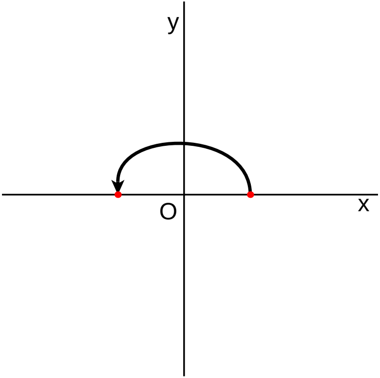
Complexe getallen

Meetkunde

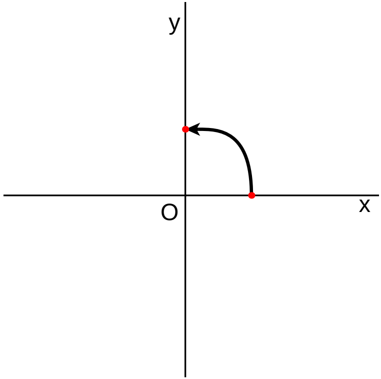
Jan Keemink

intro



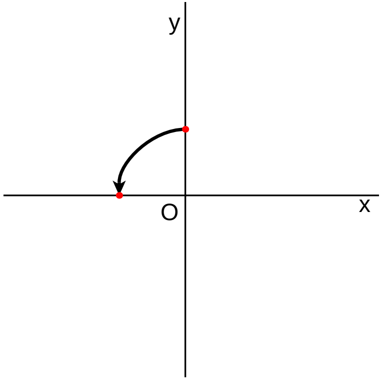
Vermenigvuldigen met -1

intro



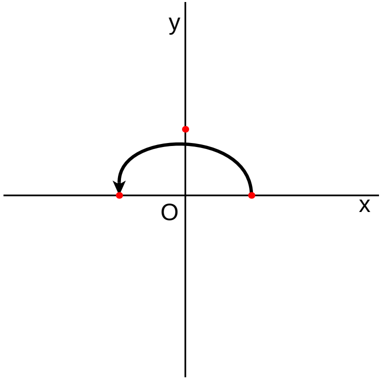
Vermenigvuldigen met i

intro



Nogmaals vermenigvuldigen met i

intro



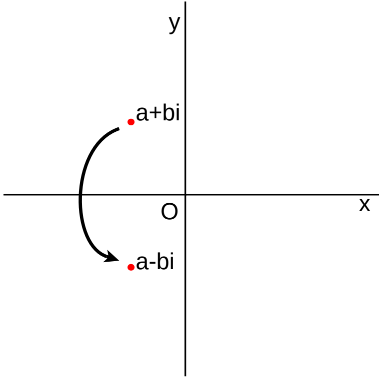
Vermenigvuldigen met -1 is 't zelfde als met i^2.

intro

Getallen gedragen zich als vectoren
Vermenigvuldigen is extra

Bekend verondersteld

intro



Complex conjugeren: $z \longmapsto \overline{z}$

intro

- rekenvoorbeelden in negenpuntscirkel

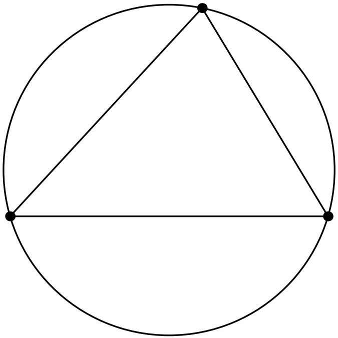
intro

- rekenvoorbeelden in negenpuntscirkel
- vergelijking van een rechte lijn

intro

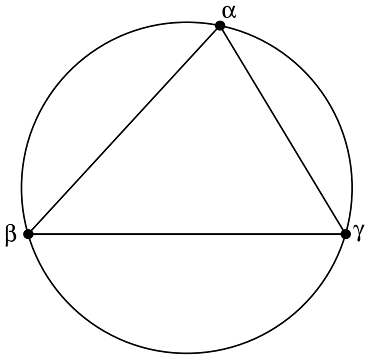
- rekenvoorbeelden in negenpuntscirkel
- vergelijking van een rechte lijn
- lijn van Wallace

Negenpuntscirkel



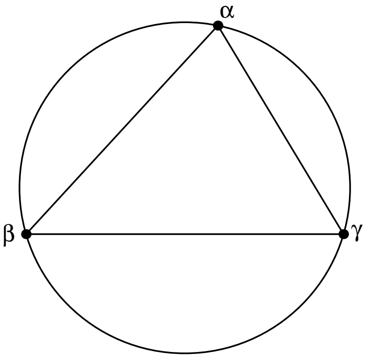
Drie punten op de eenheidscirkel:
α, β en γ.

Negenpuntscirkel



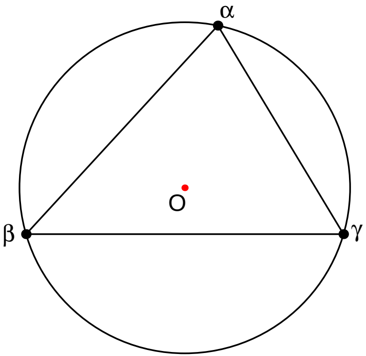
Drie punten op de eenheidscirkel: α, β en γ.

Negenpuntscirkel



Waar ligt het punt
$\sigma = \alpha + \beta + \gamma$?

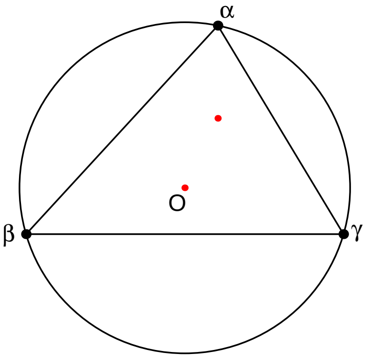
Negenpuntscirkel



Waar ligt het punt
$\sigma = \alpha + \beta + \gamma$?

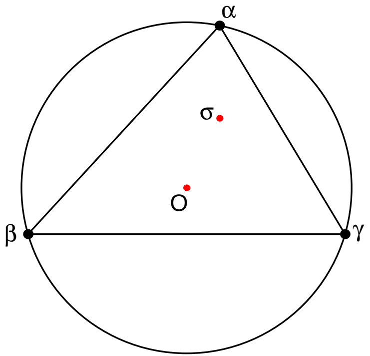
Hier ligt de oorsprong.

Negenpuntscirkel



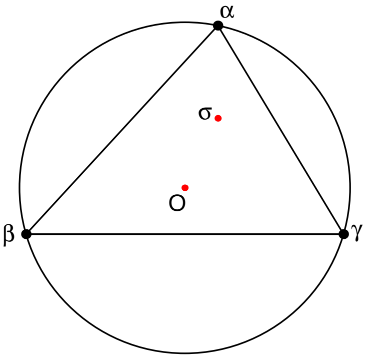
Enig nadenken leidt tot deze positie ongeveer.

Negenpuntscirkel



Enig nadenken leidt tot deze positie ongeveer.

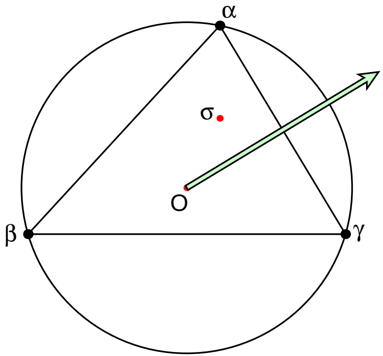
Negenpuntscirkel



Er geldt:

$\sigma - \beta = \alpha + \gamma.$

Negenpuntscirkel

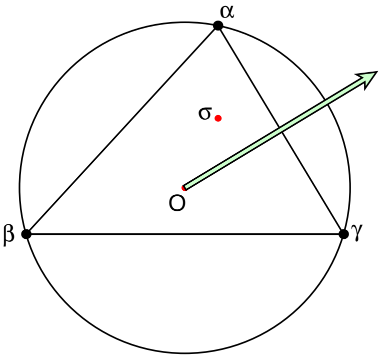


Er geldt:

$\sigma - \beta = \alpha + \gamma$.

$\alpha + \gamma$ kunnen we ons voorstellen middels deze vector.

Negenpuntscirkel

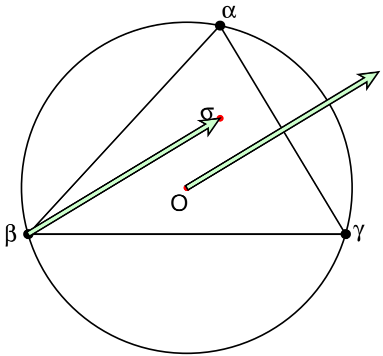


Er geldt:

$\sigma - \beta = \alpha + \gamma$.

$\alpha + \gamma$ kunnen we ons voorstellen middels deze vector.
En deze staat loodrecht op het lijnstuk AC.

Negenpuntscirkel

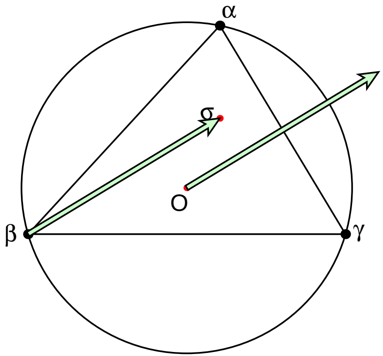


Er geldt:

$\sigma - \beta = \alpha + \gamma$.

$\alpha + \gamma$ kunnen we ons voorstellen middels deze vector.
En deze staat loodrecht op het lijnstuk AC.

Negenpuntscirkel

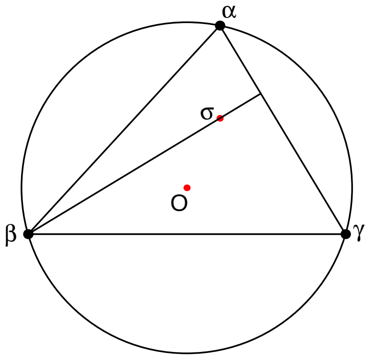


Er geldt:

$\sigma - \beta = \alpha + \gamma$.

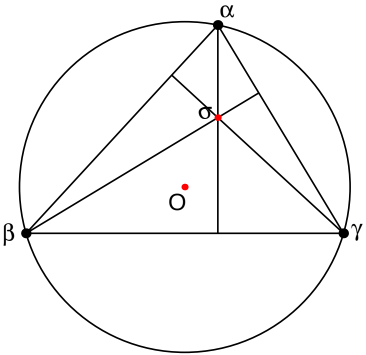
$\alpha + \gamma$ kunnen we ons voorstellen middels deze vector.
En deze staat loodrecht op het lijnstuk AC.(Waarom?)

Negenpuntscirkel



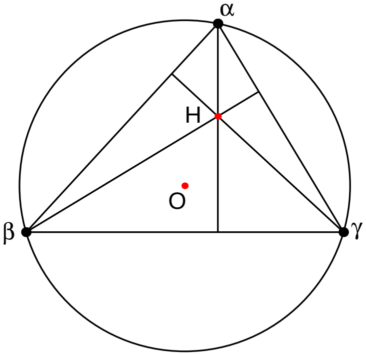
Conclusie:
De lijn *BS* staat loodrecht op *AC* en is dus een hoogtelijn.

Negenpuntscirkel



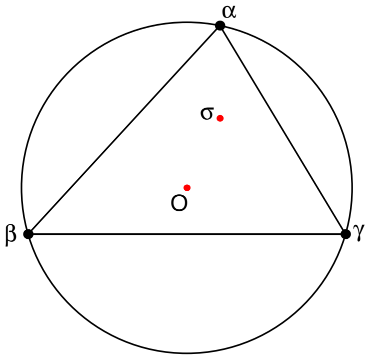
Op dezelfde manier kunnen we laten zien dat ook AS en CS hoogtelijnen zijn.

Negenpuntscirkel



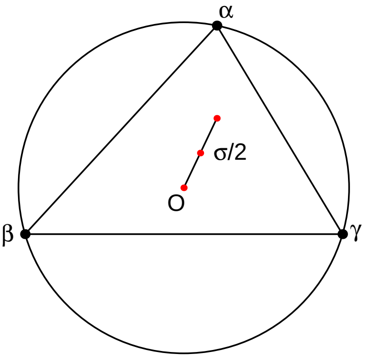
Kennelijk is $\sigma = \alpha + \beta + \gamma$ het hoogtepunt H van de driehoek ABC.

Negenpuntscirkel



Maar, er is meer...

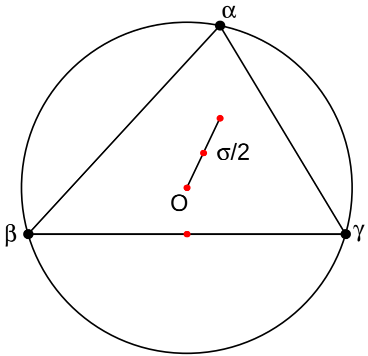
Negenpuntscirkel



Kijk naar het midden van OS, i.e. $\frac{\sigma}{2}$,

en naar het midden van een zijde, bijvoorbeeld het midden van BC: $\frac{\beta+\gamma}{2}$.

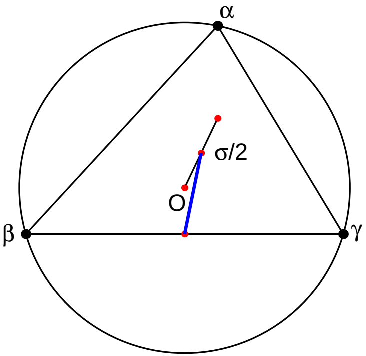
Negenpuntscirkel



Kijk naar het midden van OS, i.e. $\frac{\sigma}{2}$,

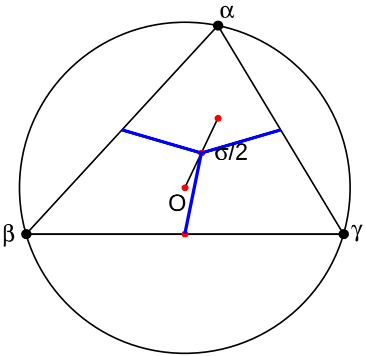
en naar het midden van een zijde, bijvoorbeeld het midden van BC: $\frac{\beta+\gamma}{2}$.

Negenpuntscirkel



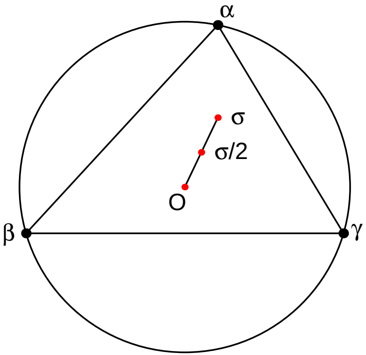
De afstand tussen deze twee punten is
$\left|\frac{\sigma}{2} - \frac{\beta+\gamma}{2}\right| = \left|\frac{\alpha}{2}\right| = \frac{1}{2}.$

Negenpuntscirkel



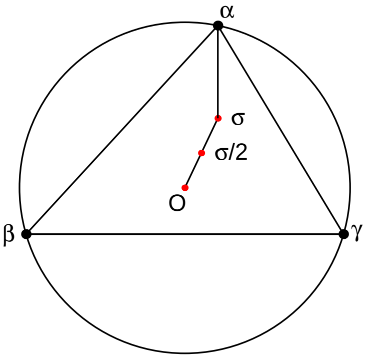
De afstand naar de andere middens is ook $\frac{1}{2}$.

Negenpuntscirkel



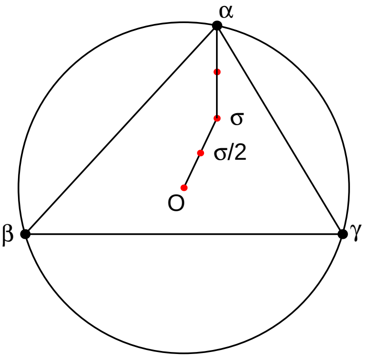
Laten we nu eens kijken naar het midden van het lijnstuk van α naar σ.

Negenpuntscirkel



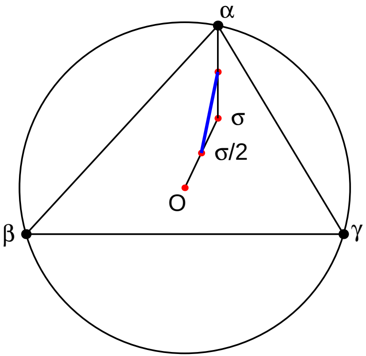
Laten we nu eens kijken naar het midden van het lijnstuk van α naar σ.

Negenpuntscirkel



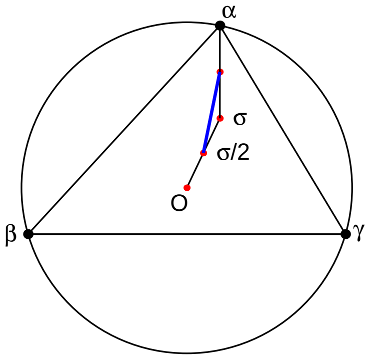
Laten we nu eens kijken naar het midden van het lijnstuk van α naar σ.

Negenpuntscirkel



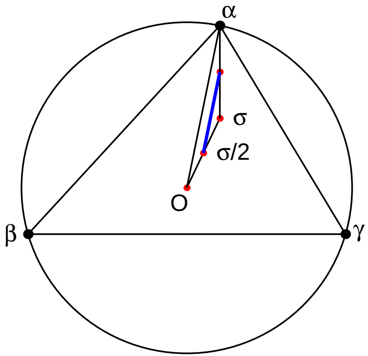
Laten we nu eens kijken naar het midden van het lijnstuk van α naar σ.
De afstand hiervan naar $\frac{\sigma}{2}$ is ook $\frac{1}{2}$.

Negenpuntscirkel



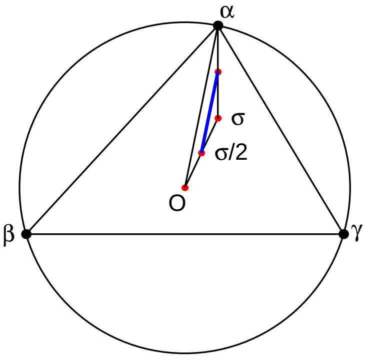
Laten we nu eens kijken naar het midden van het lijnstuk van α naar σ.
De afstand hiervan naar $\frac{\sigma}{2}$ is ook $\frac{1}{2}$.
Meetkundig is het snel in te zien via het concept *middenparallel*.

Negenpuntscirkel



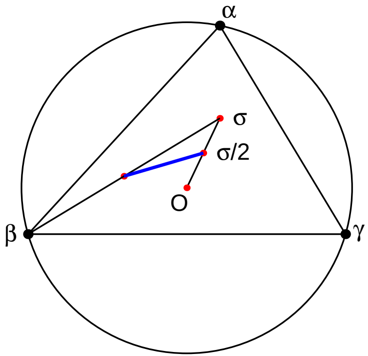
Laten we nu eens kijken naar het midden van het lijnstuk van α naar σ.
De afstand hiervan naar $\frac{\sigma}{2}$ is ook $\frac{1}{2}$.
Meetkundig is het snel in te zien via het concept *middenparallel*.

Negenpuntscirkel



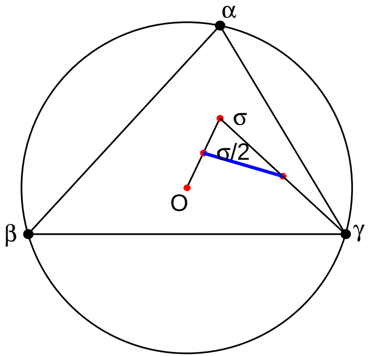
Algebraïsch is 't ook niet moeilijk:
$\left|\frac{\sigma}{2} - \frac{\sigma-\alpha}{2}\right| = \left|\frac{\alpha}{2}\right| = \frac{1}{2}$

Negenpuntscirkel



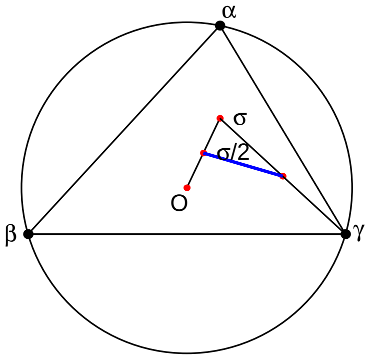
En natuurlijk geldt dit ook voor de lijn uit β en

Negenpuntscirkel



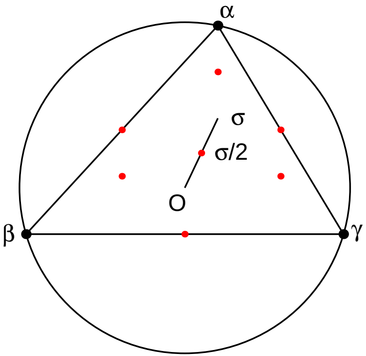
En natuurlijk geldt dit ook voor de lijn uit β en uit γ.

Negenpuntscirkel



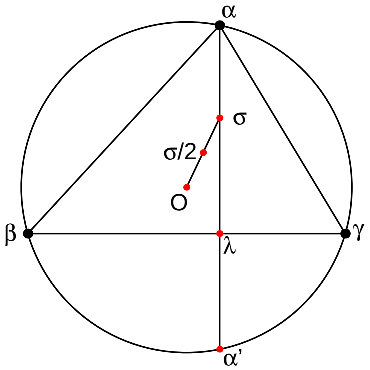
We hebben nu zes punten die allemaal op afstand $\frac{1}{2}$ liggen van $\frac{\sigma}{2}$.

Negenpuntscirkel



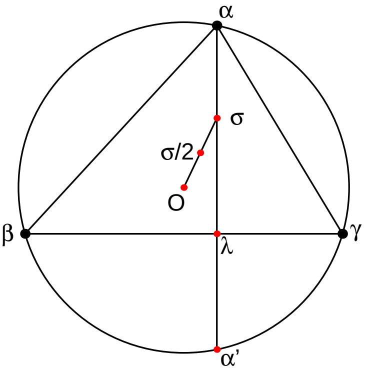
Maar er is meer...

Negenpuntscirkel



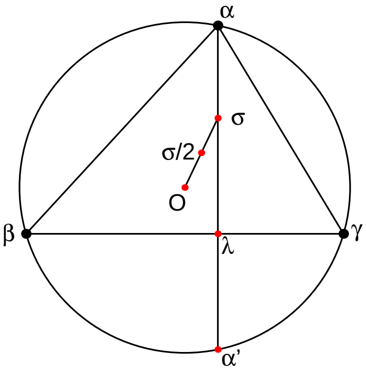
We projecteren α op de lijn door B en C.

Negenpuntscirkel



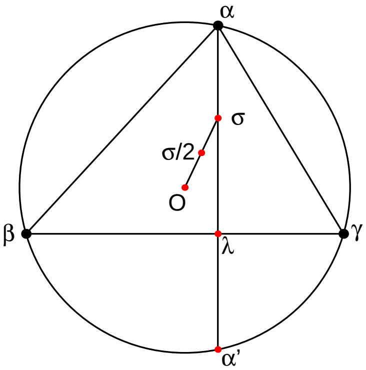
We projecteren α op de lijn door B en C.
Om de projectie te berekenen, is het handig om eerst α' te vinden.

Negenpuntscirkel



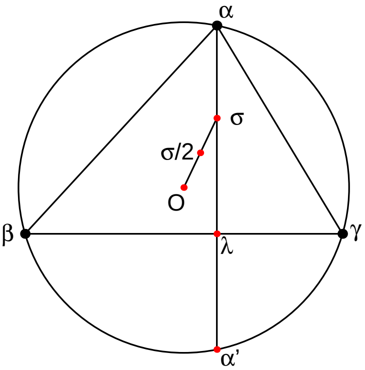
Dat gaat als volgt.

Negenpuntscirkel



$AA' \perp BC$ en $|\alpha'| = 1$ en $\alpha' \neq \alpha$.

Negenpuntscirkel

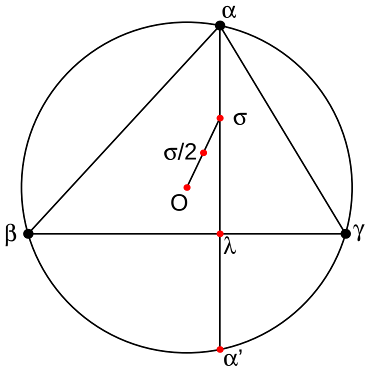


$AA' \perp BC$ impliceert dat

$$\frac{\alpha - \alpha'}{\beta - \gamma}$$

zuiver imaginair is.

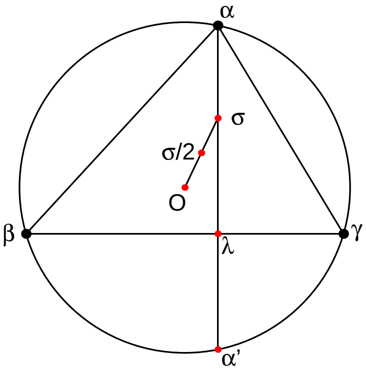
Negenpuntscirkel



Dus dat

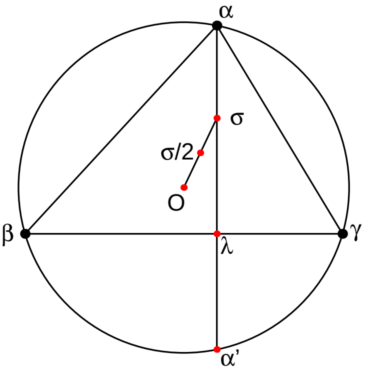
$$\frac{\alpha - \alpha'}{\beta - \gamma} + \frac{\overline{\alpha} - \overline{\alpha'}}{\overline{\beta} - \overline{\gamma}} = 0$$

Negenpuntscirkel



Bedenk dat $\overline{\alpha} = \frac{1}{\alpha}$, $\overline{\beta} = \frac{1}{\beta}$ etc.

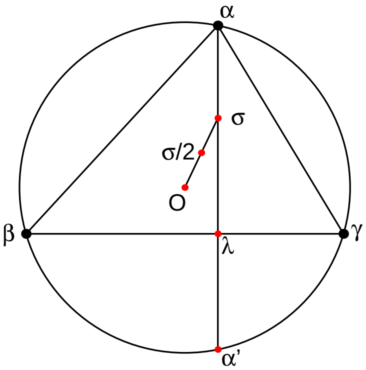
Negenpuntscirkel



Daarmee

$$\frac{\overline{\alpha}-\overline{\alpha'}}{\overline{\beta}-\overline{\gamma}}=\frac{\frac{1}{\alpha}-\frac{1}{\alpha'}}{\frac{1}{\beta}-\frac{1}{\gamma}}=\frac{\frac{\alpha'-\alpha}{\alpha\alpha'}}{\frac{\gamma-\beta}{\beta\gamma}}$$

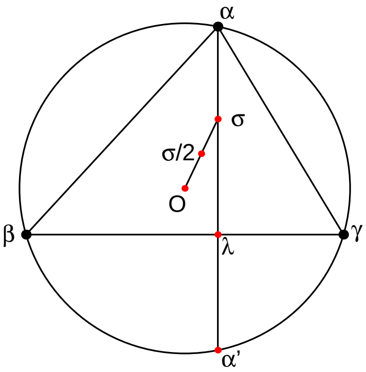
Negenpuntscirkel



En dit is

$$\frac{\beta\gamma}{\alpha\alpha'}\,\frac{\alpha-\alpha'}{\beta-\gamma}$$

Negenpuntscirkel



Weer vanaf het begin:

$$\frac{\alpha - \alpha'}{\beta - \gamma} + \frac{\overline{\alpha} - \overline{\alpha'}}{\overline{\beta} - \overline{\gamma}} = 0$$

$$\frac{\alpha - \alpha'}{\beta - \gamma} + \frac{\beta\gamma}{\alpha\alpha'}\frac{\alpha - \alpha'}{\beta - \gamma} = 0$$

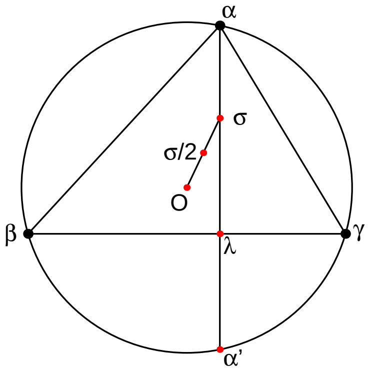
$$\frac{\alpha - \alpha'}{\beta - \gamma}\left(1 + \frac{\beta\gamma}{\alpha\alpha'}\right) = 0$$

$$\frac{\beta\gamma}{\alpha\alpha'} = -1$$

zodat

$$\alpha' = -\frac{\beta\gamma}{\alpha}$$

Negenpuntscirkel

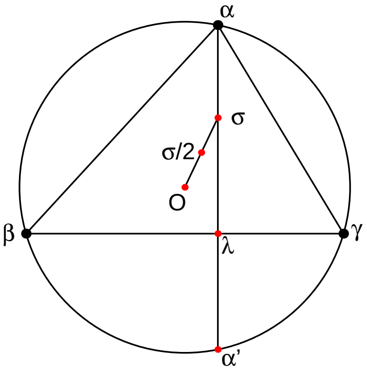


Dat vind ik al heel bijzonder, dat

$$\alpha' = -\frac{\beta\gamma}{\alpha}$$

maar er is meer...

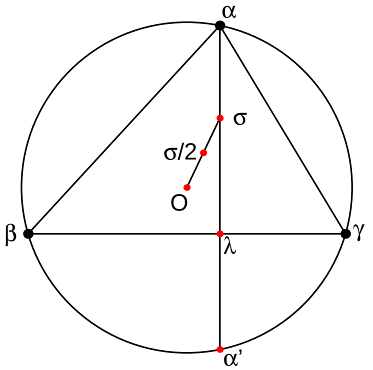
Negenpuntscirkel



$|\sigma - \beta| = |\alpha + \gamma|$ zoals we al eerder zagen,
maar ook
$|\beta - \alpha'| = \left|\beta + \frac{\beta\gamma}{\alpha}\right| = \left|\frac{\beta}{\alpha}\right| |\alpha + \gamma| = |\alpha + \gamma|$.

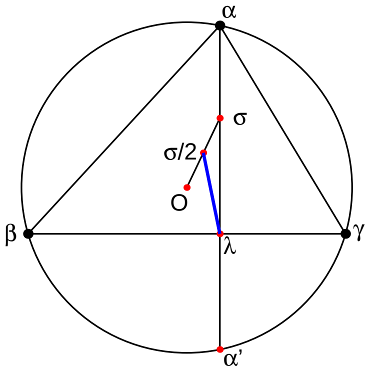
Dus driehoek $\sigma\beta\alpha'$ is gelijkbenig en is bijgevolg λ het midden van $\sigma\alpha'$.

Negenpuntscirkel



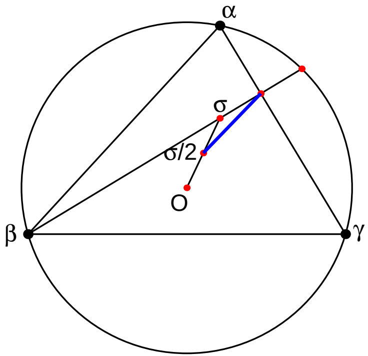
Oke.
λ is het midden van $\sigma\alpha'$ betekent
$\lambda = \frac{\sigma - \frac{\beta\gamma}{\alpha}}{2}$;
en de afstand van $\frac{\sigma}{2}$ naar λ is
$\left|\frac{\sigma}{2} - \lambda\right| = \left|\frac{\beta\gamma}{2\alpha}\right| = \frac{1}{2}$.

Negenpuntscirkel



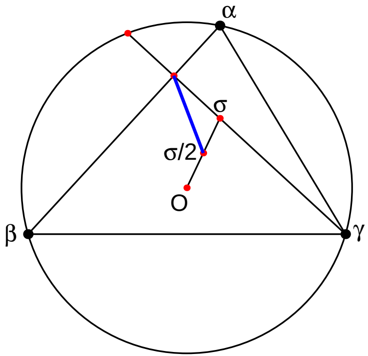
Oke.
λ is het midden van $\sigma\alpha'$ betekent
$\lambda = \frac{\sigma - \frac{\beta\gamma}{\alpha}}{2}$;
en de afstand van $\frac{\sigma}{2}$ naar λ is
$\left|\frac{\sigma}{2} - \lambda\right| = \left|\frac{\beta\gamma}{2\alpha}\right| = \frac{1}{2}$.

Negenpuntscirkel



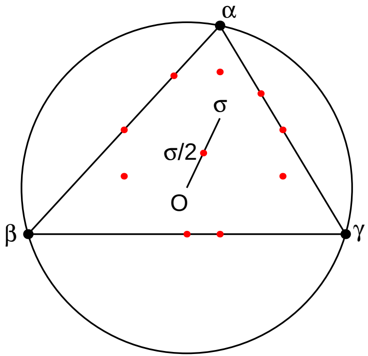
Vanuit β gaat het ook zo,

Negenpuntscirkel



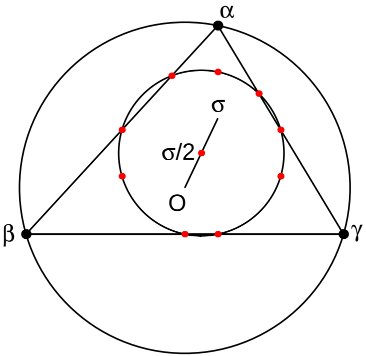
net als uit γ.

Negenpuntscirkel



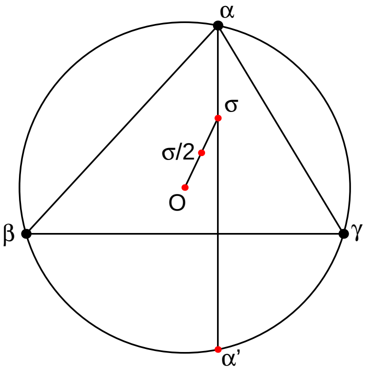
In totaal zijn er nu negen punten die op afstand $\frac{1}{2}$ liggen van $\frac{\sigma}{2}$. Vandaar de naam *negenpuntscirkel*.

Negenpuntscirkel



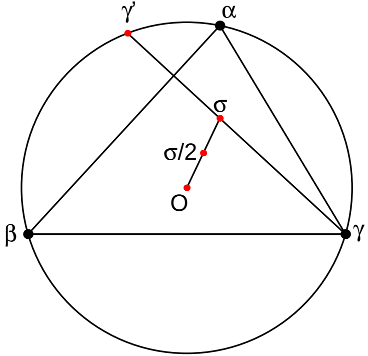
In totaal zijn er nu negen punten die op afstand $\frac{1}{2}$ liggen van $\frac{\sigma}{2}$. Vandaar de naam *negenpuntscirkel*.

Negenpuntscirkel



Punten die elegant te berekenen waren:
$\alpha' = -\dfrac{\beta\gamma}{\alpha}$
en natuurlijk
$\sigma = \alpha + \beta + \gamma$, het hoogtepunt.

Negenpuntscirkel



Uiteraard is op grond van symmetrie $\gamma' = -\dfrac{\alpha\beta}{\gamma}$.

Vergelijking rechte

De vergelijking van een lijn door de punten α en β is

$$z + \alpha\beta\bar{z} = \alpha + \beta$$

(α en β op de eenheidscirkel)
Bewijs:

Vergelijking rechte

De vergelijking van een lijn door de punten α en β is

$$z + \alpha\beta\bar{z} = \alpha + \beta$$

(α en β op de eenheidscirkel)
Bewijs:
$z = \alpha$: $\qquad \alpha + \alpha\beta\overline{\alpha} = \alpha + \beta$ klopt, want $\alpha\overline{\alpha} = 1$.

Vergelijking rechte

De vergelijking van een lijn door de punten α en β is

$$z + \alpha\beta\bar{z} = \alpha + \beta$$

(α en β op de eenheidscirkel)
Bewijs:

$z = \alpha$: $\quad \alpha + \alpha\beta\overline{\alpha} = \alpha + \beta$ klopt, want $\alpha\overline{\alpha} = 1$.

$z = \beta$: $\quad \beta + \alpha\beta\overline{\beta} = \beta + \alpha$ en dat klopt ook.

Vergelijking rechte

De vergelijking van een lijn door de punten α en β is

$$z + \alpha\beta\bar{z} = \alpha + \beta$$

(α en β op de eenheidscirkel)

Het zou aardig zijn om wat meer inzicht te hebben.

Vergelijking rechte

De vergelijking van een lijn door de punten α en β is

$$z + \alpha\beta\bar{z} = \alpha + \beta$$

(α en β op de eenheidscirkel)

Het zou aardig zijn om wat meer inzicht te hebben.

Bovendien: waarom is dit een rechte lijn?

Vergelijking rechte

Wanneer liggen drie punten α, β en γ op een rechte?

Vergelijking rechte

Dan moet het argument van $\beta - \alpha$
gelijk zijn aan het
argument van $\gamma - \alpha$.

Vergelijking rechte

Dan moet het argument van $\beta - \alpha$
gelijk zijn aan het
argument van $\gamma - \alpha$.
Ja, of α ligt tussen β en γ in; dan schelen de argumenten π.

Vergelijking rechte

Korter gezegd:

als $\dfrac{\beta - \alpha}{\gamma - \alpha} \in \mathbb{R}$.

Vergelijking rechte

Dus: α, β en γ op een rechte

$$\iff \frac{\beta - \alpha}{\gamma - \alpha} \in \mathbb{R}$$

Vergelijking rechte

Dus: α, β en γ op een rechte

$$\iff \frac{\beta - \alpha}{\gamma - \alpha} \in \mathbb{R}$$
$$\iff \frac{\beta - \alpha}{\gamma - \alpha} = \frac{\overline{\beta} - \overline{\alpha}}{\overline{\gamma} - \overline{\alpha}}$$

Vergelijking rechte

Dus: α, β en z op een rechte

$$\iff \frac{\beta - \alpha}{z - \alpha} \in \mathbb{R}$$
$$\iff \frac{\beta - \alpha}{z - \alpha} = \frac{\overline{\beta} - \overline{\alpha}}{\bar{z} - \overline{\alpha}}$$

Vergelijking rechte

Dus: α, β en z op een rechte

$$\iff \frac{\beta-\alpha}{z-\alpha} \in \mathbb{R}$$

$$\iff \frac{\beta-\alpha}{z-\alpha} = \frac{\overline{\beta}-\overline{\alpha}}{\bar{z}-\overline{\alpha}}$$

$$\iff \left(\overline{\beta}-\overline{\alpha}\right)(z-\alpha) = (\beta-\alpha)(\bar{z}-\overline{\alpha})$$

Vergelijking rechte

Dus: α, β en z op een rechte

$$\iff \frac{\beta-\alpha}{z-\alpha} \in \mathbb{R}$$

$$\iff \frac{\beta-\alpha}{z-\alpha} = \frac{\overline{\beta}-\overline{\alpha}}{\overline{z}-\overline{\alpha}}$$

$$\iff \left(\overline{\beta}-\overline{\alpha}\right)(z-\alpha) = (\beta-\alpha)(\overline{z}-\overline{\alpha})$$

$$\iff \left(\overline{\beta}-\overline{\alpha}\right) z - (\beta-\alpha)\,\overline{z} = \alpha\left(\overline{\beta}-\overline{\alpha}\right) - \overline{\alpha}\,(\beta-\alpha)$$

Vergelijking rechte

Dus: α, β en z op een rechte

$$\begin{aligned}
&\iff \frac{\beta-\alpha}{z-\alpha} \in \mathbb{R} \\
&\iff \frac{\beta-\alpha}{z-\alpha} = \frac{\overline{\beta}-\overline{\alpha}}{\overline{z}-\overline{\alpha}} \\
&\iff \left(\overline{\beta}-\overline{\alpha}\right)(z-\alpha) = (\beta-\alpha)(\overline{z}-\overline{\alpha}) \\
&\iff \left(\overline{\beta}-\overline{\alpha}\right) z - (\beta-\alpha)\,\overline{z} = \alpha\left(\overline{\beta}-\overline{\alpha}\right) - \overline{\alpha}(\beta-\alpha) \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad = \alpha\overline{\beta} - \overline{\alpha}\beta
\end{aligned}$$

Vergelijking rechte

Dus: α, β en z op een rechte

$$\iff \frac{\beta-\alpha}{z-\alpha} \in \mathbb{R}$$

$$\iff \left(\overline{\beta}-\overline{\alpha}\right) z - (\beta-\alpha)\,\bar{z} = \alpha\overline{\beta} - \overline{\alpha}\beta$$

Vergelijking rechte

Dus: α, β en z op een rechte

$$\iff \frac{\beta-\alpha}{z-\alpha} \in \mathbb{R}$$

$$\iff \left(\overline{\beta}-\overline{\alpha}\right) z - \left(\beta-\alpha\right)\overline{z} = \alpha\overline{\beta} - \overline{\alpha}\beta$$

$$\iff z + \frac{\alpha-\beta}{\overline{\beta}-\overline{\alpha}}\overline{z} = \frac{\alpha\overline{\beta}-\overline{\alpha}\beta}{\overline{\beta}-\overline{\alpha}}$$

Vergelijking rechte

$$\frac{\alpha-\beta}{\overline{\beta}-\overline{\alpha}} = \frac{\alpha-\beta}{\overline{\beta}-\overline{\alpha}} \cdot \frac{\alpha\beta}{\alpha\beta}$$

Dus: α, β en z op een rechte

$$\iff \frac{\beta-\alpha}{z-\alpha} \in \mathbb{R}$$

$$\iff \left(\overline{\beta}-\overline{\alpha}\right) z - (\beta-\alpha)\,\bar{z} = \alpha\overline{\beta} - \overline{\alpha}\beta$$

$$\iff z + \frac{\alpha-\beta}{\overline{\beta}-\overline{\alpha}}\bar{z} = \frac{\alpha\overline{\beta}-\overline{\alpha}\beta}{\overline{\beta}-\overline{\alpha}}$$

Vergelijking rechte

$$\frac{\alpha-\beta}{\overline{\beta}-\overline{\alpha}} = \frac{\alpha-\beta}{\overline{\beta}-\overline{\alpha}} \cdot \frac{\alpha\beta}{\alpha\beta} = \alpha\beta$$

Dus: α, β en z op een rechte

$$\iff \frac{\beta-\alpha}{z-\alpha} \in \mathbb{R}$$

$$\iff \left(\overline{\beta}-\overline{\alpha}\right) z - \left(\beta-\alpha\right) \bar{z} = \alpha\overline{\beta} - \overline{\alpha}\beta$$

$$\iff z + \frac{\alpha-\beta}{\overline{\beta}-\overline{\alpha}}\bar{z} = \frac{\alpha\overline{\beta}-\overline{\alpha}\beta}{\overline{\beta}-\overline{\alpha}}$$

Vergelijking rechte

Dus: α, β en z op een rechte

$$\iff \frac{\beta - \alpha}{z - \alpha} \in \mathbb{R}$$

$$\iff \left(\overline{\beta} - \overline{\alpha}\right) z - \left(\beta - \alpha\right) \bar{z} = \alpha\overline{\beta} - \overline{\alpha}\beta$$

$$\iff z + \frac{\alpha - \beta}{\overline{\beta} - \overline{\alpha}} \bar{z} = \frac{\alpha\overline{\beta} - \overline{\alpha}\beta}{\overline{\beta} - \overline{\alpha}}$$

$$\frac{\alpha - \beta}{\overline{\beta} - \overline{\alpha}} = \frac{\alpha - \beta}{\overline{\beta} - \overline{\alpha}} \cdot \frac{\alpha\beta}{\alpha\beta} = \alpha\beta$$

en

$$\frac{\alpha\overline{\beta} - \overline{\alpha}\beta}{\overline{\beta} - \overline{\alpha}} =$$

$$= \frac{\alpha\overline{\beta} - \overline{\alpha}\beta}{\overline{\beta} - \overline{\alpha}} \cdot \frac{\alpha\beta}{\alpha\beta} =$$

Vergelijking rechte

Dus: α, β en z op een rechte

$$\iff \frac{\beta-\alpha}{z-\alpha} \in \mathbb{R}$$

$$\iff \left(\overline{\beta}-\overline{\alpha}\right) z - (\beta-\alpha)\,\overline{z} = \alpha\overline{\beta}-\overline{\alpha}\beta$$

$$\iff z + \frac{\alpha-\beta}{\overline{\beta}-\overline{\alpha}}\overline{z} = \frac{\alpha\overline{\beta}-\overline{\alpha}\beta}{\overline{\beta}-\overline{\alpha}}$$

$$\frac{\alpha-\beta}{\overline{\beta}-\overline{\alpha}} = \frac{\alpha-\beta}{\overline{\beta}-\overline{\alpha}} \cdot \frac{\alpha\beta}{\alpha\beta} = \alpha\beta$$

en

$$\frac{\alpha\overline{\beta}-\overline{\alpha}\beta}{\overline{\beta}-\overline{\alpha}} = $$

$$= \frac{\alpha\overline{\beta}-\overline{\alpha}\beta}{\overline{\beta}-\overline{\alpha}} \cdot \frac{\alpha\beta}{\alpha\beta} = $$

$$= \frac{\alpha^2-\beta^2}{\alpha-\beta}$$

Vergelijking rechte

Dus: α, β en z op een rechte

$$\iff \frac{\beta-\alpha}{z-\alpha} \in \mathbb{R}$$

$$\iff \left(\overline{\beta}-\overline{\alpha}\right) z - \left(\beta-\alpha\right)\overline{z} = \alpha\overline{\beta}-\overline{\alpha}\beta$$

$$\iff z + \frac{\alpha-\beta}{\overline{\beta}-\overline{\alpha}}\overline{z} = \frac{\alpha\overline{\beta}-\overline{\alpha}\beta}{\overline{\beta}-\overline{\alpha}}$$

$$\frac{\alpha-\beta}{\overline{\beta}-\overline{\alpha}} = \frac{\alpha-\beta}{\overline{\beta}-\overline{\alpha}} \cdot \frac{\alpha\beta}{\alpha\beta} = \alpha\beta$$

en

$$\frac{\alpha\overline{\beta}-\overline{\alpha}\beta}{\overline{\beta}-\overline{\alpha}} = \\ = \frac{\alpha\overline{\beta}-\overline{\alpha}\beta}{\overline{\beta}-\overline{\alpha}} \cdot \frac{\alpha\beta}{\alpha\beta} = \\ = \frac{\alpha^2-\beta^2}{\alpha-\beta} = \alpha+\beta$$

Vergelijking rechte

Dus: α, β en z op een rechte

$$\iff \frac{\beta - \alpha}{z - \alpha} \in \mathbb{R}$$

$$\iff \left(\overline{\beta} - \overline{\alpha}\right) z - (\beta - \alpha)\, \overline{z} = \alpha\overline{\beta} - \overline{\alpha}\beta$$

Vergelijking rechte

Dus: α, β en z op een rechte

$$\iff \frac{\beta - \alpha}{z - \alpha} \in \mathbb{R}$$

$$\iff \left(\overline{\beta} - \overline{\alpha}\right) z - \left(\beta - \alpha\right) \overline{z} = \alpha\overline{\beta} - \overline{\alpha}\beta$$

Als α en β op de eenheidcirkel liggen,

(dus als $|\alpha| = |\beta| = 1$)

Vergelijking rechte

Dus: α, β en z op een rechte

$$\iff \frac{\beta - \alpha}{z - \alpha} \in \mathbb{R}$$

$$\iff \left(\overline{\beta} - \overline{\alpha}\right) z - (\beta - \alpha)\,\overline{z} = \alpha\overline{\beta} - \overline{\alpha}\beta$$

Als α en β op de eenheidcirkel liggen,

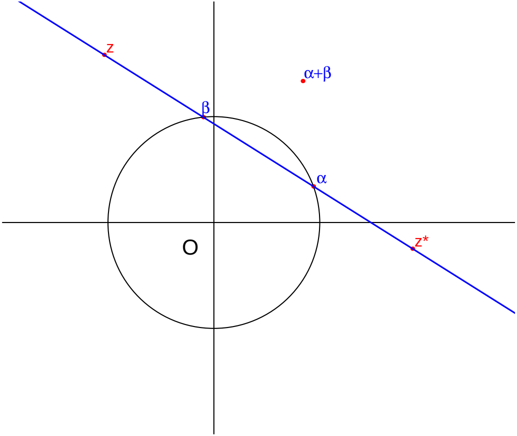
(dus als $|\alpha| = |\beta| = 1$)

$z + \alpha\beta\overline{z} = \alpha + \beta$.

Vergelijking rechte

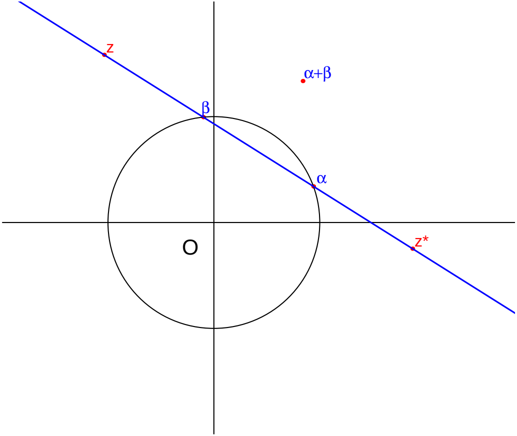
Meetkundige onderbouwing.

Vergelijking rechte



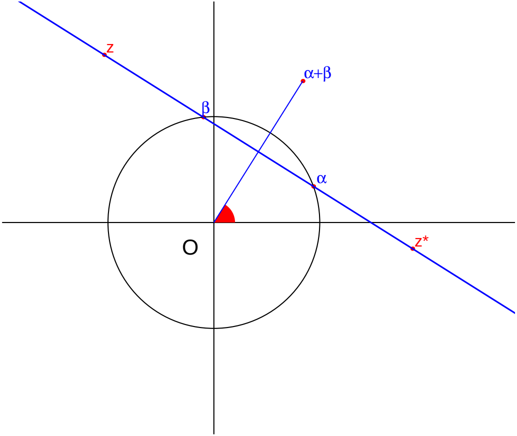
z^* is de gespiegelde van z in de middelloodlijn van lijnstuk AB.

Vergelijking rechte



z op de lijn AB als
$z + z^* = \alpha + \beta$.

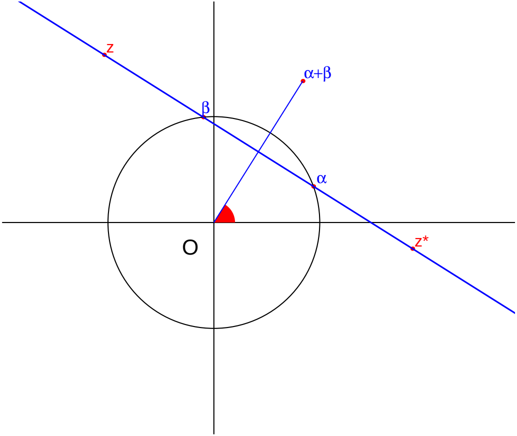
Vergelijking rechte



Deze hoek is

$$\frac{\arg(\beta) - \arg(\alpha)}{2} + \arg(\alpha)$$

Vergelijking rechte

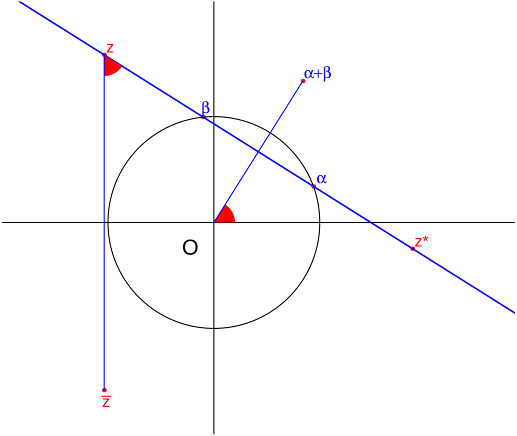


Deze hoek is

$$\frac{\arg(\beta) - \arg(\alpha)}{2} + \arg(\alpha)$$

$$= \frac{\arg(\alpha) + \arg(\beta)}{2}$$

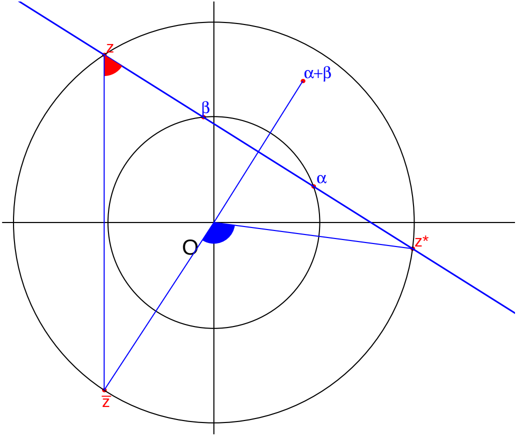
Vergelijking rechte



Wegens gelijkvormige driehoeken.

$$\frac{\text{arg}(\alpha)+\text{arg}(\beta)}{2}$$

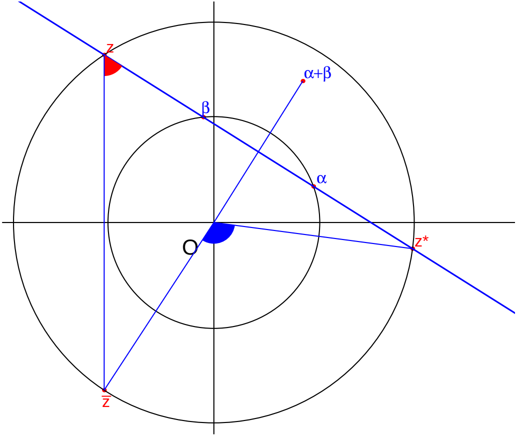
Vergelijking rechte



Middelpuntshoek is het dubbele van omtrekshoek.

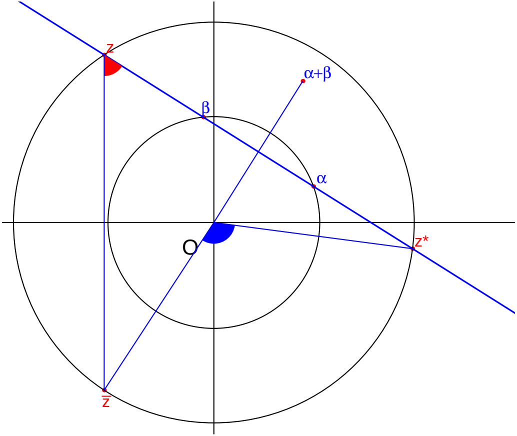
$2 \cdot \frac{\arg(\alpha)+\arg(\beta)}{2} = \arg(\alpha) + \arg(\beta)$

Vergelijking rechte



Dus $\alpha\beta\bar{z} = z^*$.

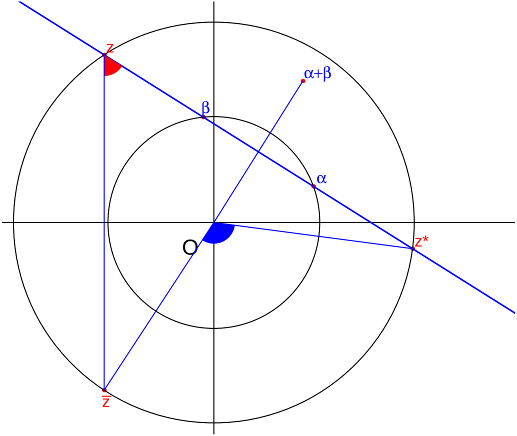
Vergelijking rechte



Dus $\alpha\beta\bar{z} = z^*$.

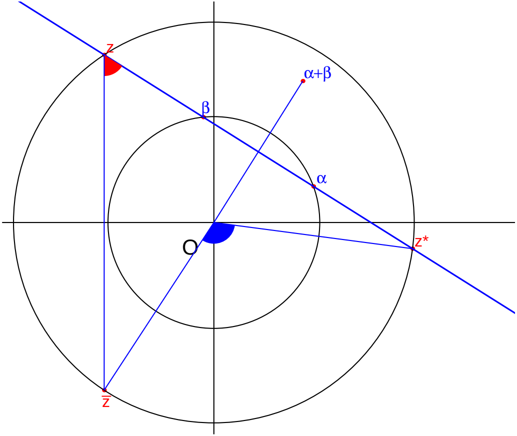
$$z + \alpha\beta\bar{z} = \alpha + \beta$$

Vergelijking rechte



Zie je ook dat als ik de lijn 90° wil draaien, dat z^* 180° draait?

Vergelijking rechte

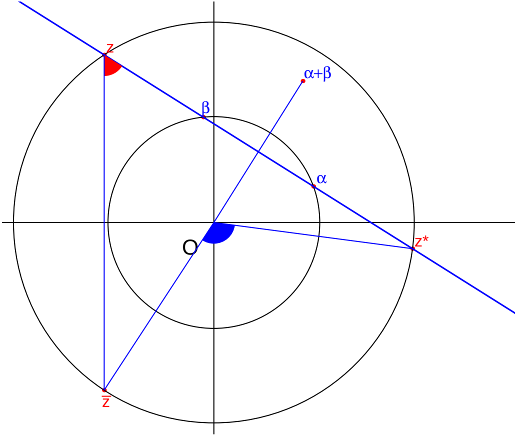


Zie je ook dat als ik de lijn 90° wil draaien, dat z^* 180° draait?

Een lijn loodrecht AB door bijvoorbeeld B wordt dan

$z - \alpha\beta\bar{z} =$

Vergelijking rechte

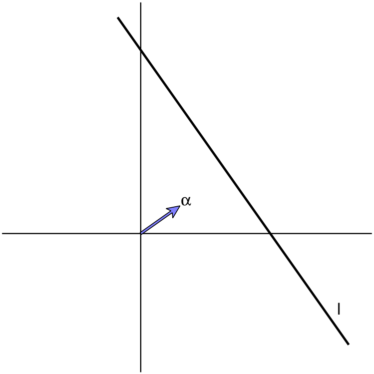


Zie je ook dat als ik de lijn 90° wil draaien, dat z^* 180° draait?

Een lijn loodrecht AB door bijvoorbeeld B wordt dan

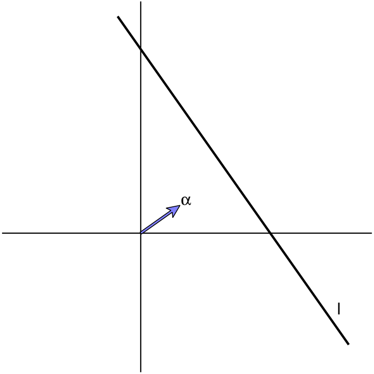
$$z - \alpha\beta\bar{z} = \beta - \alpha\beta\overline{\beta} = \beta - \alpha$$

Normaal-vergelijking lijn



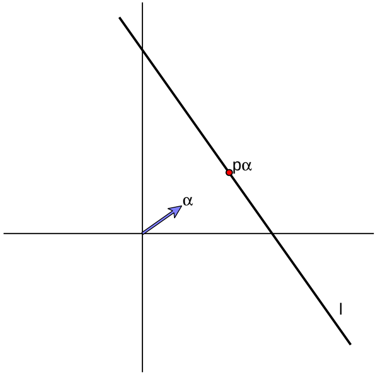
Stel α is een eenheidsvector loodrecht op de lijn l.

Normaal-vergelijking lijn



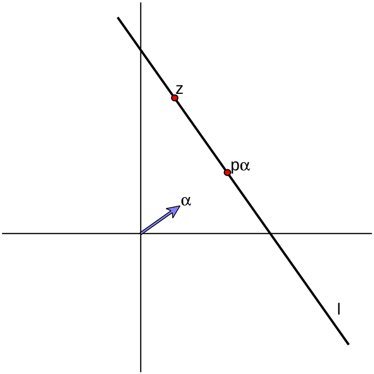
Stel α is een eenheidsvector loodrecht op de lijn *l*.
De afstand van *O* tot de lijn is *p*.

Normaal-vergelijking lijn



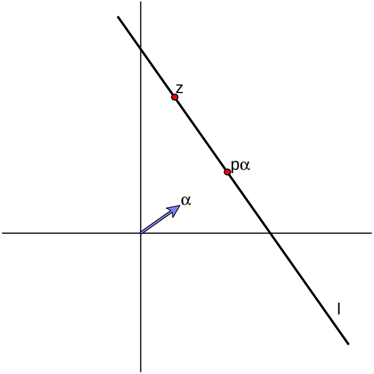
Stel α is een eenheidsvector loodrecht op de lijn l.
De afstand van O tot de lijn is p.

Normaal-vergelijking lijn



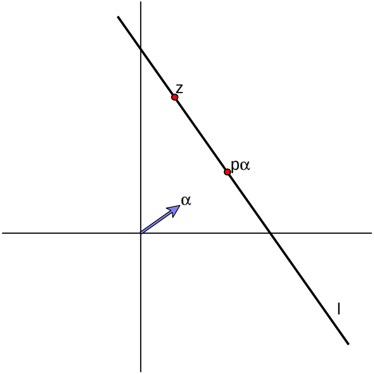
Als z een willekeurig punt op de lijn is, dan is $z - p\alpha$ loodrecht α.

Normaal-vergelijking lijn



Als z een willekeurig punt op de lijn is, dan is $z - p\alpha$ loodrecht α. Dan $\frac{z-p\alpha}{\alpha}$ zuiver imaginair.

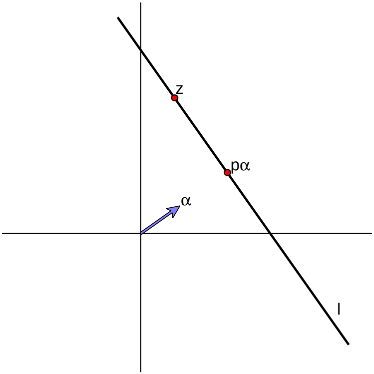
Normaal-vergelijking lijn



In dat geval is

$$\frac{z - p\alpha}{\alpha} + \frac{\bar{z} - p\overline{\alpha}}{\overline{\alpha}} = 0$$

Normaal-vergelijking lijn



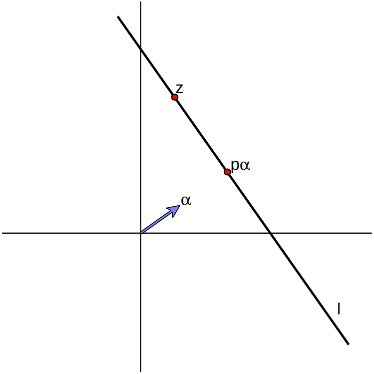
In dat geval is

$$\frac{z - p\alpha}{\alpha} + \frac{\bar{z} - p\overline{\alpha}}{\overline{\alpha}} = 0$$

Vereenvoudigen:

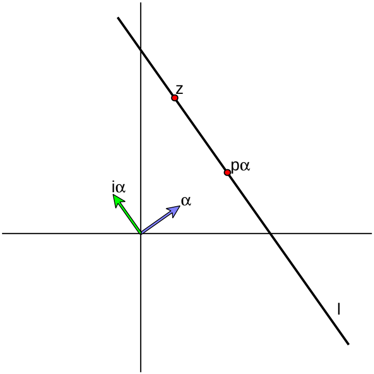
$$\frac{z}{\alpha} + \frac{\bar{z}}{\overline{\alpha}} = 2p$$

Normaal-vergelijking lijn



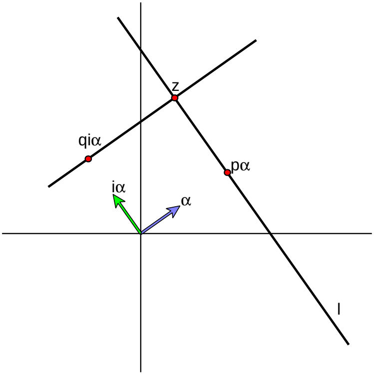
Willen we een vergelijking van een lijn, loodrecht l, dan vervangen we α door $i\alpha$.

Normaal-vergelijking lijn



Willen we een vergelijking van een lijn, loodrecht l, dan vervangen we α door $i\alpha$.

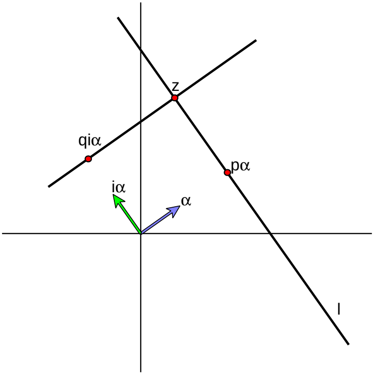
Normaal-vergelijking lijn



En als nu de afstand q is, dan wordt de vergelijking

$$\frac{z}{i\alpha} + \frac{\bar{z}}{\bar{i}\,\bar{\alpha}} = 2q$$

Normaal-vergelijking lijn



En als nu de afstand q is, dan wordt de vergelijking

$$\frac{z}{i\alpha} + \frac{\bar{z}}{\bar{i}\,\overline{\alpha}} = 2q$$

ofwel

$$\frac{z}{\alpha} - \frac{\bar{z}}{\overline{\alpha}} = 2qi$$

Algemene vergelijking van een lijn

Opgaven

z_1 en $z_2 \in \mathbb{C}$ zijn twee verschillende punten in het complexe vlak.

1. Toon aan dat $z - z_1 = \dfrac{z_2 - z_1}{\bar{z}_2 - \bar{z}_1}(\bar{z} - \bar{z}_1)$
   een rechte lijn door z_1 en z_2 voorstelt.
2. De verhouding $\kappa = \frac{z_2 - z_1}{\bar{z}_2 - \bar{z}_1}$ wordt de **complexe helling** van de lijn genoemd.
   Toon aan dat $\overline{\kappa} = \kappa^{-1}$ en $|\kappa| = 1$.
3. κ_1 en κ_2 zijn complexe hellingen van twee lijnen in het complexe vlak. Toon aan dat
   3.1 de lijnen evenwijdig zijn desda $\kappa_1 = \kappa_2$
   3.2 de lijnen loodrecht elkaar zijn desda $\kappa_1 = -\kappa_2$

Algemene vergelijking van een lijn

Opgaven

z_1 en $z_2 \in \mathbb{C}$ zijn twee verschillende punten in het complexe vlak.

4. Toon aan dat elke lijn kan worden geschreven in de vorm

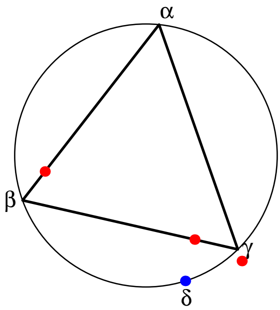
$$Az + \overline{A}\overline{z} + C = 0$$

waarin $A \neq 0$ en $C \in \mathbb{R}$.

5. Toon aan dat de afstand van een punt $P(\lambda)$ tot een lijn l is

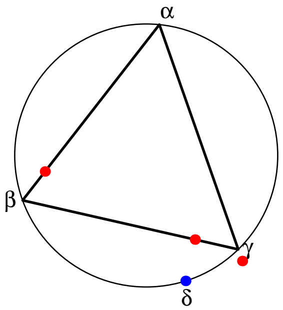
$$\mathrm{d}\left(P, l\right) = \frac{\left|A\lambda + \overline{A\lambda} + C\right|}{2\left|A\right|}$$

Rechte van Wallace



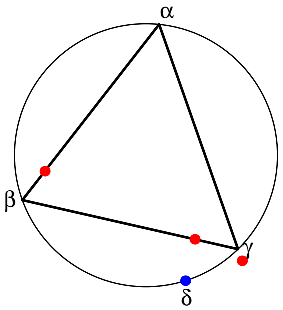
Hiernaast zie je een willekeurige driehoek *ABC* met waarbij het (complexe) getal α bij het punt *A* hoort, enz. Weer is de straal van de omgeschreven cirkel voor 't gemak op 1 gesteld. Het punt *D* (blauw) wordt op de zijden van de driehoek geprojecteerd; dat zijn de rode punten.

Rechte van Wallace



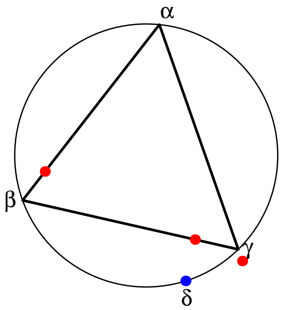
Zo te zien liggen de rode punten op een rechte.

Rechte van Wallace



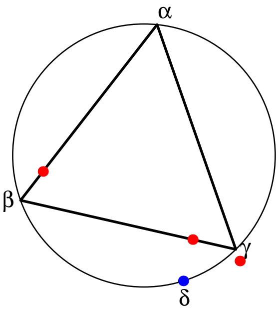
Als het punt D niet op de omgeschreven cirkel ligt, dan liggen de projecties niet op een rechte.

Rechte van Wallace



Die rechte heet naar Wallace.

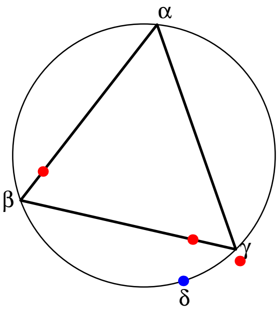
Rechte van Wallace



Die rechte heet naar Wallace.

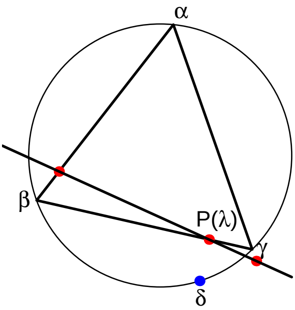
Maar (ten onrechte) ook wel Simson-lijn genoemd.

Rechte van Wallace



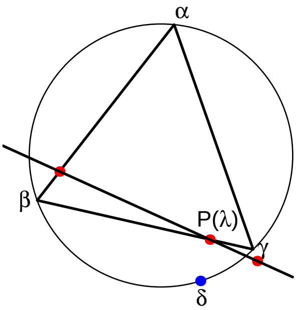
Bewijs van de stelling.

Rechte van Wallace



Laten we eerst λ, de projectie van D op BC berekenen.

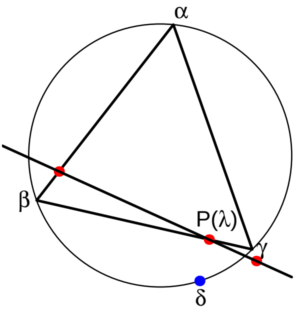
Rechte van Wallace



De vergelijking van de lijn BC is

$$z + \beta\gamma\bar{z} = \beta + \gamma$$

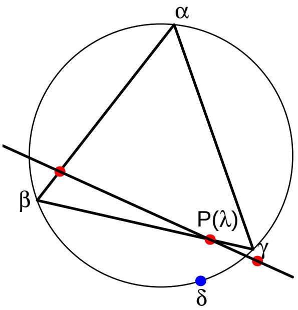
Rechte van Wallace



$$z + \beta\gamma\bar{z} = \beta + \gamma$$

Loodrecht hierop en door D is dan

Rechte van Wallace

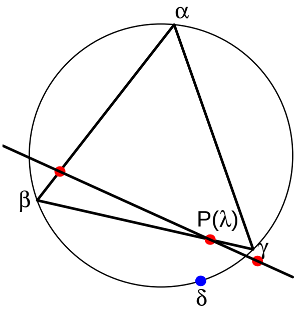


$$z + \beta\gamma\bar{z} = \beta + \gamma$$

Loodrecht hierop en door D is dan

$$z - \beta\gamma\bar{z} = \delta - \beta\gamma\bar{\delta}$$

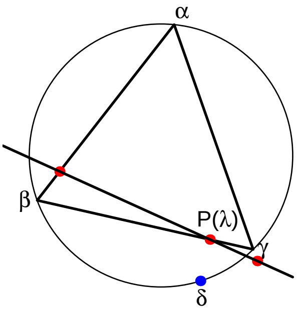
Rechte van Wallace



We vinden

$$\lambda = \frac{1}{2}\left(\beta + \gamma + \delta - \beta\gamma\overline{\delta}\right)$$

Rechte van Wallace



$$\lambda = \frac{1}{2}\left(\beta + \gamma + \delta - \beta\gamma\overline{\delta}\right)$$
$$\mu = \frac{1}{2}\left(\alpha + \gamma + \delta - \alpha\gamma\overline{\delta}\right)$$
$$\nu = \frac{1}{2}\left(\alpha + \beta + \delta - \alpha\beta\overline{\delta}\right)$$

Rechte van Wallace

$$P, Q \text{ en } R \text{ op een rechte} \iff \frac{\lambda - \nu}{\mu - \nu} \in \mathbb{R}$$

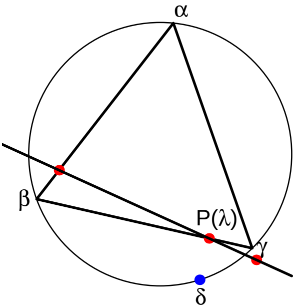
Rechte van Wallace

$$
\begin{aligned}
P, Q \text{ en } R \text{ op een rechte } &\iff \frac{\lambda-\nu}{\mu-\nu} \in \mathbb{R} \\
&\iff \frac{\gamma-\alpha-\beta\gamma\overline{\delta}+\beta\alpha\overline{\delta}}{\gamma-\beta-\alpha\gamma\overline{\delta}+\alpha\beta\overline{\delta}} \in \mathbb{R} \\
&\iff \frac{(\gamma-\alpha)\left(1-\beta\overline{\delta}\right)}{(\gamma-\beta)\left(1-\alpha\overline{\delta}\right)} \in \mathbb{R}
\end{aligned}
$$

noem r de lengte van δ, dan is $\overline{\delta} = \frac{r^2}{\delta}$ ofwel $\overline{\delta}^{-1} = \delta r^{-2}$

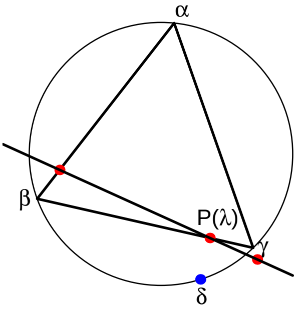
$$
\begin{aligned}
&\iff \left(\frac{\alpha-\gamma}{\beta-\gamma}\right) / \left(\frac{\alpha-\delta r^{-2}}{\beta-\delta r^{-2}}\right) \in \mathbb{R} \\
&\iff \left(\alpha,\beta;\gamma,\delta r^{-2}\right) \in \mathbb{R} \\
&\iff \alpha,\beta,\gamma,\delta r^{-2} \text{ zijn cocyclisch} \\
&\iff \left|\delta r^{-2}\right| = 1 \\
&\iff r = |\delta| = 1
\end{aligned}
$$

Rechte van Wallace



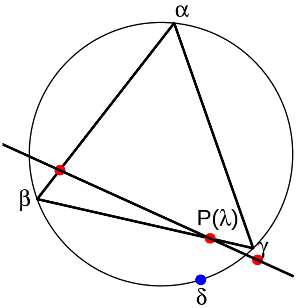
Het zou aardig zijn als we ook een vergelijking van de Wallace-lijn kunnen vinden.

Rechte van Wallace



Het zou aardig zijn als we ook een vergelijking van de Wallace-lijn kunnen vinden. We gaan weer uit van een willekeurige driehoek in de eenheidscirkel met α, β en γ; we kiezen ook een δ op deze cirkel. We weten nu dus dat $\overline{\delta} = \frac{1}{\delta}$.

Rechte van Wallace



Het zou aardig zijn als we ook een vergelijking van de Wallace-lijn kunnen vinden. We gaan weer uit van een willekeurige driehoek in de eenheidscirkel met α, β en γ; we kiezen ook een δ op deze cirkel. We weten nu dus dat $\overline{\delta} = \frac{1}{\delta}$. Als weer de projectie van D op BC het punt $P(\lambda)$ is, geldt

$$\lambda = \frac{1}{2}\left(\beta + \gamma + \delta - \frac{\beta\gamma}{\delta}\right)$$

Rechte van Wallace

Nu volgt een introductie van een nieuwe notatie.

Rechte van Wallace

Nu volgt een introductie van een nieuwe notatie.

$$\sigma_1 = \alpha + \beta + \gamma, \qquad \sigma_2 = \beta\gamma + \gamma\alpha + \alpha\beta, \qquad \sigma_3 = \alpha\beta\gamma.$$

Rechte van Wallace

$$z = \tfrac{1}{2}\left(\sigma_1 - \alpha + \delta - \frac{\sigma_3}{\delta\alpha}\right)$$

Rechte van Wallace

$$z = \tfrac{1}{2}\left(\sigma_1 - \alpha + \delta - \frac{\sigma_3}{\delta\alpha}\right)$$

$$\bar{z} = \tfrac{1}{2}\left(\overline{\sigma}_1 - \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\delta} - \frac{\delta\alpha}{\sigma_3}\right)$$

omdat ook $\overline{\sigma_3} = \dfrac{1}{\sigma_3}$.

Rechte van Wallace

$$z = \tfrac{1}{2}\left(\sigma_1 - \alpha + \delta - \frac{\sigma_3}{\delta\alpha}\right)$$

$$\bar{z} = \tfrac{1}{2}\left(\overline{\sigma}_1 - \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\delta} - \frac{\delta\alpha}{\sigma_3}\right)$$

omdat ook $\overline{\sigma_3} = \dfrac{1}{\sigma_3}$.

Merk op dat

$$\overline{\sigma_1} = \overline{\alpha} + \overline{\beta} + \overline{\gamma} = \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\gamma} = \frac{\sigma_2}{\sigma_3}$$

Rechte van Wallace

$$z = \tfrac{1}{2}\left(\sigma_1 - \alpha + \delta - \frac{\sigma_3}{\delta\alpha}\right)$$

$$\bar{z} = \tfrac{1}{2}\left(\overline{\sigma}_1 - \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\delta} - \frac{\delta\alpha}{\sigma_3}\right)$$

omdat ook $\overline{\sigma_3} = \dfrac{1}{\sigma_3}$.

Merk op dat

$$\overline{\sigma_1} = \overline{\alpha} + \overline{\beta} + \overline{\gamma} = \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\gamma} = \frac{\sigma_2}{\sigma_3}$$

zodat

$$\sigma_3\bar{z} = \tfrac{1}{2}\left(\sigma_2 - \frac{\sigma_3}{\alpha} + \frac{\sigma_3}{\delta} - \alpha\delta\right)$$

Rechte van Wallace

$$z = \tfrac{1}{2}\left(\sigma_1 - \alpha + \delta - \frac{\sigma_3}{\delta\alpha}\right)$$

$$\bar{z} = \tfrac{1}{2}\left(\overline{\sigma}_1 - \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\delta} - \frac{\delta\alpha}{\sigma_3}\right)$$

omdat ook $\overline{\sigma_3} = \dfrac{1}{\sigma_3}$.

Merk op dat

$$\overline{\sigma_1} = \overline{\alpha} + \overline{\beta} + \overline{\gamma} = \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\gamma} = \frac{\sigma_2}{\sigma_3}$$

zodat

$$\sigma_3\bar{z} = \tfrac{1}{2}\left(\sigma_2 - \frac{\sigma_3}{\alpha} + \frac{\sigma_3}{\delta} - \alpha\delta\right)$$

terwijl

$$\delta z = \tfrac{1}{2}\left(\sigma_1\delta - \alpha\delta + \delta^2 - \frac{\sigma_3}{\alpha}\right)$$

Rechte van Wallace

$$\sigma_3\bar{z} = \tfrac{1}{2}\left(\sigma_2 - \frac{\sigma_3}{\alpha} + \frac{\sigma_3}{\delta} - \alpha\delta\right)$$

$$\delta z = \tfrac{1}{2}\left(\sigma_1\delta - \alpha\delta + \delta^2 - \frac{\sigma_3}{\alpha}\right)$$

Rechte van Wallace

$$\sigma_3\bar{z} = \tfrac{1}{2}\left(\sigma_2 - \frac{\sigma_3}{\alpha} + \frac{\sigma_3}{\delta} - \alpha\delta\right)$$

$$\delta z = \tfrac{1}{2}\left(\sigma_1\delta - \alpha\delta + \delta^2 - \frac{\sigma_3}{\alpha}\right)$$

zodat

$$\delta z - \sigma_3\bar{z} = \tfrac{1}{2}\left(\delta^2 + \sigma_1\delta - \sigma_2 - \frac{\sigma_3}{\delta}\right)$$

Rechte van Wallace

$$\delta z - \sigma_3 \bar{z} = \tfrac{1}{2}\left(\delta^2 + \sigma_1 \delta - \sigma_2 - \frac{\sigma_3}{\delta}\right)$$

Rechte van Wallace

$$\delta z - \sigma_3 \bar{z} = \tfrac{1}{2}\left(\delta^2 + \sigma_1 \delta - \sigma_2 - \frac{\sigma_3}{\delta}\right)$$

Aan deze vergelijking voldoet $P(\lambda)$ natuurlijk, maar ook de andere projecties omdat in deze formule alleen σ_1, σ_2 en σ_3 voorkomen en die zijn symmetrisch t.o.v. α, β en γ.

Rechte van Wallace

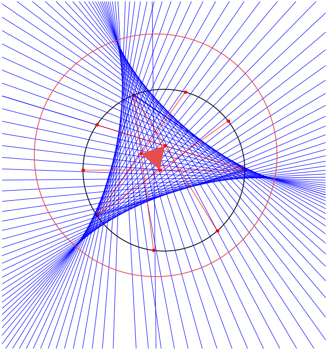
$$\delta z - \sigma_3 \bar{z} = \tfrac{1}{2}\left(\delta^2 + \sigma_1 \delta - \sigma_2 - \frac{\sigma_3}{\delta}\right)$$

Aan deze vergelijking voldoet $P(\lambda)$ natuurlijk, maar ook de andere projecties omdat in deze formule alleen σ_1, σ_2 en σ_3 voorkomen en die zijn symmetrisch t.o.v. α, β en γ.
Bovendien is het een vergelijking van een rechte lijn.

Rechte van Wallace

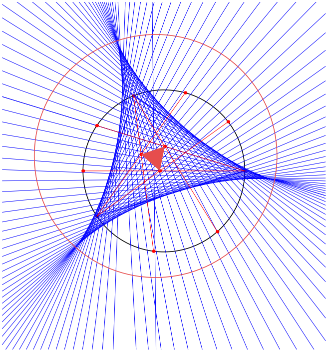
We kunnen variëren door D te laten lopen over de cirkel.

Rechte van Wallace



Dat geeft prachtige plaatjes.

Rechte van Wallace



Dat geeft prachtige plaatjes.
Maar kost veel tijd.

Rechte van Wallace

In plaats van één punt D dat we projecteren, kunnen we er ook drie nemen.

Rechte van Wallace

In plaats van één punt D dat we projecteren, kunnen we er ook drie nemen. Wanneer gaan de drie bijbehorende lijnen van Wallace door één punt?

Rechte van Wallace

We nemen de drie punten K, L en M met bijbehorende waarden u_1, u_2 en u_3.

Rechte van Wallace

We nemen de drie punten K, L en M met bijbehorende waarden u_1, u_2 en u_3.
De drie bijbehorende lijnen van Wallace zijn dan

$$u_1 z - \sigma_3 \bar{z} = \frac{1}{2}\left(u_1^2 + \sigma_1 u_1 - \sigma_2 - \frac{\sigma_3}{u_1}\right)$$

Rechte van Wallace

We nemen de drie punten K, L en M met bijbehorende waarden u_1, u_2 en u_3.
De drie bijbehorende lijnen van Wallace zijn dan

$$u_1 z - \sigma_3 \bar{z} = \tfrac{1}{2}\left(u_1^2 + \sigma_1 u_1 - \sigma_2 - \frac{\sigma_3}{u_1}\right)$$

$$u_2 z - \sigma_3 \bar{z} = \tfrac{1}{2}\left(u_2^2 + \sigma_1 u_2 - \sigma_2 - \frac{\sigma_3}{u_2}\right)$$

Rechte van Wallace

We nemen de drie punten K, L en M met bijbehorende waarden u_1, u_2 en u_3.
De drie bijbehorende lijnen van Wallace zijn dan

$$u_1 z - \sigma_3 \bar{z} = \tfrac{1}{2}\left(u_1^2 + \sigma_1 u_1 - \sigma_2 - \frac{\sigma_3}{u_1}\right)$$

$$u_2 z - \sigma_3 \bar{z} = \tfrac{1}{2}\left(u_2^2 + \sigma_1 u_2 - \sigma_2 - \frac{\sigma_3}{u_2}\right)$$

$$u_3 z - \sigma_3 \bar{z} = \tfrac{1}{2}\left(u_3^2 + \sigma_1 u_3 - \sigma_2 - \frac{\sigma_3}{u_3}\right)$$

Rechte van Wallace

$$u_1 z - \sigma_3 \bar{z} = \frac{1}{2}\left(u_1^2 + \sigma_1 u_1 - \sigma_2 - \frac{\sigma_3}{u_1}\right)$$

$$u_2 z - \sigma_3 \bar{z} = \frac{1}{2}\left(u_2^2 + \sigma_1 u_2 - \sigma_2 - \frac{\sigma_3}{u_2}\right)$$

Het snijpunt van de bovenste twee vergelijkingen vinden we door het verschil te nemen:

Rechte van Wallace

$$u_1 z - \sigma_3 \bar{z} = \tfrac{1}{2}\left(u_1^2 + \sigma_1 u_1 - \sigma_2 - \frac{\sigma_3}{u_1}\right)$$

$$u_2 z - \sigma_3 \bar{z} = \tfrac{1}{2}\left(u_2^2 + \sigma_1 u_2 - \sigma_2 - \frac{\sigma_3}{u_2}\right)$$

Het snijpunt van de bovenste twee vergelijkingen vinden we door het verschil te nemen:

$$\left(u_1 - u_2\right) z = \tfrac{1}{2}\left(u_1^2 - u_2^2 + \sigma_1\left(u_1 - u_2\right) - \sigma_3\left(\frac{1}{u_1} - \frac{1}{u_2}\right)\right)$$

Rechte van Wallace

$$u_1 z - \sigma_3 \bar{z} = \tfrac{1}{2}\left(u_1^2 + \sigma_1 u_1 - \sigma_2 - \frac{\sigma_3}{u_1}\right)$$

$$u_2 z - \sigma_3 \bar{z} = \tfrac{1}{2}\left(u_2^2 + \sigma_1 u_2 - \sigma_2 - \frac{\sigma_3}{u_2}\right)$$

Het snijpunt van de bovenste twee vergelijkingen vinden we door het verschil te nemen:

$$\left(u_1 - u_2\right) z = \tfrac{1}{2}\left(u_1^2 - u_2^2 + \sigma_1\left(u_1 - u_2\right) - \sigma_3\left(\frac{1}{u_1} - \frac{1}{u_2}\right)\right)$$

Delen door $(u_1 - u_2)$ geeft

Rechte van Wallace

$$u_1 z - \sigma_3 \bar{z} = \tfrac{1}{2}\left(u_1^2 + \sigma_1 u_1 - \sigma_2 - \frac{\sigma_3}{u_1}\right)$$

$$u_2 z - \sigma_3 \bar{z} = \tfrac{1}{2}\left(u_2^2 + \sigma_1 u_2 - \sigma_2 - \frac{\sigma_3}{u_2}\right)$$

Het snijpunt van de bovenste twee vergelijkingen vinden we door het verschil te nemen:

$$(u_1 - u_2)\, z = \tfrac{1}{2}\left(u_1^2 - u_2^2 + \sigma_1 (u_1 - u_2) - \sigma_3 \left(\frac{1}{u_1} - \frac{1}{u_2}\right)\right)$$

Delen door $(u_1 - u_2)$ geeft

$$z = \tfrac{1}{2}\left(u_1 + u_2 + \sigma_1 + \frac{\sigma_3}{u_1 u_2}\right)$$

Rechte van Wallace

$$z = \tfrac{1}{2}\left(u_1 + u_2 + \sigma_1 + \frac{\sigma_3}{u_1 u_2}\right)$$

Terwijl de onderste twee vergelijkingen geven:

$$z = \tfrac{1}{2}\left(u_2 + u_3 + \sigma_1 + \frac{\sigma_3}{u_2 u_3}\right)$$

Rechte van Wallace

$$z = \tfrac{1}{2}\left(u_1 + u_2 + \sigma_1 + \frac{\sigma_3}{u_1 u_2}\right)$$

Terwijl de onderste twee vergelijkingen geven:

$$z = \tfrac{1}{2}\left(u_2 + u_3 + \sigma_1 + \frac{\sigma_3}{u_2 u_3}\right)$$

Dus is voor samenvallen nodig maar voldoende dat

$$\sigma_3 = u_1 u_2 u_3$$

Rechte van Wallace

Wat hebben we nu ontdekt?

Rechte van Wallace

Stelling

Laat K, L en M punten zijn op de omgeschreven cirkel van driehoek ABC.

De nodige en voldoende voorwaarde dat de lijnen van Wallace van de punten K, L en M t.o.v. driehoek ABC door één punt gaan, is

$$\widehat{AK} + \widehat{BL} + \widehat{CM} \equiv 0 \pmod{2\pi}$$

Rechte van Wallace

Bewijs:
Bedenk dat α, β, γ, u_1, u_2, u_3 op de (eenheids)cirkel liggen, dus als $\sigma_3 = \alpha\beta\gamma = u_1 u_2 u_3$, en we noemen de argumenten van deze zes getallen achtereenvolgens θ_1, θ_2, θ_3, ϕ_1, ϕ_2, ϕ_3, dan moet alleen

$$\theta_1 + \theta_2 + \theta_3 \equiv \phi_1 + \phi_2 + \phi_3 \pmod{2\pi}$$

dus

$$(\theta_1 - \phi_1) + (\theta_2 - \phi_2) + (\theta_3 - \phi_3) \equiv 0 \pmod{2\pi}$$

Rechte van Wallace

Als aan deze voorwaarde is voldaan, dan is dat punt waar die drie lijnen elkaar snijden, volgens onze berekening,

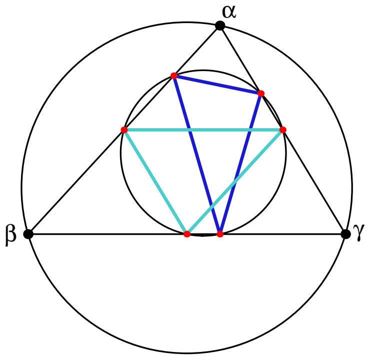
$$\begin{aligned} z &= \tfrac{1}{2}\left(u_1 + u_2 + u_3 + \sigma_1\right) \\ &= \tfrac{1}{2}\left(u_1 + u_2 + u_3 + \alpha + \beta + \gamma\right) \end{aligned}$$

Dat is midden van het lijnstuk dat de twee hoogtepunten met elkaar verbindt.

Rechte van Wallace

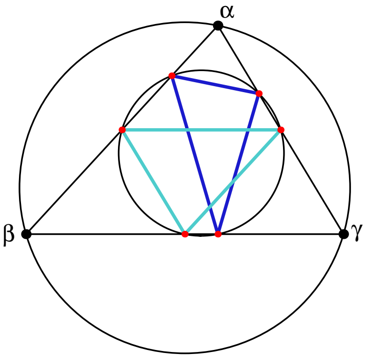
Komen dergelijke driehoeken ook in 't echt voor?

Rechte van Wallace



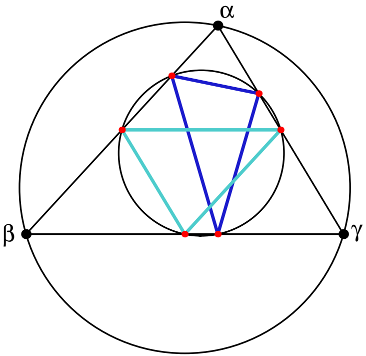
Komen dergelijke driehoeken ook in 't echt voor?

Rechte van Wallace



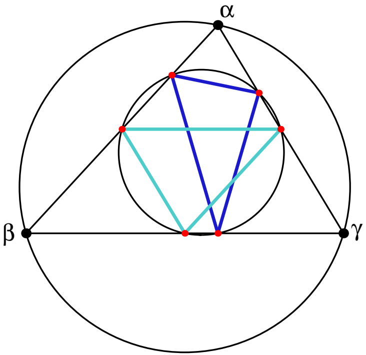
Hiernaast weer de negenpuntscirkel

Rechte van Wallace



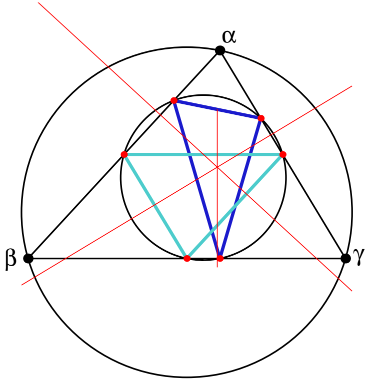
Hiernaast weer de negenpuntscirkel driehoek met middens

Rechte van Wallace



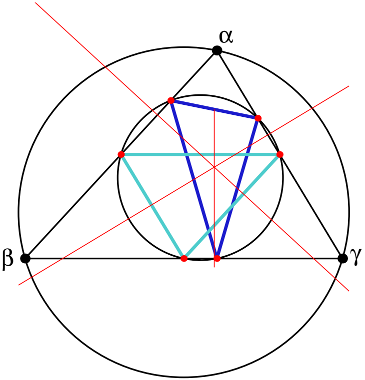
Hiernaast weer de
negenpuntscirkel
driehoek met middens
driehoek met voetpunten

Rechte van Wallace



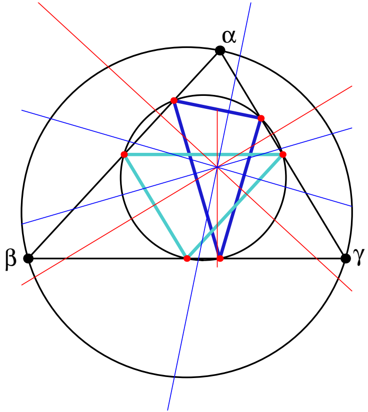
rechtes van Wallace:
middens

Rechte van Wallace



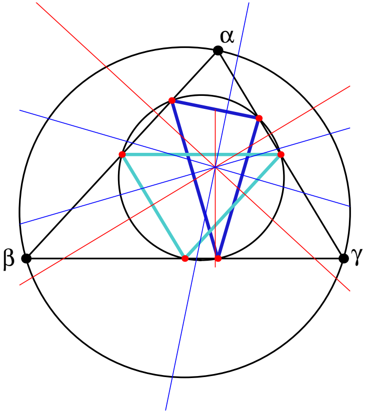
rechtes van Wallace:
middens
ten opzichte van de driehoek met
voetpunten

Rechte van Wallace



rechtes van Wallace:
middens ten opzichte van de driehoek met voetpunten

Rechte van Wallace



rechtes van Wallace:
middens ten opzichte van de driehoek met voetpunten
voetpunten t.o.v. de driehoek met middens.

Rechte van Wallace

Hoe bewijzen we dat?

Rechte van Wallace

De negenpuntscirkel is de eenheidscirkel niet, dus we kunnen niet rechtstreeks de (complexe) getallen gebruiken die bij onze punten horen.

Rechte van Wallace

De negenpuntscirkel is de eenheidscirkel niet, dus we kunnen niet rechtstreeks de (complexe) getallen gebruiken die bij onze punten horen.

Die getallen waren:

$\frac{1}{2}(\beta+\gamma)$, $\frac{1}{2}(\gamma+\alpha)$, $\frac{1}{2}(\alpha+\beta)$ (de middens)

Rechte van Wallace

De negenpuntscirkel is de eenheidscirkel niet, dus we kunnen niet rechtstreeks de (complexe) getallen gebruiken die bij onze punten horen.

Die getallen waren:

$\frac{1}{2}(\beta + \gamma)$, $\frac{1}{2}(\gamma + \alpha)$, $\frac{1}{2}(\alpha + \beta)$ (de middens)

$\frac{1}{2}\left(\sigma - \frac{\beta\gamma}{\alpha}\right)$, $\frac{1}{2}\left(\sigma - \frac{\gamma\alpha}{\beta}\right)$, $\frac{1}{2}\left(\sigma - \frac{\alpha\beta}{\gamma}\right)$ (voetpunten)

Rechte van Wallace

Het middelpunt van de negenpuntscirkel is $\sigma/2$

en straal $\frac{1}{2}$,

Rechte van Wallace

Het middelpunt van de negenpuntscirkel is $\sigma/2$

en straal $\frac{1}{2}$,

dus als we van al deze punten eerst $\frac{\sigma}{2}$ aftrekken en dan met 2 vermenigvuldigen, dan zou het moeten werken.

Rechte van Wallace

Aldus:
De middens waren: $\frac{1}{2}(\beta+\gamma)$, $\frac{1}{2}(\gamma+\alpha)$, $\frac{1}{2}(\alpha+\beta)$

Rechte van Wallace

Aldus:

De middens waren: $\frac{1}{2}(\beta+\gamma)$, $\frac{1}{2}(\gamma+\alpha)$, $\frac{1}{2}(\alpha+\beta)$

en worden: $-\alpha$, $-\beta$, $-\gamma$.

Rechte van Wallace

voetpunten: $\frac{1}{2}\left(\sigma - \frac{\beta\gamma}{\alpha}\right), \qquad \frac{1}{2}\left(\sigma - \frac{\gamma\alpha}{\beta}\right), \qquad \frac{1}{2}\left(\sigma - \frac{\alpha\beta}{\gamma}\right)$

Rechte van Wallace

voetpunten: $\frac{1}{2}\left(\sigma - \frac{\beta\gamma}{\alpha}\right), \qquad \frac{1}{2}\left(\sigma - \frac{\gamma\alpha}{\beta}\right), \qquad \frac{1}{2}\left(\sigma - \frac{\alpha\beta}{\gamma}\right)$

$-\frac{\sigma}{2}$ en keer 2 geeft $\quad -\frac{\beta\gamma}{\alpha}, \qquad -\frac{\gamma\alpha}{\beta}, \qquad -\frac{\alpha\beta}{\gamma}.$

Rechte van Wallace

voetpunten: $\frac{1}{2}\left(\sigma - \frac{\beta\gamma}{\alpha}\right)$, $\frac{1}{2}\left(\sigma - \frac{\gamma\alpha}{\beta}\right)$, $\frac{1}{2}\left(\sigma - \frac{\alpha\beta}{\gamma}\right)$

$-\frac{\sigma}{2}$ en keer 2 geeft $-\frac{\beta\gamma}{\alpha}$, $-\frac{\gamma\alpha}{\beta}$, $-\frac{\alpha\beta}{\gamma}$.

En inderdaad: $(-\alpha)\cdot(-\beta)\cdot(-\gamma) = \left(-\frac{\beta\gamma}{\alpha}\right)\cdot\left(-\frac{\gamma\alpha}{\beta}\right)\cdot\left(-\frac{\alpha\beta}{\gamma}\right)$.