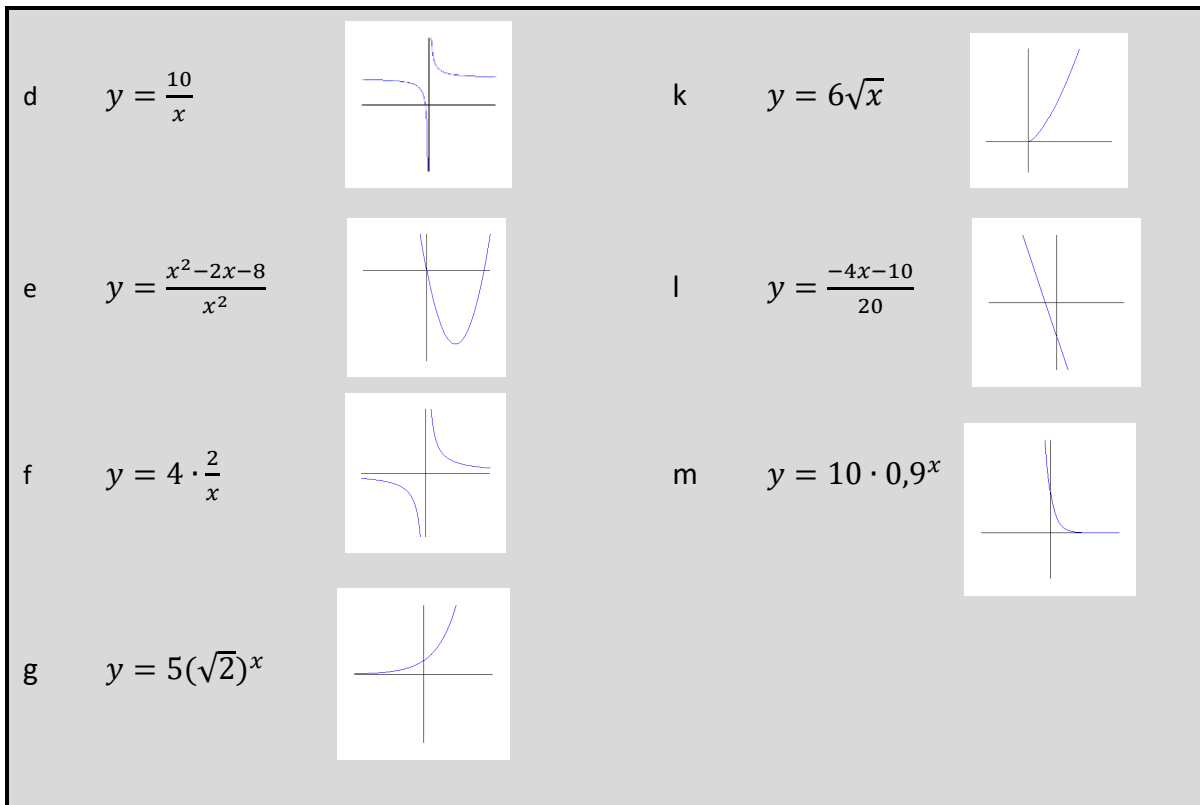


c $y = 3\sqrt{x+6}$



j $y = \frac{10}{1+0.4^x}$





CV23 Zoek van bovenstaande grafieken uit welke formule echt niet bij de grafiek zou kunnen passen. Licht je antwoorden toe.

Antwoord op de centrale vragen

C Theorie en opgaven

Het **oneindig gedrag van een formule** (wat gebeurt er met de y -waarden als x naar oneindig gaat?) is handig als je een grafiek moet beoordelen. Met behulp van grote getallen als “een miljoen” kun je het oneindig gedrag vaststellen door een berekening uit te voeren. Maar je moet het oneindig gedrag van bepaalde formules ook kunnen beredeneren. Om te kunnen redeneren aan de hand van een formule moet je beschikken over het repertoire aan basisgrafieken zoals de grafieken van lineaire formules, exponentiële formules, wortelformules en gebroken functies in de vorige paragraaf.

In ingewikkelder formules kun je namelijk vaak dit soort basisfuncties vinden en dat geeft je aanknopingspunten om te beredeneren wat die ingewikkelde formule aan oneindig gedrag zal laten zien.

Bedenk daarbij dat machten als x^2 , x^3 , enzovoort altijd sterker zijn dan x (en x^3 sterker dan x^2 enzovoort).

Bij $y = 0,01x^3 + 25x - 32000$ geldt dus dat x^3 sterker is dan de andere twee termen ($25x$ en -32000) en dat die twee termen in de formule dus verwaarloosbaar zijn bij grote waarden van x .

Daarnaast moet je weten dat exponentiële verbanden altijd sterker zijn dan machten. Dus bij $y = x^{120} \cdot 0,6^x$ zal op den duur de factor x^{120} in de formule verwaarloosbaar zijn ten opzichte van de factor $0,6^x$. De y -waarden zullen naar 0 naderen.

Op min of meer dezelfde wijze kun je voor bepaalde formules beredeneren dat de grafiek steeds stijgend of steeds dalend zal verlopen. Ook hierbij is het repertoire aan basisgrafieken van essentieel belang. Daarnaast is het van belang dat je in staat bent om in ingewikkelde formules basisfuncties te ontdekken zodat je inziet welke uit welke basiseenheden een ingewikkelde formule bestaat. Pas als je ziet hoe een ingewikkelde formule is opgebouwd kun je het repertoire aan basisgrafieken gaan inzetten om te redeneren.

Bij sommige formules geldt dat de grafiek steeds stijgend of steeds dalend verloopt. In sommige gevallen moet je ook dit kunnen beredeneren aan de hand van de formule.

Voorbeeld

Gegeven is de formule $y = 100 \cdot 1,2^t + 50$.

Beredeneer dat de grafiek van y stijgend verloopt.

Antwoord: als $t \uparrow \rightarrow 1,2^t \uparrow \rightarrow 100 \cdot 1,2^t \uparrow \rightarrow 100 \cdot 1,2^t + 50 \uparrow$ dus $y \uparrow$

In woorden is dit: Als t steeds groter wordt, dan wordt $1,2^t$ ook steeds groter. Als je dit keer 100 doet dan krijg je $100 \cdot 1,2^t$ en dat wordt dan ook steeds groter. Als je daar 50 bij optelt, dan wordt dit ook groter. Dus de uitkomst y wordt steeds groter naarmate je een steeds grotere waarde voor t invult.

T1 Opgave 26

Beredeneer het oneindig gedrag van de volgende formules (als x heel groot dan $y \dots$):

a $y = 50x - 1,5x^2$

d $y = \frac{300}{6+5 \cdot 0,9^x}$

b $y = \frac{50}{5+2x} + 35$

e $y = 0,5^x + x^2$

c $y = \frac{1}{4}(x-3) + x - 1$

f $y = 25x + \frac{50}{x}$

T1 Opgave 27

Een tuinder heeft een waterreservoir waarin hij regenwater opvangt. In een periode van droogte gebruikt hij het water om de planten water te geven.

De formule $V = \frac{140}{(0,04t+1)^2}$ geeft de hoeveelheid water in het reservoir in m^3 na t dagen.

a Beredeneer het oneindig gedrag van V .

b Schets een grafiek van V .

T2 Opgave 28

Van de onderstaande formules verloopt de grafiek steeds stijgend of steeds dalend. Beredeneer dit aan de hand van de formule.

a $y = \frac{200}{x^2}$ voor $x \geq 0$

d $y = 6 - 3\sqrt{x+2}$

b $y = -0,5x^2 + 200$ voor $x \geq 0$

e $y = 20 \cdot 1,05^x + 10$

c $y = \frac{100-5x}{20}$

f $y = 100 \cdot 0,92^x + 25$

§6 Formules maken en modelleren

In eerdere katernen hebben we al eens lineaire formules en exponentiële formules opgesteld. Met deze manier van maken van een formule zijn we dus al bekend. Omdat het maken van lineaire en exponentiële formules een heel belangrijke vaardigheid is binnen het wiskunde A programma herhalen we deze vaardigheid aan het begin van deze paragraaf. Je moet in staat zijn om bij een gegeven context, een gegeven tabel of een gegeven grafiek een lineaire of een exponentiële formule te maken. De algemene vorm van een lineaire formule en de algemene vorm van een exponentiële formule moet je inmiddels uit je hoofd kennen. Dit moet onderdeel zijn van je parate kennis. De algemene vorm van een lineaire formule: $y = a \cdot x + b$ hierin zijn a en b constanten, a noemen we het hellingsgetal en b het startgetal. De algemene vorm van een exponentiële formule: $y = b \cdot g^x$ hierin is g de groeifactor en b de beginwaarde.

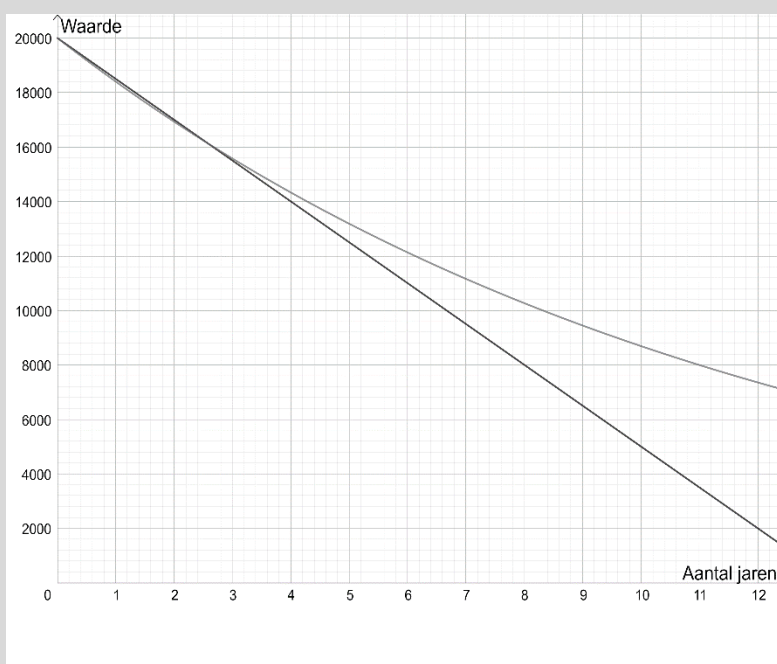
Wanneer gevraagd wordt om een lineaire formule of een exponentiële formule op te stellen, is de vorm van de formule dus bekend.

A. Centrale vragen

Formule maken met bekende vorm

Een bedrijf koopt een machine aan voor € 20.000. De waarde van deze machine neemt in de loop van de tijd af. Hoe die waardedaling verloopt kan allerlei verschillende vormen aannemen. Bijvoorbeeld, elk jaar neemt de waarde met € 1.500 af of elk jaar neemt de waarde met 8% af. In het eerste geval zal de waarde van de machine lineair dalen (er is immers sprake van een vaste afname van de waarde per jaar) en in het tweede geval zal de waarde van de machine exponentieel dalen (er is immers sprake van een vaste procentuele afname per jaar). We kunnen dit weergeven in een tabel en in een grafiek waarbij W_1 de waarde weergeeft bij het lineaire verloop van de waarde en W_2 bij een exponentieel verloop.

	Begin	Na 1 jaar	Na 2 jaar	Na 3 jaar	Na 4 jaar	Na 5 jaar	Na 6 jaar
W_1	20.000			15.500			11.000
W_2	20.000			15.573			12.127



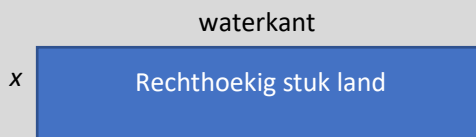
CV24a Maak de formules voor het lineaire waard verloop en het exponentiële waard verloop enkel en alleen op basis van de tekst (dus zonder gebruik te maken van de tabel of grafieken).

CV24b Laat zien hoe je deze formules ook kunt maken op basis van alleen de tabel of grafiek.

Er zijn ook situaties denkbaar waarin de vorm van de formule die je moet maken niet van tevoren bekend is en waarin je alleen een tekst hebt gegeven en het dus zonder een tabel of een grafiek moet doen. De formule die je dan moet maken, moet volgen uit de tekst. Hieronder bekijken we een voorbeeld van deze situatie.

Formule maken zonder bekende vorm

Op een camping mag je met een touw van 80 meter een rechthoekig stuk land afzetten. Nu is het slim om het stuk land langs de waterkant te leggen omdat je dan het touw voor een zijde niet hoeft te gebruiken. Je wilt natuurlijk een zo groot mogelijk stuk land afzetten, zoals hieronder.



CV25 Maak een formule voor de oppervlakte van het rechthoekig stuk land uitgedrukt in x . (hint: maak eerst een getallenvoorbeeld)

Tot nu toe keken we naar situatie waarin een formule gemaakt moest worden op basis van een tekst, een tabel of een formule. Er komen ook situaties voor waarin er twee of misschien zelfs wel meer formules gegeven zijn en waarin je die formules op één of andere manier met elkaar moet combineren. Een bekend voorbeeld daarvan is dat je twee formules gegeven hebt en dat je de ene formule in de andere formule moet invullen. Sommigen noemen dit het schakelen van formules.

Schakelen van formules

De economische waarde van een boom wordt bepaald door het soort en de hoogte van de boom. De hoogte van de boom is afhankelijk van de leeftijd van de boom. Voor een bepaald soort bomen gelden de volgende twee formules:

$$h = 1,2t + 0,8 \qquad w = 2h - 2$$

Hierin is h de hoogte van de boom, w de economische waarde van de boom en t de leeftijd van de boom.

CV26 Maak met deze gegevens een formule voor de waarde van de boom uitgedrukt in de leeftijd.

Er zijn ook situaties waarin één formule is gegeven en waarbij je die formule wilt omkeren. Meestal werken met formules waarin y uitgedrukt wordt in x , maar soms is het handiger in x juist uit te drukken in y . Hieronder staat een voorbeeld.

Formule omkeren

Fahrenheit is een temperatuurschaal, bedacht door Gabriël Fahrenheit. Hij kwam met zijn schaalverdeling in 1724. Dit was eerder dan Anders Celsius die in 1742 de temperatuurschaal in graden Celsius definieerde. De Fahrenheitschaal wordt officieel in vijf landen gebruikt, waaronder de Verenigde Staten. In andere landen wordt de temperatuur in graden Celsius uitgedrukt.

Er geldt: $T_F = T_C \cdot \frac{9}{5} + 32$ hierin is T_F de temperatuur in graden Fahrenheit en T_C de temperatuur in graden Celsius.

In deze formule is het aantal graden Fahrenheit uitgedrukt in het aantal graden Celsius. Maar soms wil je dit net andersom. Dan is het handig om een formule te hebben waarbij het aantal graden Celsius is uitgedrukt in het aantal graden Fahrenheit.

CV27 Keer de gegeven formule om, dat wil zeggen druk T_C uit in T_F .

Tot slot van de paragraaf over het maken van formules bekijken we de situatie waarin gevraagd wordt om een gegeven formule in een bepaalde vorm te schrijven. Wiskundigen noemen dit herleiden.

Herleiden

Een netwerk voor gastransport heeft een bepaalde maximale capaciteit die afhankelijk is van de buitentemperatuur (in °C).

$$P = 5,5 + \frac{18-T}{30} \cdot 94,5$$

hierin is P het percentage van de maximale capaciteit van het netwerk dat gebruikt wordt voor gastransport en T de buitentemperatuur in graden Celsius.

CV28a Schrijf de formule voor P in de vorm: $P = a \cdot T + b$

CV28b Schrijf $y = \frac{6}{x^2} \cdot 18x^6$ in de vorm $y = a \cdot x^n$

CV28c Schrijf $y = 2(x-1)(2x+3) + 3(2x-7)$ in de vorm $y = ax^2 + bx + c$

[Als je direct het antwoord op de centrale vragen kunt geven, geef die dan. Zo niet, maak dan de verkennende opgaven.](#)

V Opgave 1

Bij de berekening van het cijfer C voor een proefwerk wordt het aantal behaalde punten P gedeeld door het maximale aantal punten (M), dat vermenigvuldigt met 9 en er wordt er 1 bij opgeteld.

Maak een formule voor C uitgedrukt in P en M

V Opgave 2

Het omkeren van formules gaat simpel als je een pijlenketting hebt.

Hieronder staan vier pijlenkettingen:

$$x \longrightarrow \boxed{\text{MIN } 2} \longrightarrow \boxed{\text{Wortel}} \longrightarrow$$

$$x \longrightarrow \boxed{\dots^3} \longrightarrow \boxed{\text{MAAL } 2} \longrightarrow$$

$$x \longrightarrow \boxed{\text{MAAL } 2} \longrightarrow \boxed{\text{wortel}} \longrightarrow$$

$$x \longrightarrow \boxed{\text{Keer } -3} \longrightarrow \boxed{+5} \longrightarrow$$

Maak bij iedere pijlenketting een formule en maak bij iedere formule ook de omgekeerde formule door de pijlenketting om te keren.

B. Antwoord op de centrale vragen

C Theorie en opgaven

Formules komen voor in de volgende soort opgaven:

- Opstellen van een **bekende formule** (bv lineair of exponentieel)

Tip: Gebruik een tabel

- Opstellen van een **onbekende vorm formule**

Tip: Maak eerst een getallenvoorbeeld, gebruik daarna letter(s)

- **Schakelen** van twee formules

Tip: Vul de hele nieuwe formule in de andere in tussen haakjes, zie voorbeeld hieronder.

- **Omkeren** van een formule

Tip: Zorg dat je omkeerformules kent van basisformules zoals $y = 2x + 6$ en $y = \sqrt{x}$

- Formule in een gegeven vorm schrijven (**herleiden**)

Tip: Gebruik zorgvuldig de balansmethode, wat je links van het = teken doet, doe dat rechts ook!!

Voorbeeld

Gegeven zijn $A = 2B + C$ en $B = 3C + 5$. Druk A uit in C .

Vul de hele formule van B tussen haakjes in: $A = 2(3C + 5) + C$

Druk x uit in y :

$$y = 2x + 6$$

$$y = \sqrt{x}$$

$$y - 6 = 2x$$

$$y^2 = x$$

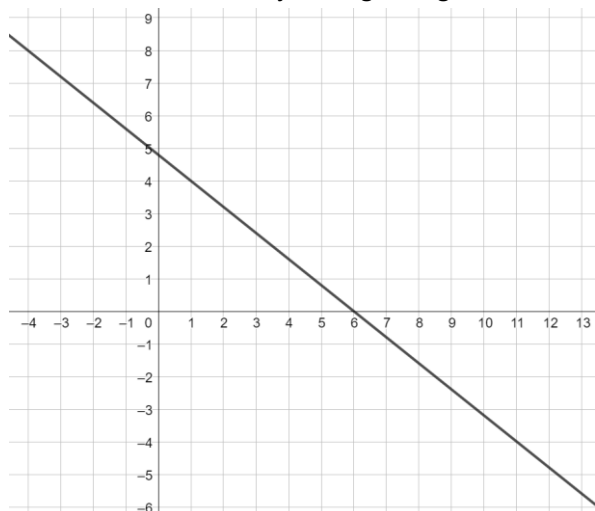
$$\frac{1}{2}y - 3 = x$$

T1 Opgave 29

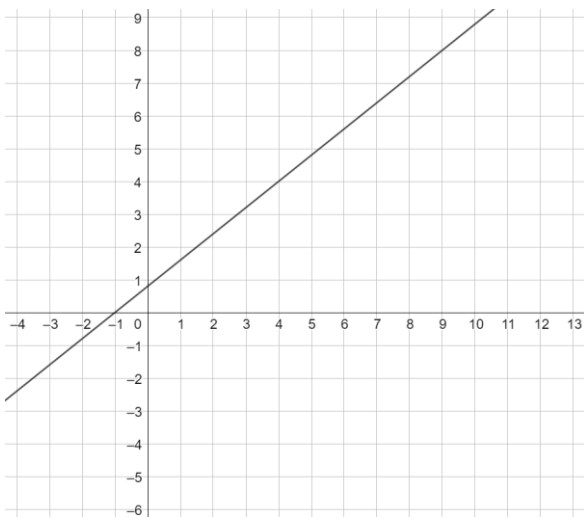
Hier zie je de grafieken van lineaire en exponentiële functies. Maak een formule bij de volgende grafieken:



Grafiek A



Grafiek B



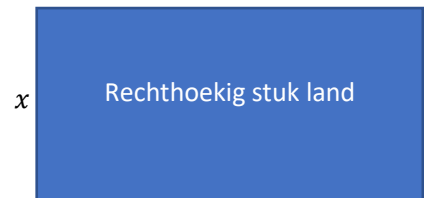
Grafiek C



Grafiek D

T1 Opgave 30

Een rechthoekig stuk land moet een oppervlakte krijgen van 1600 m^2 .
Maak een formule voor de omtrek, uitgedrukt in x .



T1 Opgave 31

Gegeven is: $P + 10 = 2R$ en $R + Q = 100$
Maak een formule voor P uitgedrukt in Q .

T1 Opgave 32

Het omkeren van een formule is niet iets dat alleen binnen de wiskunde plaatsvindt. Ook in andere vakgebieden wordt dit veelvuldig gebruikt. In deze opgave bekijken we een eenvoudig voorbeeld hiervan uit de natuurkunde (onderdeel a) en uit de economie (onderdeel b). Het verband tussen spanning (U in volt), stroomsterkte (I in ampère) en weerstand (R in Ohm) wordt gegeven door de wet van Ohm: $U = I \cdot R$. Hierin is R een constante.

a Druk I uit in U en R .

De relatie tussen de gevraagde hoeveelheid (q) van een product en de prijs die voor het product in rekening wordt gebracht (p) wordt in de economie vaak gegeven door een formule waarin p uitgedrukt wordt in q , bijvoorbeeld:

$$p = 150 - \frac{1}{2}q$$

Soms is het nodig om q uit te drukken in p .

b Doe dit.

T1 Opgave 33

Druk x uit in y :

a $2x + 3y = 12$

b $y = 3 + 2\sqrt{x}$

T2 Opgave 34

Een fabrikant van spelletjes wil een nieuw spel op de markt brengen. Vooraf doet hij onderzoek naar de afzetmogelijkheden. De prijs van een spelletje is afhankelijk van het aantal spelletjes dat hij denkt te kunnen verkopen. $p = -\frac{1}{150}q + 60$, waarbij p de prijs in euro en q het aantal verkochte spelletjes per maand. Voor de kosten maakt hij de volgende schatting: $K = 3q + 1500$, waarbij K de kosten per maand in euro.

Maak een formule voor de winst W per maand uitgedrukt in q .

$$\text{Omzet} = \text{Prijs} \times \text{Aantal verkocht}$$

$$\text{Winst} = \text{Omzet} - \text{Kosten}$$

T1 Opgave 35

- a Schrijf $y = -2(x - 3) - 2x(x - 4)$ in de vorm $y = ax^2 + bx + c$
 b Schrijf $y = (2x + 7)^2 + 4x - 7$ in de vorm $y = ax^2 + bx + c$

T1 Opgave 36

Gegeven de formule $y = 3x(2m - 8) + 13$

Verder is gegeven dat $m = 11$

- a Schrijf de formule voor y in de vorm $y = ax + b$

Gegeven zijn de formules $M = 8pq + 3p$ en $q = 3 + p$

- b Toon aan dat: $M = 27p + 8p^2$

Gegeven is de formule $R = 4f + 9$

- c Druk f uit in R .

Gegeven is de formule $H = 7,38 \cdot \left(\frac{2v-12}{3} + 8,17\right)$

- d Schrijf de formule voor H in de vorm: $H = av + b$

Gegeven is de formule $W = \frac{2k}{3} \left(\frac{5}{k} - 8\right) + 7$

- e Schrijf de formule voor W in de vorm $W = ak + b$

§7 Probleemaanpak en Gemengde Opgaven

Probleemaanpak bij algebra

Je gaat nu gemengde opgaven maken waarbij je algebraïsche vaardigheden moet inzetten om de vragen te beantwoorden. Hoe pak je dat nou aan? Soms heb je geen enkel idee wat je moet gaan doen. Dan kun je toch op verschillende manieren te werk gaan:

- Als er geen schets van de situatie gegeven is, probeer dan zelf een **schets** te maken die bij de gegevens past.
- Probeer een **getallenvoorbeeld** door te rekenen waarbij je “mooie” getallen kiest waarbij je gemakkelijk kunt rekenen.
- Probeer het hele probleem in **deelproblemen** te hakken die je wel herkent.

Maar vaak is het helemaal niet zo dat je geen enkel idee hebt wat je moet gaan doen. Meestal herken je toch wel wat in een opgave maar weet je nog niet precies hoe verder te gaan. Dan is het handig om je geheugen wat te helpen door even de tijd te nemen om wat associaties te maken en deze associaties kort op te schrijven. Hieronder geven we lijst van **associaties** die je zou kunnen maken:

Breuken, Verhoudingen en Procenten

- **Breuken** alleen optellen als ze gelijknamig zijn; wel altijd vermenigvuldigen
- **Verhoudingen**: wat is het totaal dat verdeeld moet worden
- **Procenten** vaak makkelijk met een factor (anders 1% methode of verhoudingstabel)

Machten

- Alleen gelijksoortige machten optellen: $2x^3 + 5x^3 = 7x^3$
- Machten kun je altijd vermenigvuldigen: $x^2 \cdot x^3 = x^5$
- Machten kun je ook tot een macht verheffen: $(x^3)^2 = x^6$

Haakjes

- Gebruik haakjes wanneer je iets bij elkaar moet houden
- Enkele haakjes wegwerken: $3(x - 8) = 3x - 24$
- Dubbele haakjes wegwerken: $(x - 3)(x + 4) = x^2 - 3x + 4x - 12$

Redeneren met formule

- Beredeneer het snijpunt met de assen:
 x -as krijg je door $y = 0$ in te vullen
 y -as krijg je door $x = 0$ in te vullen
- Beredeneer over stijgen, dalen of oneindig gedrag:
als x groter wordt, wat gebeurt er met y ?

Maken van een formule

- Standaardformule opstellen. **Lineair** of **Exponentieel**
- Andere soort formule. Gebruik eerst een getallenvoorbeeld. Daarna een variabele letter
- Twee formules **schakelen**, de ene formule in de andere invullen
- Formule **omkeren**, maak pijlenketting bij de formule. Keer daarna de pijlenketting om
- Formule **Herleiden**, schrijf de formule korter of in de gevraagde vorm. Gebruik rekenregels voor breuken, machten en haakjes.

Mocht je dus moeite hebben met de onderstaande gemengde opgaven, lees nog eens de bovenstaande tips voor het aanpakken van algebraïsche problemen.

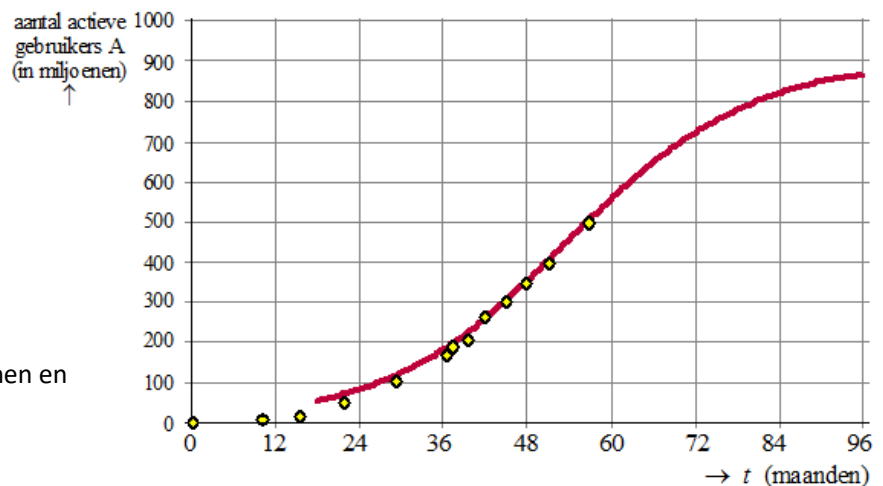
T2 Opgave 37

Hier zie je informatie over het aantal facebook gebruikers.

Bij deze grafiek hoort de formule:

$$A = \frac{4500}{5 + 310 \cdot 0,93^t}$$

Hierin is A het aantal actieve gebruikers in miljoenen en t de tijd in maanden met $t = 0$ op 1-12-2005.



- Bereken met de formule in welk jaar het aantal actieve gebruikers gelijk is aan 500 miljoen.
- Beredeneer aan de hand van de formule dat het aantal actieve gebruikers blijft stijgen en dat het aantal actieve gebruikers volgens deze formule nadert naar een grenswaarde.

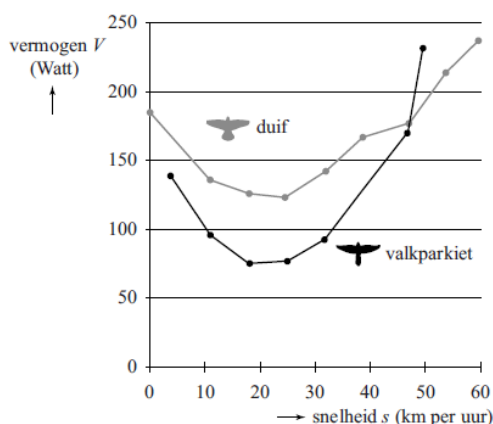
T2 Opgave 38

Onderzoek met een redenering aan de hand van de formule of de uitkomst y steeds stijgt of daalt als x groter wordt (er geldt steeds dat x niet negatief is)

- | | | | |
|---|----------------------------|---|---------------------------|
| a | $y = \frac{4}{x+2}$ | c | $y = \frac{40}{x^2} + 50$ |
| b | $y = 100 \cdot 0,9^x + 60$ | d | $y = 4x - 0,1x^3$ |

T2 Opgave 39

Er wordt veel onderzoek gedaan naar het verband tussen het vermogen (het energieverbruik per seconde) en de vliegsnelheid bij vogels. Het vermogen V wordt gemeten per kg borstspier en uitgedrukt in Watt. Een onderzoek heeft uitgewezen dat de grafiek van het verband tussen de vliegsnelheid en het vermogen U-vormig is. Dat wil zeggen: vliegen met lage of hoge snelheid kost veel vermogen, terwijl vliegen met een snelheid daartussenin minder vermogen kost. In de figuur is dit verband voor valkparkieten en duiven weergegeven.



Voor duiven is het verband tussen de vliegsnelheid en het vermogen dan van de vorm:

$$V = p(s - 8)(s - 34) + 150$$

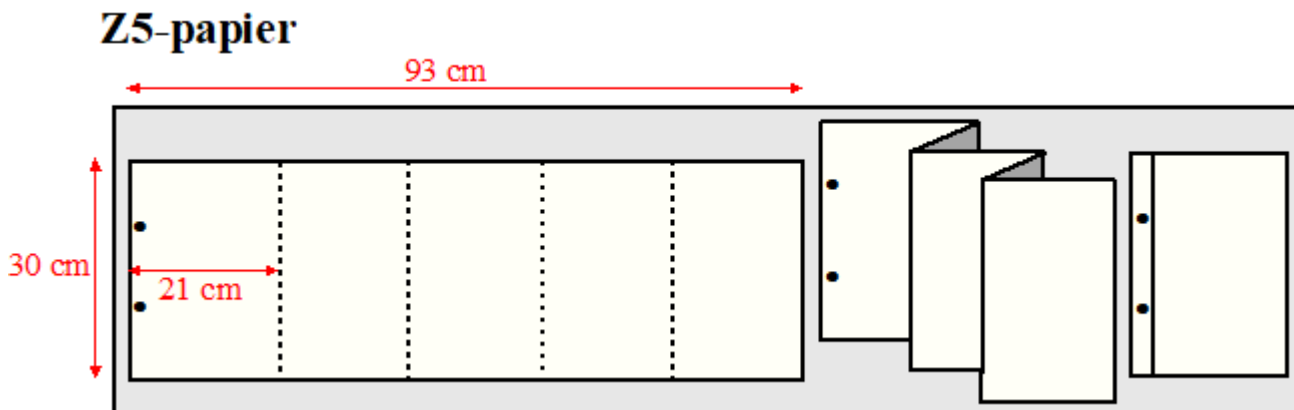
Ook hier is V het vermogen in Watt en s de snelheid in km per uur.

- Leg uit dat uit de grafiek volgt dat $p = 0,13$.
- Herschrijf de formule in de vorm $V = as^2 + bs + c$.

T2 Opgave 40

Technisch tekenaars gebruiken papier uit de Z-serie. De hoogte van een vel uit de Z-serie is altijd gelijk aan 30 cm. Een vel Z1-papier, met formaatnummer 1, is gelijk aan een A4'tje.

Bij elk volgend formaat in de Z-serie wordt de breedte telkens met een vast aantal cm vermeerderd. Dit vaste aantal cm is kleiner dan 21 cm en is zo gekozen dat een vel papier uit de Z-serie zigzag gevouwen in een ordner voor A4-papier past. In de figuur is een voorbeeld gegeven van technisch tekenpapier in Z5-formaat. Het vel Z5-papier, met formaatnummer $n = 5$, heeft een breedte van 93 cm.



Je kunt een formule opstellen voor de oppervlakte van een vel papier uit de Z-serie met formaatnummer n .

Deze formule is te schrijven in de vorm $O = a \cdot n + b$.

Hierin is O de oppervlakte in cm^2 en zijn a en b getallen.

Maak deze formule.

T1 Opgave 41

Maak de omkeerformules bij (dus druk "x" uit in "y"):

a $-4x + 3y = 16$

b $y = x^2 - 6$

T2 Opgave 42

In de natuurkunde kan de afkoeling van warme vloeistoffen beschreven worden met formules van de vorm: $T = k + b \cdot g^t$, waarbij T de temperatuur in graden Celsius en t de tijd in minuten.

Voor koffie geldt in een bepaalde kamer: $T_k = 20 + 50 \cdot 0,90^t$

Voor thee geldt in dezelfde situatie $T_t = 20 + 50 \cdot 0,75^t$

a Bereken de temperatuur van de koffie en die van thee op $t = 0$, en bereken de kamertemperatuur.

b Geef aan hoe de thee temperatuurverloop verschilt van die van de koffie in deze situatie.

T2 Opgave 43

Verslaggevers van schaatswedstrijden voorspellen vaak aan de hand van een tussentijd de eindtijd.

We bekijken in deze opgave de 10 000 meter hardrijden op de schaats. De schaatsers rijden dan 25 rondjes van 400 meter. Aan de hand van de tussentijd op 8000 meter (T) wordt de waarschijnlijke eindtijd (E) berekend. Dit kan als volgt gebeuren: bereken de gemiddelde rondetijd over de eerste 20 rondes ($G = \frac{T}{20}$) en bereken vervolgens de geschatte eindtijd met de formule $E = 25 \cdot G - 3$.

a Welke verklaring zou er kunnen zijn voor de "-3" in de laatste formule.

b Stel een formule op, waarmee de eindtijd E direct kan worden berekend uit de tussentijd T .

Een alternatieve formule om de eindtijd E te berekenen is: $E = T + 5 \cdot (G - 0,5)$.

- c Leg uit wat de gedachte is achter deze alternatieve formule.

T2 Opgave 44

Het verplaatsen kost energie. Voor landdieren is het volgende verband tussen de transportenergie E en het lichaamsgewicht M : $E = 3M^{0,34}$

Waarbij M het lichaamsgewicht in kg en E de transportenergie in wattuur die nodig is voor de verplaatsing van 1 kg lichaamsgewicht.

- a Onderzoek wie er volgens de formule meer energie kwijt is: een zwaar dier of een licht dier.
- b Als een dier 2 keer zo zwaar is dan Vul aan met een opmerking over de transportenergie. Bewijs je uitspraak.

Je zou de formule van E om kunnen schrijven in de vorm $E = (... M)^{0,34}$

- c Wat moet er op de puntjes dan staan?

We kunnen ook een formule maken voor de totale transportenergie T bij de verplaatsing voor een landdier van M kg.

- d Maak zo'n formule.

T2 Opgave 45

Het gewicht van een paard kunnen we schatten aan de hand van de lengte en de borstomvang:

$$G = \frac{B^2 \cdot L}{11900}, \text{ waarbij } B \text{ de borstomvang in cm, } L \text{ de lengte in cm en } G \text{ het gewicht in kg.}$$

Deze formule kan omgeschreven worden naar andere formules. Geef bij elk van onderstaande formules aan of dit mogelijk is.

1. $L = 11900 \cdot \frac{G}{B^2}$

3. $B = \sqrt{11900GL}$

2. $G \cdot 11900 = LB^2$

4. $\sqrt{\frac{GL}{11900}} = B$

T2 Opgave 46

Bij een experiment worden waarden van de variabelen p en q gemeten. Dit levert twee meetwaarden op:

p		1		5
q		10		25

Het verband kan nu door verschillende formules beschreven worden. Geef steeds een passende formule

- a. $q = \dots \cdot p + \dots$ ofwel $q = a \cdot p + b$
- b. $q = \dots \cdot \dots^p$ ofwel $q = a \cdot b^p$
- c. $q = \dots \cdot p^{\dots}$ ofwel $q = a \cdot p^b$

T2 Opgave 47

Als je veel drink op een avond dan mag je geen auto besturen. De wettelijke grens ligt bij 0,5 promille. In de praktijk gebruiken veel mensen de vuistregel: 'je mag twee glazen alcohol drinken'. Een nauwkeuriger methode is de volgende:

Vermenigvuldig het aantal glazen alcohol A dat je gedronken hebt met 100 (geeft eerste getal); neem je lichaamsgewicht G (in kg) en vermenigvuldig dit met 6 als je een vrouw bent en met 7 als je een man bent (Omdat het lichaam alcohol geeft tweede getal); het promillage is dan het eerste getal gedeeld door het tweede; als je gegeten hebt kan het promillage met 0,8 vermenigvuldigd worden. In het lichaam wordt alcohol afgebroken waardoor het promillage met 0,15 per uur afneemt. De tijd in uren na de laatste alcohol consumptie noemen we t .

Maak een formule voor het promillage voor een man, uitgedrukt in A , G en t .

T2 | Opgave 48

Om de oppervlakte van een kubus te berekenen kun je de volgende formule gebruiken: $A = 6z^2$ waarbij z de zijde in meters en A de oppervlakte in m^2 .

Vanaf 1820 werd in Nederland wettelijk vastgesteld dat er met een lengtemaat gewerkt moest gaan worden: de meter. Tot dan toe werden per regio verschillende maatsystemen gebruikt. Een bekende was bijvoorbeeld de Amsterdamse el: 1 meter was gelijk aan 1,454 Amsterdamse el.

Maak een formule waarmee je de oppervlakte in m^2 kunt bereken als de lengte van de zijde x in Amsterdamse el gegeven wordt.

§8 Formatieve opdrachten

Opgave F1 – Formatieve toets

Van score naar cijfer, (ontleend aan 2014-I)

Bij veel examens wordt dezelfde formule gebruikt om bij een bepaald aantal behaalde scorepunten het cijfer te berekenen. In deze opgave bekijken we examens waarbij maximaal 80 scorepunten behaald kunnen worden. De formule luidt dan:

$$C = 9 \cdot \frac{S}{80} + N$$

In deze formule is C het cijfer, S het aantal behaalde scorepunten, en N de normeringsterm.

Er geldt:

- S is een geheel getal;
- N is een getal met één decimaal, minimaal 0,0 en maximaal 2,0.
- C wordt afgerond op één decimaal.

Bij normeringsterm $N = 1,0$ wordt aan de volgende voorwaarden voldaan:

- een leerling die geen enkel scorepunt heeft behaald, krijgt het cijfer 1;
- een leerling die alle scorepunten heeft behaald, krijgt het cijfer 10;
- een leerling die precies de helft van het aantal scorepunten heeft behaald, krijgt het cijfer 5,5.

3p 1 Laat met de formule zien dat bij $N = 1,0$ aan alle drie de voorwaarden voldaan is.

Afhankelijk van de moeilijkheidsgraad van een examen wordt de normeringsterm N vastgesteld. Normaal gesproken geldt $N = 1,0$, maar als een examen erg moeilijk was, wordt bijvoorbeeld gekozen voor $N = 1,6$. Een te gemakkelijk examen kan worden 'afgewaardeerd', dat wil zeggen: naar beneden worden bijgesteld. In dat geval is N kleiner dan 1,0. Als een examen wordt op- of afgewaardeerd, is er wel een probleem: het cijfer zou hoger dan 10 of lager dan 1 kunnen worden en dat mag niet.

Dit probleem wordt als volgt opgelost. Eerst worden de grafieken getekend van de hoofdformule bij $N = 0,0$ en $N = 2,0$. Daarna worden de grafieken getekend behorend bij de onderstaande vier formules (zie figuur op volgende bladzijde):

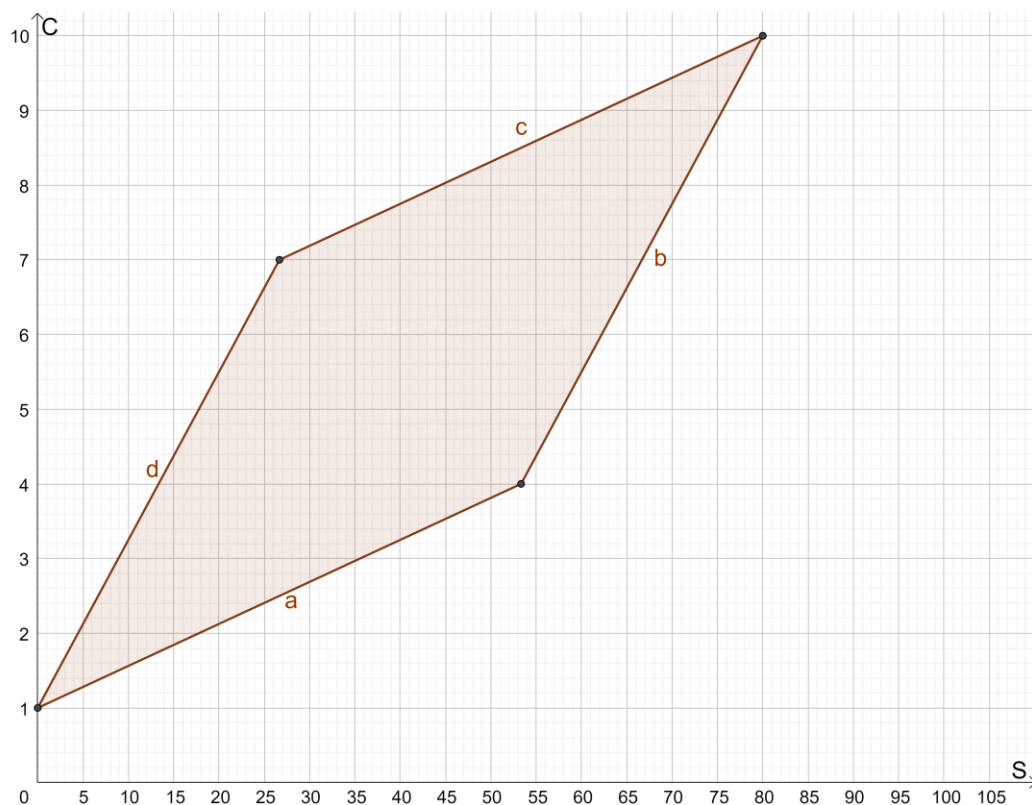
$$(1) C = 1 + 9 \cdot \frac{S}{80} \cdot 0,5$$

$$(2) C = 1 + 9 \cdot \frac{S}{80} \cdot 2$$

$$(3) C = 10 - (80 - S) \cdot \frac{9}{80} \cdot 0,5$$

$$(4) C = 10 - (80 - S) \cdot \frac{9}{80} \cdot 2$$

Hoewel de grafieken van al deze formules in feite uit losse punten bestaan, gaan we er in deze opgave van uit dat ze rechte lijnen zijn.



In de figuur zie je een gebied dat wordt begrensd door vier lijnen genaamd a, b, c en d. Deze vier lijnen horen bij de formules 1 tot en met 4.

4p 2 Welke lijn hoort bij welke formule? Licht je antwoord toe.

Formule (4) is te herleiden tot de vorm $C = a \cdot S + b$

4p 3 Geef deze herleiding en bepaal hiermee de waarden van a en b .

4p 4 Teken de lijnen $C = N + 9 \cdot \frac{S}{80}$ met $N = 0$ en $N = 2$ in de figuur. Onderzoek bij welke hoge scores de gewone formules $C = N + 9 \cdot \frac{S}{80}$ met $N = 0$ en $N = 2$ niet meer gebruikt kunnen worden.

Schommelen, (ontleend aan 2015-II)

In bijna elke speeltuin staat wel een schommel. De tijd waarin je één keer met de schommel heen en weer zwaait, is afhankelijk van de lengte van het schommeltouw. Voor de tijd T waarin je één keer heen en weer zwaait, geldt de formule:

$$T = 6,28 \cdot \sqrt{\frac{L}{9,81}}$$

In deze formule is T de tijd in seconden en L de lengte van het schommeltouw in meters.

4p 5 Herleid de formule voor T tot de formule $L = p \cdot T^2$.

Honkbal, (ontleend aan 2014-I)

In Amerika is honkbal een populaire sport. De resultaten van Amerikaanse topteams worden zorgvuldig bijgehouden. Na elke wedstrijd wordt genoteerd hoeveel punten een team gescoord heeft (scorepunten) en hoeveel tegenpunten het team heeft moeten incasseren. Ook wordt genoteerd of het team gewonnen of verloren heeft. Gelijkspel is onmogelijk. Aan het einde van het seizoen wordt van ieder team het aantal gewonnen wedstrijden en het totaal aantal scorepunten en tegenpunten gepubliceerd. Er lijkt een verband te zijn tussen het percentage gewonnen wedstrijden en het totaal aantal scorepunten en tegenpunten van een team. Over een heel seizoen geldt voor een team bij benadering de volgende formule:

$$P = \frac{100 \cdot S^2}{S^2 + T^2} \quad (1)$$

Hierin is P het percentage gewonnen wedstrijden in het seizoen, S het totaal aantal scorepunten en T het totaal aantal tegenpunten in het seizoen.

Bewering 1: Als een team veel punten scoort en nauwelijks tegenpunten incasseert dan zal het team wel veel wedstrijden winnen.

Bewering 2: Als een team weinig punten scoort en veel tegenpunten incasseert dan zal het team wel veel wedstrijden verliezen.

2p 6 Geef getallenvoorbeelden voor S en T in deze context die de beweringen 1 en 2 ondersteunen. Licht je antwoord toe.

Voor teams die in een seizoen twee keer zoveel tegenpunten als scorepunten krijgen, geldt $T = 2 \cdot S$.

Als je dit invult in de formule van P , ontstaat een nieuwe formule van P . Door die formule te herleiden, kun je laten zien dat er in deze situatie voor P altijd hetzelfde getal uitkomt.

4p 7 Geef deze herleiding.

3p 8 Maak een formule die T uitdrukt in P en S .

4p 9 Hoe groot wordt P als S 0 is? En als S heel groot wordt? Wat betekent dit in deze context?

De formule van P wordt ook wel anders geschreven, namelijk als:

$$P = 100 - \frac{100}{V^2 + 1} \quad (2)$$

Hierin is V het aantal scorepunten per tegenpunt, dus $V = \frac{S}{T}$.

3p 10 Herleid deze formule (2) naar de vorm $P = \frac{100V^2}{V^2 + 1} \quad (3)$

4p 11 Beredeneer hoe groot P wordt als V heel groot wordt en leg uit wat dit in deze context betekent.

4p 12 Laat zien hoe formule (1) uit die van (3) volgt (vul daarvoor $V = \frac{S}{T}$. In de formule (3) in)

Opgave F2 (met dank aan Truus Dekker en Martin Kindt)

Uitspraken over breuken

26. Schrijf bij elke uitspraak of deze WAAR of ONWAAR is.

Bedenk zelf nog twee ware en twee onware uitspraken

$2 + 3 = 5$
 $5 + 7 = 12$ dus $\frac{2}{5} + \frac{3}{7} = \frac{5}{12}$

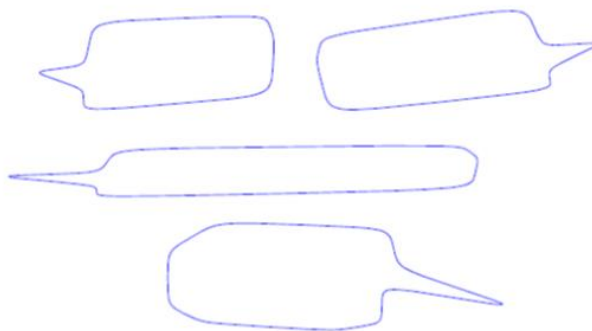
$1 - \frac{28}{57} = \frac{29}{57}$

$1\frac{1}{4} + \frac{1}{3} = \frac{3}{4} + \frac{5}{6}$

de uitkomst van $\frac{1}{7} + \frac{2}{7} + \frac{3}{7} + \frac{4}{7} + \frac{5}{7} + \frac{6}{7}$ is een heel getal

de uitkomst van $\frac{1}{8} + \frac{2}{8} + \frac{3}{8} + \frac{4}{8} + \frac{5}{8} + \frac{6}{8} + \frac{7}{8}$ is een heel getal

~~$\frac{5}{6} + \frac{1}{7}$ is kleiner dan 1~~



Uitspraken over breuken

35. Schrijf bij elke uitspraak of deze WAAR of ONWAAR is.

Bedenk zelf ook 2 ware en 2 onware uitspreken over het vermenigvuldigen of delen van breuken.

Delen door $\frac{1}{4}$ komt op hetzelfde neer als vermenigvuldigen met 4.

$4\frac{1}{4} : 2\frac{1}{2} = 2$

Als je een getal deelt door $\frac{3}{5}$ kun je eerst delen door 3 en daarna met 5 vermenigvuldigen

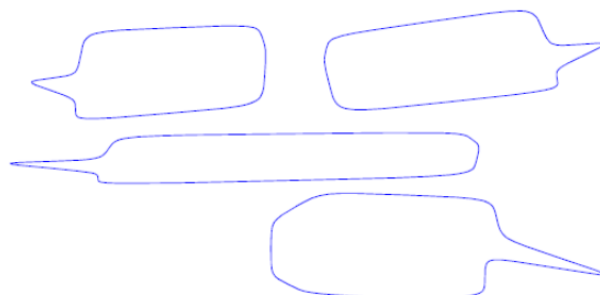
$\frac{3}{7}$ gaat even vaak in 6 als 3 in 42

$80 : 3\frac{1}{3}$ is gelijk aan 8×3

Een vijfde van een zesde is een elfde

Twee breuken kun je vermenigvuldigen door ze gelijknamig te maken en dan de tellers te vermenigvuldigen.

$\frac{8}{9} : \frac{7}{8}$ is groter dan 1



Opgave F3

- a. Stel dat gegeven is dat $A \cdot B = 320$ en $3A \cdot p \cdot B = 160$

Bereken p.

- b. Gegeven $G = 2P^{-0,5}$; schrijf deze formule om in de vorm $P = aG^b$
 c. Gegeven $y = 80 \cdot 0,90^t$; schrijf deze formule in de vorm $y = 10^{a \cdot t + b}$
 d. Gegeven $y = 10^{0,6 \cdot t + 2,3}$; schrijf deze formule in de vorm $y = b \cdot g^t$

- e. Gegeven $B = 5\sqrt{A}$, met A en B beide positief

Welke van de volgende formules zijn gelijkwaardig?

$$A^2 = 25AB$$

$$\frac{A}{B} = 5A^{0,5}$$

$$5B = \sqrt{A}$$

$$25B^2 = A$$

- f. Gegeven $L = \frac{1}{16}m^2$, met L en m positief

Welke van de volgende formules zijn gelijkwaardig?

$$Lm^2 = 16$$

$$\frac{L}{m^2} = 16$$

$$m = 4\sqrt{L}$$

$$\sqrt{L} = \frac{1}{4}m$$

$$\frac{m^2}{L} = 16$$

$$\frac{L}{\sqrt{L}} = 4$$

- g. Gegeven $A = \frac{3S^{\frac{2}{3}}}{h^{\frac{1}{3}}}$ met h, S, A positief

Welke van de volgende formules zijn gelijkwaardig?

$$A = 3S^{\frac{2}{3}}h^{-\frac{1}{3}}$$

$$A = 3(S^2h^{-1})^{\frac{1}{3}}$$

$$A = 3\sqrt[3]{S^2h^{-1}}$$

Overzicht Rekenregels

Haakjes uitwerken

Regel	Voorbeeld
$a(b + c) = ab + ac$	$2(3x + 6) = 6x + 12$ $4 - (x + 2) = 4 - x - 2$
$(a + b)(c + d) = ac + ad + bc + bd$	$(x + 3)(2x - 1) = 2x^2 - x + 6x - 3$ $= 2x^2 + 5x - 3$ $(x - 4)^2 = (x - 4)(x - 4) = x^2 - 4x - 4x + 16$ $= x^2 - 8x + 16$

Breuken

Regel	Voorbeeld
$A \cdot \frac{B}{C} = \frac{AB}{C}$	$3x \cdot \frac{x}{2} = \frac{3x \cdot x}{2} = \frac{3}{2}x^2$
$\frac{A}{B} \cdot \frac{C}{D} = \frac{AC}{BD}$	$\frac{5x}{2} \cdot \frac{4x^3}{2x} = \frac{20x^4}{4x}$
$\frac{A}{B} + \frac{C}{D} = \frac{AD + BC}{BD}$	$\frac{5}{x} + \frac{x}{2} = \frac{10 + x^2}{2x}$

Wortels

Regel	Voorbeeld
$\sqrt[a]{a} = a^{\frac{1}{a}}, \quad \sqrt[p]{a} = a^{\frac{1}{p}}$	$\sqrt[4]{x} = x^{\frac{1}{4}}$
$\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} = \sqrt{a \cdot b}$	$\sqrt{x} \cdot \sqrt{3} = \sqrt{3x}$
$\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a}{b}}$	$\frac{\sqrt{3x}}{\sqrt{4x+1}} = \sqrt{\frac{3x}{4x+1}}$
$\sqrt[q]{a^p} = (\sqrt[q]{a})^p = a^{\frac{p}{q}}$	$(\sqrt{x^3})^5 = x^{\frac{3}{5}}$

Machten

Regel	Voorbeeld
$a^n \cdot a^p = a^{n+p}$	$x^7 \cdot x^3 = x^{10}$
$\frac{a^n}{a^p} = a^{n-p}$	$\frac{t^4}{t^3} = t$
$(a^n)^p = a^{n \cdot p}$	$(x^2)^5 = x^{10}$
$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$	$\frac{2x}{x^3} = 2x \cdot x^{-3} = 2x^{-2}$
$(a \cdot b)^p = a^p \cdot b^p$	$(4,5x)^2 = 4,5^2 \cdot x^2 = 20,25x^2$
$\left(\frac{a}{b}\right)^p = \frac{a^p}{b^p}$	$\left(\frac{x}{5}\right)^4 = \frac{x^4}{5^4} = \frac{x^4}{625} = \frac{1}{625} \cdot x^4$