



# **Wiskunde in het nieuwe hoger beroepsonderwijs**

*Vernieuwing van het wiskundeonderwijs in het HBO  
als gevolg van ICT en algemene onderwijsontwikkelingen*

## **Beleidsnotitie van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren**

### **Samenvatting**

In het hoger beroepsonderwijs zijn onderwijskundige vernieuwingen gaande. Curricula worden ontwikkeld vanuit competenties waarmee afgestudeerden toegerust de beroepspraktijk in kunnen. ICT biedt een groeiend scala aan mogelijkheden om het onderwijsleerproces te ondersteunen.

Wiskundige software, waaronder computeralgebra, heeft een ingrijpende invloed op het wiskundeonderwijs en maakt het mogelijk om - veel meer dan in het verleden - methodische competenties aan te leren.

Om te zorgen dat alle inhoudelijke en onderwijskundige vernieuwingen op elkaar afgestemd blijven, is het noodzakelijk om in opleidingsvernieuwingsprojecten expliciet aandacht te besteden aan een vernieuwing van het wiskundeonderwijs, dan wel in een aanvullend project speciaal aandacht te schenken aan de implicaties van een vernieuwd wiskundeonderwijs.

Tevens is het belangrijk dat bestaande expertise op het gebied van nieuw wiskundeonderwijs in het HBO wordt gebundeld om van daaruit vernieuwingsprojecten effectief te kunnen ondersteunen.

## Voorwoord

Deze notitie heeft tot doel de functie van het vak wiskunde in het HBO te verduidelijken. De notitie is geschreven om vernieuwingen die in het HBO aan de gang zijn en ontwikkelingen in de wiskunde op elkaar af te kunnen stemmen. De status van deze notitie is een beleidsadvies van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren (NVvW) aan alle Nederlandse HBO-instellingen in het algemeen en aan alle opleidingen waar wiskunde deel uitmaakt van het curriculum in het bijzonder.<sup>1</sup>

Dit advies kan voor wiskundedocenten in het HBO een hulpmiddel zijn om met het management en docenten van een opleiding, alsmede met het College van Bestuur in gesprek te komen over een route naar structurele onderwijsvernieuwing en de bijdrage die de wiskunde-discipline aan die vernieuwing kan leveren.

Deze notitie bestaat uit twee hoofdstukken: een beleidsadvies voor het onderwijsmanagement en een schets van de vernieuwing van het wiskundeonderwijs voor docenten. Beide hoofdstukken zijn onafhankelijk van elkaar te lezen, maar kunnen elkaar ook op sommige punten aanvullen. Daarom zijn beide hoofdstukken toch in één nota opgenomen.

Meer informatie over de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren:  
<http://www.nvww.nl>

---

<sup>1</sup> Hoewel de wiskundige onderwerpen per opleidingssoort behoorlijk uit een kunnen lopen, is geprobeerd de situatie zo algemeen mogelijk te beschrijven.

## INHOUD

Samenvatting	1
Voorwoord	2
<b>BELEIDSADVIES VOOR HET ONDERWIJSMANAGEMENT</b>	<b>4</b>
Aanbevelingen	7
Literatuurverwijzingen	7
<b>EEN SCHETS VAN DE VERNIEUWINGEN BESTEMD VOOR DOCENTEN</b>	<b>8</b>
1 Inleiding	8
2 Een werkvorm	8
3 Toetsing	9
4 Terugkoppeling	10
5 Elementaire reken- en formulevaardigheden	11
6 Functies van het wiskundeonderwijs in het HBO	11
7 Hoe kijkt de student aan tegen de nieuwe manier van werken	12
8 Effecten voor de beroepsgerichte vakken	12
9 Beschikbaarheid van het computeralgebrasysteem	13
10 Een nieuwe wiskundededidactiek	13
Aanbevelingen	15
Literatuurverwijzing	15
Bijlage A: Een voorbeeld van een Practicumopdracht	A-1
<b>BIJLAGE B: BIJDAGEN VAN WISKUNDE AAN COMPETENTIES VAN HBO- AFGESTUDEERDEN</b>	<b>B-1</b>

# Wiskunde in het nieuwe hoger beroepsonderwijs

## Beleidsadvies voor het onderwijsmanagement

### Beleidsadvies voor het onderwijsmanagement

Het hoger beroepsonderwijs is zich aan het vernieuwen onder invloed van een aantal ontwikkelingen. Onderwijskundig onderzoek [1] heeft nieuwe inzichten over leerprocessen opgeleverd; het bedrijfsleven vraagt om hoger opgeleiden met bredere kwalificaties; de opkomst van informatie- en communicatietechnologie (ICT) biedt een groeiende scala aan mogelijkheden; als gevolg van sociaal-culturele veranderingen heeft onderwijs voor studenten een andere betekenis gekregen<sup>1</sup>; traditionele werkvormen zijn daarbij minder vanzelfsprekend geworden; in vernieuwde vooropleidingen worden aspirant-studenten meer gestimuleerd tot actief en zelfstandig werken.

Door al deze maatschappelijke ontwikkelingen doen zich velerlei onderwijskundige vernieuwingen voor in het onderwijs. Globaal betreft het de volgende vernieuwingen:

- er is veel meer aandacht voor het *proces* van het leren [2],
- leerdoelen worden afgeleid van competenties of bekwaamheden die door het beroepenveld van een afgestudeerde verwacht worden [3],
- er zijn moderne onderwijsvormen ontstaan, zoals probleemgestuurd onderwijs (PGO), projectonderwijs en thematisch onderwijs<sup>2</sup> [4],
- inhoud en vorm van het hoger beroepsonderwijs sluiten beter aan op het niveau en de attitude van de instromende studenten<sup>3</sup>,
- er wordt steeds meer gebruik gemaakt van ICT als gereedschap<sup>4</sup> en er komt meer functionele inzet van ICT bij het leren<sup>5</sup>.

Ook het wiskundeonderwijs is zich in vele opzichten aan het vernieuwen. We zullen enkele ontwikkelingen nader bekijken die daarbij een specifieke rol spelen.

- De beschikbaarheid van geavanceerde computerprogramma's heeft grote invloed op allerlei vakonderwijs.<sup>6</sup> Voor de wiskunde mogen worden genoemd: SPSS (voor statistiek), velerlei toepassingen met spreadsheetprogramma's, simulatie- en rekenprogramma's voor optimaliseringsproblemen en als jongste loot: computeralgebra. Een computeralgebrasysteem<sup>7</sup> (CAS) is een zeer krachtig computerprogramma waarmee niet alleen met getallen gerekend kan worden, maar ook met symbolen. De beschikbaarheid hiervan heeft een vergaande invloed op het wiskundeonderwijs.

- Ook de vernieuwingen van het wiskundeonderwijs in de vooropleiding zullen hun invloed doen gelden. Genoemd mogen worden het TWIN-project in het MBO en het gebruik van de grafische rekenmachine in het HAVO en VWO<sup>8</sup>.

- Het competentie-leren is een krachtige impuls om de functies van wiskunde te herformuleren. Enerzijds is wiskunde een ondersteunende basis voor de beroepsgerichte vakken, anderzijds kan het substantieel bijdragen aan methodische competenties voor de beroepspraktijk.

---

<sup>1</sup> Ontwikkelingen zoals bijverdiene en duaal leren sluiten daarop aan.

<sup>2</sup> Voorbeelden zijn respectievelijk Maastricht, Hogeschool van Amsterdam en de Hogeschool Drenthe.

<sup>3</sup> Vernieuwingen in het M.B.O. (Wet Educatie Beroepsonderwijs) en in het voortgezet onderwijs, waaronder de basisvorming en de tweede fase met bredere programmering en doorstroomprofielen en het studiehuis met meer aandacht voor vaardigheden.

<sup>4</sup> naast standaardapplicaties zoals tekstverwerkers bijvoorbeeld simulatieprogramma's of CAD/CAM.

<sup>5</sup> waaronder internet, educatieve software, simulaties en een digitale leeromgeving.

<sup>6</sup> Genoemd mogen worden geavanceerde programma's voor sterkteberekeningen ("Finite Element Methode") en uitgebreide simulatiepakketten op allerlei vakgebieden.

<sup>7</sup> 'Derive' en 'Maple' zijn op dit moment in het HBO de meest gebruikte computeralgebrasystemen.

<sup>8</sup> Daarnaast wordt ICT in het studiehuis functioneel gebruikt bij praktische opdrachten, waaronder waarschijnlijk ook het gebruik van een CAS.

## Wiskunde in het nieuwe hoger beroepsonderwijs

### Beleidsadvies voor het onderwijsmanagement

Al deze ontwikkelingen nopen tot een *vernieuwd wiskundeonderwijs*. We zullen vier aspecten van deze vernieuwing bespreken: de *functies*, de *didactiek*, de *inhoud* en mogelijke *onderwijsvormen* van het wiskundeonderwijs.

#### *Functies van de wiskunde als bijdragen aan competenties*

De centrale functie van wiskunde is het leggen van een ondersteunende basis voor de beroepsgerichte vakken. Stond in het verleden de training van handmatig formulewerk centraal, nu kan al dat algoritmische 'monnikenwerk' worden overgelaten aan een CAS. Werden totnogtoe voorbeelden en opgaven beperkt tot standaardopgaven die 'te doen' waren, nu is het mogelijk om uit te gaan van situaties die dichter bij de praktijk staan. Waarmee niet gezegd is dat daarmee alle handmatige vaardigheden tot het verleden gaan behoren. De wiskundige taal moet zodanig goed begrepen worden dat in de beroepspraktijk en tijdens de studie nieuwe kennis eigen gemaakt kan worden. Op voldoende niveau moet met collega's uit andere disciplines gecommuniceerd kunnen worden en vakliteratuur geraadpleegd. Daarom zullen in een vernieuwd wiskundeonderwijs de volgende functies in beperkte mate en in aangepaste vorm blijven bestaan.

- een goed begrip van wiskundige concepten, en
- een reken- en formulevaardigheid op elementair niveau.

Wiskunde blijft - *in aangepaste vorm* - deze bijdragen leveren aan de *vakmatige competenties*.

Wiskunde in de beroepspraktijk wordt gebruikt om een praktijkprobleem op te lossen. In het verleden richtte het wiskundeonderwijs zich vooral op de techniek van oplossingsmethoden en kon er tamelijk weinig aandacht gegeven worden aan de andere fasen in het oplossingsproces van een praktijkprobleem, waaronder de context, de probleemanalyse, de oplossingstrategie en de reflectie.

Door de beschikbaarheid van ICT zal véél meer aandacht besteed kunnen worden aan de belangrijke fasen van *de analyse*, *de modelvorming*, en 'last but not least' *de terugkoppeling*.

Een vernieuwd wiskundeonderwijs kan daardoor een substantiële bijdrage leveren aan *methodische competenties*:

- het werken met mathematische modellen uit de beroepspraktijk,
- het hebben van een kritische, onderzoekende werkhouding, en in het bijzonder
- het kritisch kunnen beoordelen van (computer)resultaten <sup>9</sup>.

Tijdens het leren van de eerder genoemde competenties wordt tevens een bijdrage geleverd aan nog twee methodische competenties: <sup>10</sup>

- het kunnen opzetten van sluitende en logisch opgebouwde argumentaties,
- het denken en werken op voldoende hoog (HBO) abstractie niveau.

#### *Nieuwe didactiek*

Een te hanteren nieuwe didactiek van de wiskunde is zich nog aan het ontwikkelen. Twee belangrijke aspecten vallen daarbij op.

*De student kan zelf veel meer bijdragen aan zijn/haar leerproces.* Tijdens het leren van nieuwe begrippen bieden een CAS <sup>11</sup> en ook andere ICT-applicaties de mogelijkheid om *interactief* en *explorerend* te werk te gaan, doordat de student gemakkelijk varianten kan uitproberen en een aantal begrippen gevisualiseerd kan worden. (Het is verrassend hoeveel een student leert als hij/zij zelf iets moet uitzoeken en formuleren.)

<sup>9</sup> Bij studenten is er vaak een blind vertrouwen in computeruitkomsten.

<sup>10</sup> Bijlage B biedt een overzicht van de bijdragen die wiskunde kan leveren aan het gehele scala van competenties.

<sup>11</sup> Een CAS blijkt niet alleen als gereedschap maar bovendien als leermiddel te kunnen worden ingezet.

## Wiskunde in het nieuwe hoger beroepsonderwijs

### Beleidsadvies voor het onderwijsmanagement

Om zich staande te kunnen houden in projectonderwijs heeft een student een aantal methodische bekwaamheden nodig, waaronder een *systematische probleem aanpak* (SPA). Met name dient veel meer dan voorheen aandacht te worden gegeven aan 'het kritisch leren beoordelen van resultaten en in het bijzonder van computerresultaten'.<sup>12</sup>

#### *Nieuwe inhoud*

Het wiskundeonderwijs zal dus een nieuwe inhoud krijgen. De nieuwe inhoud kan niet los worden gezien van de nieuwe functies. Daarom is het nuttig de inhoud steeds te formuleren in leerdoelen die direct of indirect verwijzen naar competenties.

Zorgvuldig zal per opleiding moeten worden vastgesteld welke basiskennis adequaat is en wat geschikte aanvullende leerstof is.

Uitgangspunt is en blijft dat het wiskundeonderwijs zich moet richten op het gebruik ervan in de beroepsopleiding en de beroepspraktijk.

Omgekeerd kan de wiskunde dóór de vernieuwing *grote invloed hebben* op het gebruik van wiskunde in de beroepspraktijk en met name in de beroepsgerichte vakken.<sup>13</sup> Daarom is het uitermate belangrijk dat de samenwerking tussen wiskundedocenten en opleidingsdocenten wordt versterkt. Door intensief overleg kan uitwisseling van expertise plaatsvinden en een gezamenlijk vernieuwingstraject worden vastgesteld.

#### *Andere werkvormen*

Veel hoger-onderwijsinstellingen zijn bezig hun nieuwe onderwijsvisie gestalte te geven. Dit laat zich onder meer zien in moderne onderwijsvormen. *Vernieuwde wiskunde* kan daarbij uitstekend aansluiten.

Het verwerven van kennis of het trainen van rekenvaardigheden kan de student alleen maar zelf doen<sup>14</sup>. Er worden in tegenstelling met het verleden weinig vraagstukken meer echt voorgedaan. Mits het studiemateriaal toereikend is voor zelfstudie en ook het leerklimaat op zelfverantwoordelijkheid is gericht, kan naast een regelmatige toetsing<sup>15</sup> volstaan worden met beperkte begeleiding, bij voorkeur in de vorm van nabespreking van de leerstof met een groep.<sup>16</sup>

Uit ervaring is genoegzaam bekend dat voor het beheersen van wiskundige vaardigheden een continue opbouw van wiskunde in het opleidingscurriculum noodzakelijk is. In veel gevallen kan worden volstaan met een - met het thematisch of projectgericht onderwijs meelopende - vaste stroom van ondersteunend wiskundeonderwijs.

Wanneer het echter gaat om toepassen van de verworven kennis en methodische vaardigheden of het doen van onderzoek kan worden gedacht aan een scala van werkvormen: begeleide leeropdrachten, practicumopdrachten, onderzoekopdrachten en projecten of onderdelen daarvan. (Klassieke tentamens passen hier niet meer bij.)

De rol van de docent is duidelijk die van begeleider van het leerproces geworden. Zijn vakdeskundigheid blijft van groot belang voor de inhoud en de kwaliteit.

---

<sup>12</sup> In feite moet een student leren *onafhankelijk* te worden van een *antwoordenboek*, zodat hij/zij zich in projectonderwijs en in de praktijk kan redden.

<sup>13</sup> Uitgebreid rekenwerk en oplossingsalgoritmen worden tegenwoordig in de vooropleidingen niet meer geleerd. Veel vraagstukken in de klassieke boeken zullen daarom voor het rekenen met de hand te 'moeilijk' worden.

<sup>14</sup> Ook hier zal de computer een ondersteunende rol kunnen vervullen om deze vaardigheden efficiënt en aantrekkelijk te bereiken door het gebruik van (veelal Amerikaanse) educatieve oefenprogramma's.

<sup>15</sup> Ook hier kan de computer een nuttige rol vervullen door het gebruik van toetssystemen.

<sup>16</sup> Zowel docenten als studenten blijken te moeten wennen aan een verminderde aandacht voor het doceren ten bate van het zelf verwerken van de leerstof.

# Wiskunde in het nieuwe hoger beroepsonderwijs

## Beleidsadvies voor het onderwijsmanagement

Bij al deze onderwijsactiviteiten kan een digitale leeromgeving, omwille van de efficiëntie, ondersteuning bieden.

### Aanbevelingen

◆ *Op opleidingsniveau:*

Voor een vernieuwing van het wiskundeonderwijs binnen een opleiding is intensievere samenwerking nodig tussen wiskundedocenten en opleidingsdocenten. Hierbij wordt met name gedacht aan de stimulering van het gebruik van de nieuwe wiskunde-mogelijkheden door de docenten van andere disciplines. Ook de beroepsgerichte vakken zullen zich gaan vernieuwen m.b.t. computeralgebra en andere ICT. Daartoe dient een overgangstraject te worden uitgezet. Ondersteuning van het opleidingsmanagement is nodig, zowel mentaal als facilitair: er dient meer samenwerking gerealiseerd te worden. Bij deze veranderingen kunnen docenten een beroep doen op het hieronder aangeduide expertisecentrum.

◆ *Op hogeschoolniveau:*

Bij de invoering van vernieuwd wiskundeonderwijs is steun van het management onontbeerlijk. Dat doet er goed aan om initiatieven te stimuleren en commitment te vragen van de betreffende opleidingen. Daarvoor zijn extra tijd en extra middelen noodzakelijk. Ondersteuning zal kunnen komen van het hieronder aangeduide expertisecentrum.

Verwante opleidingen binnen één hogeschool zouden bovendien meer kunnen samenwerken om een 'standaardpakket' wiskunde gezamenlijk te ontwikkelen en aan te bieden; dat komt de kwaliteit van het initieel onderwijs ten goede, mede gelet op de grotere diversiteit van de instroom.

◆ *Op nationaal niveau:*

De oprichting van een landelijk expertisecentrum voor het bieden van voorlichting, ondersteuning en cursussen op het gebied van de invoering van CAS en andere ICT in het opleidingscurriculum. De expertise hiervoor kan dan worden gebundeld onder meer voor:

- het verder ontwikkelen van nieuwe didactiek;
- het ontwikkelen of uitwisselen van nieuw les-, oefen- of toetsmateriaal waarmee de nieuwe functies kunnen worden gerealiseerd en in het bijzonder het ontwikkelen van een instrumentarium voor *het kritisch beoordelen van resultaten*;
- het doen van aanbevelingen voor leerdoelen en onderwerpen voor elk type opleiding;
- een onderzoek naar integratie van wiskundige leerdoelen met probleem-, case- dan wel project-georiënteerd onderwijs.

### Literatuurverwijzingen

- 
- [1] o.m. Elshout-Mohr e.a.; Een theoretische verkenning van leren leren; CINOP, Den Bosch; 1998  
Klarus en Van den Dool.; Ontwerpen van leerprocessen: ervaringsleren en cultuurhistorische leerpsychologie binnen vorming en onderwijs; Anthos/SVE, Amersfoort; 1987
- [2] o.m. Vermunt; Leerstijlen en sturen van leerprocessen in het h.o.; Swets&Zeitlinger, Amsterdam; 1992
- [3] o.m. Onstenk; Lerend leren werken; Eburon, Delft; 1998
- [4] o.m. Delhooven; De student centraal; Wolters-Noordhoff, Groningen; 1996

# Nieuwe wiskunde in het nieuwe hoger beroepsonderwijs

Een schets van de vernieuwingen bestemd voor docenten

## Een schets van de vernieuwingen bestemd voor docenten

### 1 Inleiding

We zijn er aan gewend dat de mogelijkheden van de computer overal worden toegepast in de praktijk en in de opleidingen. In het technisch onderwijs bijvoorbeeld zijn in tien jaar tijd vrijwel alle tekentafels vervangen door computers. Voor veel vakken zijn de leerdoelen aangepast aan dit soort nieuwe ontwikkelingen. Studenten zijn steeds vaker gewend om professionele software te gebruiken waarmee ze bovendien vrij snel en vrij goed uit de voeten kunnen. Decennia lang heeft de wiskunde nauwelijks veranderingen gekend. Men rekende met de hand om wiskunde te leren, maar het echt gebruiken van wiskunde in praktijksituaties was nauwelijks mogelijk. De laatste tien jaar is het gebruik van computeralgebra<sup>1</sup> en andere rekenprogrammatuur in de westerse wereld enorm toegenomen. Met de ervaringen die daarbij in het onderwijs zijn opgedaan, kunnen de mogelijkheden van computeralgebra en andere rekenprogramma's worden uitgebuit. Inmiddels is bekend waartoe studenten door het gebruik van computeralgebra in staat zijn en er zijn al enige ervaringen met een aangepaste didactiek.

Velen, ook wiskundedocenten, die voor het eerst kennismaken met computeralgebra krijgen het idee dat het bedrijven van wiskunde met de computer zal ontaarden in 'knoppen drukken'.

We kunnen nú al zeggen dat het tegendeel waar is, mits er op een goede manier met het computeralgebrasysteem (CAS) wordt omgegaan. Het is nu nóg belangrijker geworden om een probleem zorgvuldig te analyseren en wiskundig te formuleren vóóordat er op de knoppen wordt gedrukt. Er is namelijk veel wiskundig begrip nodig om computeralgebra effectief te kunnen benutten, zeker wanneer er praktijkproblemen mee worden aangepakt. Nodig blijkt een uitgebreide kennis van de wiskundige concepten, van de principes van oplossingsmethodes en veel ervaring in het beoordelen van uitkomsten. Ook wordt vaak gedacht dat studenten niet meer met formules om hoeven te kunnen gaan als ze de computer mogen gebruiken om iets uit te rekenen. Ook hier is het tegendeel waar gebleken. Er wordt juist een beter inzicht in formules vereist, bijvoorbeeld alleen al omdat formules die de computer accepteert en produceert veel complexer kunnen zijn dan in de traditionelere HBO-wiskunde.

### 2 Een werkvorm

Hoe bepaal je de kwaliteit van het wiskundeonderwijs? Het aanbieden van een hoeveelheid stof met tentamencijfers als maatstaf? Je zou gewoon kunnen zorgen dat de student de vraagstukken kan maken en de juiste antwoorden kan produceren. Als er slechts routinevragen en standaardberekeningen getest worden (er is dan in de les een 'som' voorgedaan en de student maakt vergelijkbare 'sommen' na), kan het zijn dat de student hoog scoort, maar geen weet heeft van wat hij eigenlijk aan het doen is. Noodzakelijk begrip en praktische toepassing worden daarmee niet gegarandeerd. Bovendien wordt op deze manier geen bijdrage geleverd aan de nodige bekwaamheden van een HBO-afgestudeerde.

We hebben echter de tijd mee; er is informatie- en communicatietechnologie (ICT) en in het bijzonder zijn er computeralgebra, spreadsheets en andere reken- en simulatieprogramma's. Bovendien komt er binnenkort een ander soort student binnen: de leerling uit het studiehuis, die al vaker zelfstandig iets heeft moeten bestuderen en daarover communiceren.

Al deze zaken maken een andere manier van werken niet alleen mogelijk, maar ook noodzakelijk.

*Hoe kan die nieuwe manier eruit zien?*<sup>2</sup>

---

<sup>1</sup> Een computeralgebrasysteem is een zeer krachtig computerprogramma waarmee ingewikkelde berekeningen met symbolen kunnen worden gedaan en dat dus niet beperkt is tot het rekenen met getallen. De bekendste programma's zijn: Derive, Maple en Mathematica.

<sup>2</sup> Omdat de keuze uiteraard afhankelijk is van de onderwijsvisie en het organisatie-model van een opleiding, is deze beschrijving als indicatie van een nieuwe werkvorm bedoeld. Indien een opleiding bijvoorbeeld heeft geko-

# Nieuwe wiskunde in het nieuwe hoger beroepsonderwijs

## Een schets van de vernieuwingen bestemd voor docenten

*Hoe kan die nieuwe manier eruit zien?*

Er wordt lesmateriaal aangeboden in boekvorm of digitaal via het net. Studenten gaan daarmee zelfstandig, grotendeels zonder docent, aan de slag<sup>3</sup>. De aangeboden stof (met voorbeelden en opdrachten) wordt doorgewerkt met behulp van pen en papier en de computer binnen handbereik. Door de beschikbaarheid van een CAS kan er veel – ieder op z'n eigen wijze - uitgeprobeerd worden. Het gebruik van pen en papier moet echter wel *expliciet* worden gestimuleerd. De student dreigt tijdens het werken met de computer het bestaan van pen en papier snel te vergeten. Het gebruik van pen en papier is aan te raden bij het maken van aantekeningen en het maken van overzichtjes betreffende de leerstof. Het zelf maken van overzichtjes en lijstjes van zaken die onthouden moeten worden, werkt veel beter dan het aanbieden van kant-en-klare lijstjes. Bij deze zelfstandige manier van werken hoort een aantal bijeenkomsten van docent met studenten. Bijvoorbeeld eens per week les in een grotere groep om gezamenlijk de bestudeerde stof te evalueren (essenties of problemen bespreken en het vereiste niveau vaststellen) ofwel om stof die studenten gaan bestuderen te introduceren (een helicopterview of handreikingen geven). Daarnaast kan er tijdens een practicum (bijvoorbeeld eens per week) in een kleinere groep onder leiding van de docent aan praktische opdrachten gewerkt worden. Tijdens deze practica is er eventueel ook nog tijd voor individuele problemen met de leerstof of voor hulp bij de manier van het zelfstandig leren.

De rol van de docent is duidelijk die van begeleider van het leerproces geworden. Zijn vakdeskundigheid wordt vooral gevraagd bij het vormgeven van de afgesproken bijdragen aan het curriculum alsmede voor de terugkoppeling naar de student (het beoordelen of becommentariëren van het werk van de student).

*Er wordt weinig tot niets meer echt voorgedaan!* De huidige studenten moeten hier nog erg aan wennen. Velen zijn gewend dat de docent een vraagstuk vóór maakt waarna vervolgens de student vergelijkbare vraagstukken nadoet. Deze manier van werken geeft de student schijnzekerheid en wordt ten onrechte hoog gewaardeerd door studenten. Werkcolleges kunnen nuttig zijn voor gezamenlijke evaluatie van de leerstof en korte hoorcolleges kunnen dienen om nieuwe leerstof te introduceren.

Alle onderwijsactiviteiten worden ondersteund door een digitale leeromgeving. Op het computernetwerk vindt de student actueel studiemateriaal en alle relevante informatie m.b.t. projecten en opdrachten. E-mail en elektronische discussieplekken zijn daarbij efficiënte communicatiemogelijkheden.

### 3 Toetsing

Hieronder enkele (nieuwe) mogelijkheden om de prestaties van studenten te beoordelen.

- Met klassieke, cognitieve toetsen worden alleen nog de elementaire reken- en formulevaardigheden getest. We realiseren ons dat hiermee slechts een klein aspect van de kennis en de vaardigheden van de student wordt getest. Veel meer kan men bereiken met het volgende.
- Aan het eind van een bepaalde periode moet de student (zoveel mogelijk individueel of - op verzoek - in een groep van twee) een kort verslag inleveren over de onderwerpen die in de betreffende periode aan de orde zijn geweest. De studenten mogen elkaars verslagen lezen en beoordelen. Dit bevordert de communicatie.
- Tijdens een practicum kan de bekwaamheid in het toepassen van de kennis op praktische problemen geoefend of getoetst worden. De verslagen moeten in sommige gevallen tijdens, in andere gevallen na afloop van het practicum gemaakt worden.<sup>4</sup>

---

zen voor projectonderwijs moet zorgvuldig nagegaan worden op welke wijze de wiskundige aspecten van de projecten kunnen worden ondersteund.

<sup>3</sup> Dit stelt hoge eisen aan het studiemateriaal en vereist extra aandacht bij het ontwerpen van opdrachten.

<sup>4</sup> Bijlage A bevat een voorbeeld van een practicumopdracht, bedoeld voor binnen de practicumtijd, gevolgd door een voorbeeld van een uitwerking, alsmede een onderzoeksopdracht, bedoeld voor buiten de practicumtijd.

## Nieuwe wiskunde in het nieuwe hoger beroepsonderwijs

### Een schets van de vernieuwingen bestemd voor docenten

- De student stelt zelf een onderzoekje of op te lossen probleem voor, bijvoorbeeld iets uit de praktijk van zijn vakgebied.<sup>5</sup> Dit stellen van eigen vragen door de student heeft als voordeel dat de opdrachten niet allemaal door de docent geformuleerd hoeven te worden. Ook het door de student zelf zoeken naar een geschikte opdracht heeft een functie! Op deze manier stelt de student namelijk zijn eigen niveau vast en gaat onderzoekend te werk. Uiteraard is er een lijst met criteria waaraan het probleem en het verslag moeten voldoen.  
Het is zelfs mogelijk om sommige verslagen door studenten aan de rest van de groep te laten presenteren.  
Het verkregen materiaal kan in het dossier van de student worden opgenomen als blijk van een zeker niveau van een of meer competenties.

#### 4 Terugkoppeling

De wiskundevraagstukken werden voorheen zorgvuldig uitgezocht zó dat het rekenwerk 'te doen' bleef en de oplossingsmethoden die geleerd waren in goede banen werden geleid. De uitkomst van de berekeningen door de student werden getoetst aan de antwoorden van de docent of die van het antwoordenboek. De student had totaal geen vat op zijn eigen antwoorden en werd daardoor eigenlijk afhankelijk van het antwoordenboek gemaakt. Bij de projecten die ze tegenwoordig doen, blijkt dat studenten zich uitermate onzeker voelen wanneer ze het ineens zonder 'antwoordenboek' moeten stellen.

Tegenwoordig wordt het van steeds groter belang om aandacht te besteden aan het interpreteren en kritisch beoordelen van (computer)resultaten, met andere woorden: aan de terugkoppeling van het antwoord naar het probleem<sup>6</sup>. De student zal daarom het probleem goed moeten snappen en de principes van de oplossingsmethode goed moeten kennen om op andere wijze schattingen van de oplossing te kunnen maken. Gebleken is dat studenten dat heel goed kunnen leren.<sup>7</sup> Bovendien kan bij een vergissing het rekenwerk met de computer snel overgedaan worden.

De docent zal dus veel meer aandacht gaan besteden aan terugkoppeling en controlemiddelen.

Wiskunde in de beroepspraktijk wordt gebruikt om een praktijkprobleem op te lossen. Het oplossingsproces verloopt globaal als volgt. Het probleem wordt eerst beschreven en geanalyseerd (analyse), dan wordt er een geschikt wiskundig model gemaakt dat het probleem zo goed mogelijk beschrijft (modelvorming), vervolgens wordt dat model geanalyseerd en doorgerekend tot er een oplossing wordt verkregen (oplossingsmethode), tot slot wordt die oplossing geïnterpreteerd en kritisch beoordeeld of deze van nut kan zijn voor het praktijkprobleem (terugkoppeling).

In het verleden richtte het wiskundeonderwijs zich vooral op de techniek van oplossingsmethoden en kon er tamelijk weinig aandacht worden gegeven aan de andere fasen in het oplossingsproces van een praktijkprobleem.

Door de beschikbaarheid van een CAS en andere applicaties zal veel meer aandacht besteed kunnen worden aan de belangrijke fasen van een *systematische probleem aanpak* (SPA), waarbij *de terugkoppeling* een belangrijk nieuw element is. Globaal kan gedacht worden aan de volgende verhouding.

*analyse* : *modelvorming* : *oplossingsmethode* : *terugkoppeling*  $\approx$  30% : 20% : 20% : 30%<sup>8</sup>

Op HBO-niveau zal in de meeste gevallen gewerkt worden met gebruikelijke wiskundige modellen. (Het ontwikkelen van nieuwe modellen is op dit niveau meestal niet nodig.) Het leren benutten van

---

<sup>5</sup> Waarom kon dat vroeger dan niet? Dat had een heel belangrijke reden! Als de student zichzelf een probleem voor zou gaan stellen en naar het antwoord op zoek zou gaan, dan kon het wel eens zijn dat hij in een enorme rekenpartij verstrikt raakte en dat was zeker niet de bedoeling.

<sup>6</sup> Dit kan bijvoorbeeld gebeuren m.b.v. een vereenvoudigd model of situatie, of in sommige gevallen door vergelijking met onafhankelijk verkregen resultaten van anderen. Bovendien is er bij studenten vaak een blind vertrouwen in computeruitkomsten.

<sup>7</sup> O.m. op de Noordelijk Hogeschool Leeuwarden en op de Hogeschool Haarlem.

<sup>8</sup> In het verleden zal die verhouding vaak in de buurt van 15% : 15% : 70% : 0% hebben gelegen.

## Nieuwe wiskunde in het nieuwe hoger beroepsonderwijs

### Een schets van de vernieuwingen bestemd voor docenten

wiskundige modellen om verschillende situaties te onderzoeken zal voorop staan; het zelf zoeken naar een model kan wel geoefend worden voor problemen van beperkte omvang.

#### 5 Elementaire reken- en formulevaardigheden

Omdat in de huidige vooropleidingen de aandacht voor algoritmische reken- en formulevaardigheden substantieel minder is, mag niet verwacht worden dat de huidige student in het HBO even 'gedrild' kan worden om een routine te krijgen die wij, docenten, vroeger als student hebben gekregen. Vanaf 2001 heeft de nieuwe havo- en vwo-instroom geleerd allerlei problemen met een grafische calculator op te lossen en hebben velen al kennis gemaakt met een CAS. De noodzaak van een vergaande formulevaardigheid is er ook niet meer, omdat de HBO'er steeds vaker apparatuur tot zijn/haar beschikking heeft. (Nu gebruikt iedereen zakrekenmachines voor het rekenen met getallen; straks geldt dat ook voor het rekenen met symbolen.) Daarom zullen de algoritmische vaardigheden beperkt worden tot een elementair niveau, zodat veel meer tijd besteed kan worden aan gedegen kennis van wiskundige begrippen en het gebruik van wiskunde in praktische situaties.

De wiskundige taal moet zodanig goed begrepen worden dat de HBO'er tijdens de studie en in de beroepspraktijk goed kan communiceren met collega's of specialisten; hij/zij moet leren zelfstandig literatuur te kunnen raadplegen waarin die wiskundige taal gebruikt wordt en hij/zij zal zich zodoende nieuwe kennis eigen kunnen maken. Daarnaast moet hij/zij ten behoeve van een beoordeling van een uitkomst globaal kunnen rekenen. Hiertoe is inzicht nodig in wiskundige formules en een zekere vaardigheid met het herleiden ervan.

Wiskunde is belangrijk vanwege het gebruik in andere vakken van de opleiding. Een knelpunt op dit moment is dat veel leermiddelen voor die beroepsgerichte vakken geen gebruik maken van computer-algebra of soortgelijke applicaties. Daarom is er bij elke opleiding een intensievere samenwerking nodig tussen alle docenten die wiskunde gebruiken. (Hierop komen we nog terug in paragraaf 8.) Het is uitermate belangrijk dat de gehele opleiding doordrongen is van de hierboven besproken veranderingen - in kennis en vaardigheden - zodat er aanpassingen kunnen worden gepland en op elkaar afgestemd. Bovendien is het nuttig dat een opleiding de verantwoordelijkheid legt bij alle vakken gezamenlijk die reken- en formulevaardigheden gebruiken, en niet geïsoleerd bij de wiskunde. Er kan niet verondersteld worden dat deze basisvaardigheden, eenmaal aangebracht bij het begin van de studie, automatisch op hetzelfde niveau blijven. Een voortdurend terugkeren van die vaardigheden die nodig worden geacht is daarvoor noodzakelijk.

#### 6 Functies van het wiskundeonderwijs in het HBO

In het voorgaande is beschreven hoe het wiskundeonderwijs met behulp van computer-algebra en andere applicaties er uit kan zien. Een vernieuwd wiskundeonderwijs kan daarom aan de verschillende HBO-curricula aan de volgende leerdoelen een substantiële bijdrage leveren.

- ◆ het leren werken met mathematische modellen uit de beroepspraktijk,
- ◆ het leren interpreteren en kritisch beoordelen van (computer)resultaten,
- ◆ het leren onderzoekend, systematisch en nauwgezet te werk gaan,
- ◆ het leren zorgvuldig te redeneren en te abstraheren,
- het aanbrengen van een goed begrip van wiskundige concepten,
- het leren van elementaire reken- en formulevaardigheden,
- het leren verkrijgen van inzicht in numerieke aspecten.

De eerste vier leerdoelen dragen bij aan de *methodische vakbekwaamheid* van een HBO-afgestudeerde; de laatste drie behoren meer tot de *vakmatige competenties*.

Aan al deze leerdoelen wordt volop gewerkt bij het schrijven van een sluitend en logisch opgebouwd verslag, bijvoorbeeld van een met SPA aangepakt probleem of als samenvatting van een stuk doorgevoerde leerstof.

## Nieuwe wiskunde in het nieuwe hoger beroepsonderwijs

### Een schets van de vernieuwingen bestemd voor docenten

Een gedegen kennis van wiskundige concepten en elementaire reken- en formulevaardigheden zijn meer cognitief van aard en kunnen dan ook beter apart worden getoetst.

#### 7 Hoe kijkt de student aan tegen de nieuwe manier van werken

Aan eerstejaars studenten is gevraagd wat zij verstaan onder het vak wiskunde. Er werden antwoorden gegeven in de trant van: "wiskunde is sommen maken" en "rekenen met  $x$  en  $y$ " en dergelijke. [5] Ouderejaarsstudenten die nu bezig zijn met projecten geven andere antwoorden. Het gebruik van de computer wordt dan inmiddels als normaal beschouwd. Er worden antwoorden gegeven die blijk geven van een veranderde opvatting over wat er onder het vak wiskunde wordt verstaan. Sommige studenten geven aan dat ze van de wiskundelessen geleerd hebben een probleem te formuleren op een wiskundige manier en met de computer onderzoek te doen naar de oplossing. Bovendien hebben ze bij het vak wiskunde ook geleerd een verkregen oplossing te interpreteren en te beoordelen. Het is gebleken dat sommige studenten het jammer vinden dat het geleerde bij wiskunde veel te weinig wordt gebruikt bij andere vakken en dat heeft dan weer z'n invloed op de motivatie om met wiskunde bezig te zijn.

#### 8 Effecten voor de beroepsgerichte vakken

In de afgelopen tijd heeft bij enkele opleidingen een verschuiving plaatsgevonden van wat studenten, wiskunde- en andere docenten onder wiskunde verstaan. (Zie vorige paragraaf.) Het blijkt echter dat er nog weinig gebruik van deze moderne kijk op wiskunde gemaakt wordt. Het lijkt erop dat de bekwaamheden die studenten zich bij het wiskundeonderwijs eigen maken soms te weinig aansluiting vinden in de rest van de opleiding.

Wiskundedocenten die computeralgebra willen invoeren, dienen zich goed te realiseren dat de leermiddelen van een groot aantal beroepsgerichte vakken nog gebaseerd zijn op een klassieke aanpak van reken- of formulewerk.<sup>9</sup> Er komt daar veel handigheid aan te pas om het rekenwerk binnen de perken te houden. Uitgebreid rekenwerk en slimme oplossingsmethoden worden tegenwoordig in de vooropleidingen niet meer geleerd. Veel vraagstukken in de klassieke boeken zullen daarom voor het rekenen met de hand te 'moeilijk' worden.

Veel docenten zijn misschien geneigd om het rekenwerk handig en bekwaam voor te doen op het bord. Vooral docenten van technische vakken willen we hier voor waarschuwen: "Verwacht in dit opzicht niet dat de studenten u altijd kunnen volgen. Studenten worden snel onzeker en denken dat ze even bekwaam moeten kunnen rekenen als degene die het op het bord voordoet. Wees op de hoogte van welke nieuwe bekwaamheden studenten op dit moment leren in de vooropleidingen en bij uw collega die vernieuwde wiskunde geeft. De keuze van opgaven die door de student nog met de hand moeten worden gemaakt, dient zorgvuldig te worden afgesproken. Laat de student voorts gebruik maken van computeralgebra." Al deze zaken zullen beter gaan als de computeralgebra in het gehele curriculum geïntegreerd is.<sup>10</sup>

Voor de wiskundedocent is bekendheid met het niveau van de toepassingen bij de beroepsgerichte vakken nodig en bekendheid met de onderwerpen van de wiskunde die daarbij nodig zijn. Ook het tijdstip waarop bepaalde onderwerpen in de curricula aan de orde komen is daarbij van belang.

Er is in elke opleiding een project nodig - van alle docenten die wiskunde gebruiken gezamenlijk - dat invoering van computeralgebra in het gehele curriculum beoogt. Dan kan een aanpassingstraject gerealiseerd worden waarbij de beroepsgerichte vakken en de wiskunde op elkaar afgestemd blijven.<sup>11</sup>

---

<sup>9</sup> In de nieuwste boeken van beroepsgerichte vakken ziet men al voorbeelden en opgaven staan waarbij het gebruik van de computer nodig is. Soms kan in die gevallen evengoed een CAS gebruikt worden.

<sup>10</sup> Een probleem dat zich daarbij kan voordoen is de beschikbaarheid van computeralgebra tijdens groepsactiviteiten. (Zie de volgende paragraaf hierover.)

<sup>11</sup> Verwante opleidingen kunnen daarbij samenwerken omwille van de efficiëntie.

## Nieuwe wiskunde in het nieuwe hoger beroepsonderwijs

### Een schets van de vernieuwingen bestemd voor docenten

#### 9 Beschikbaarheid van het computeralgebrasysteem

Het te gebruiken CAS dient ruim beschikbaar te zijn, niet alleen bij een wiskundepracticum maar ook bij alle andere vakken waar wiskunde wordt gebruikt. Indien (nog) veel gebruik gemaakt moet worden van traditionele leslokalen, kunnen laptop-computers de beschikbaarheid verzekeren van computeralgebra en andere applicaties tijdens allerlei lessen en tentamens.<sup>12</sup>

De voor het onderwijs uitgekozen CAS-software zou voor weinig geld te koop moeten zijn voor privé-gebruik bij studenten (bijvoorbeeld door een Surf-licentie).

Op het instituut moet het CAS goed werken op daarvoor geschikte machines en er moet de mogelijkheid van het printen van een verslag bestaan. Op veel instituten zijn reeds investeringen gedaan op dit gebied. In de toekomst zal waarschijnlijk steeds meer gebruik worden gemaakt van het elektronisch corrigeren en afhandelen van verslagen binnen een digitale leeromgeving.

Daarnaast bestaan er handheld- of pocketcomputers met daarop een groot aantal applicaties (waaronder tekstverwerking, spreadsheets, en - gecombineerd met een gsm: internet en e-mail). De verwachting is dat zulke pocketcomputers gemeengoed zullen worden en dat daarvoor ook een beperkte CAS-versie beschikbaar zal komen. Nú al zijn er studenten die beschikken over een zakrekenmachine met daarop computeralgebra. Collectieve invoering van laptops of in de toekomst van pocketcomputers zal de afhankelijkheid van computer-accommodatie op school doen verdwijnen.

Kortom: voor de beschikbaarheid van het CAS moeten er keuzes gemaakt worden die onderwijskundig, praktisch en financieel zorgvuldig zijn afgewogen, in samenhang met het gehele ICT-beleid en de onderwijsvisie van hogeschool of instituut.

#### 10 Een nieuwe wiskundendidactiek

In paragraaf 6 is een aantal nieuwe functies van het wiskundeonderwijs genoemd. Een nieuwe didactiek hiervoor is zich aan het ontwikkelen om die functies te kunnen realiseren. Daarvoor zal zeker nog veel nieuw studiemateriaal moeten worden gemaakt en praktische opdrachten ontworpen.

Een CAS kan worden gebruikt om moeilijke begrippen te illustreren. Vooral bij de aanvang van de HBO-opleiding schiet het abstractieniveau van de student vaak te kort om moeilijke begrippen te leren kennen en ermee te werken.

Neem bijvoorbeeld het begrijpen dat een differentiaalvergelijking meerdere oplossingen kent. De student kan met een eenvoudig commando zelf een richtingsveld op het scherm maken. De vele oplossingen van de differentiaalvergelijking krijgen daardoor opeens gestalte en de afhankelijkheid van de rand- of beginvoorwaarde wordt concreter dan wanneer dat alleen formeel wordt afgeleid.

Een ander voorbeeld is het oplossen van vergelijkingen. Hierbij kunnen aan de hand van het CAS de verschillen tussen oplossingsmethoden zichtbaar worden gemaakt, zonder dat het rekenwerk afleidt.

Door een CAS krijgt de student de mogelijkheid om onderzoekend verschillende mogelijkheden uit te proberen. De invloed van een parameter in een formule bijvoorbeeld, kan de student geheel zelfstandig onderzoeken en dat leidt daardoor tot beter inzicht. Hierbij dient het zogenaamde 'knoppen drukken' te worden voorkomen door het geven van geschikte leeropdrachten<sup>13</sup> waarbij de student iets moet uitzoeken en de conclusies zelf moet formuleren.

Een CAS en andere applicaties kunnen zorgen dat een ballast aan rekenwerk niet meer afleidt van het bestuderen van het wiskundig model van een praktisch probleem. Denk bijvoorbeeld aan de oplossingsmethoden voor differentiaalvergelijkingen. Die moesten bij de klassieke wiskunde bloedig worden uitgeschreven, terwijl met computeralgebra slechts enkele opdrachten nodig zijn. De oplossing

---

<sup>12</sup> Enkele hogescholen (en universiteiten) hebben al voordelige regelingen voor studenten getroffen om individueel computerapparatuur aan te schaffen. Bij een collectieve invoering van laptops in het onderwijs moet de praktijk van het gebruik vooraf zorgvuldig worden geanalyseerd !

<sup>13</sup> Dat zijn met zorg opgestelde opdrachten waarmee men kennis van een specifiek begrip wil laten verwerven.

## Nieuwe wiskunde in het nieuwe hoger beroepsonderwijs

### Een schets van de vernieuwingen bestemd voor docenten

kan meteen geplot worden, waardoor de student veel aandacht aan reflectie op het probleem kan geven. Al die klassieke oplossingsmethoden voor differentiaalvergelijkingen kunnen we zonder grote gevolgen weglaten en alleen aandacht besteden aan de principes van de oplossingsmethoden, bijvoorbeeld alleen aandacht voor de methode van het scheiden van variabelen en voor de (cumulatieve) fouten bij numerieke methoden. Het onderwijs in het onderwerp differentiaalvergelijkingen beweegt zich nu veel meer op het gebied van praktische toepassingen en van de mogelijkheden en beperkingen van het oplossen met computeralgebra dan wel met een simulatieprogramma.

Voor een juiste input en de interpretatie van de output van een CAS en andere applicaties is het nodig om het begrip van de wiskundige concepten op een vrij hoog plan te brengen. Eén van de doelen is dan ook de student onafhankelijk maken van een antwoordenboek, zodat hij zich in de praktijk en in projectonderwijs kan redden!

Conclusie: Hoewel een nieuwe wiskundendidactiek zich nog ontwikkelt constateren we een aantal vernieuwende aspecten: Het leren kan *interactiever* worden door simulaties en visualisaties; het kan *exploratiever* worden mits door goede opdrachten gestuurd. De leerstof kan toegepast worden op *realistischer* problemen en daardoor aantrekkelijker worden. De student kan *kritischer* worden: door het ontbreken van antwoorden leert hij/zij resultaten beoordelen.

Deze veranderende didactiek is niet alleen het gevolg van het gebruik van computeralgebra maar ook het gevolg van computergebruik in het algemeen. Ook in dat kader is het zeker van belang dat het overleg tussen docenten van een opleiding intensificeert om de nieuwe mogelijkheden, nieuwe didactiek en nieuwe leerdoelen op elkaar af te stemmen.

---

Ten behoeve van een adequate vernieuwing zijn in het hoofdstuk "beleidsadvies voor het onderwijsmanagement" een aantal aanbevelingen geformuleerd. Deze zijn voor het gemak op de volgende pagina nog eens vermeld.

# Nieuwe wiskunde in het nieuwe hoger beroepsonderwijs

## Een schets van de vernieuwingen bestemd voor docenten

### Aanbevelingen

- ◆ *Op opleidingsniveau:* Voor een vernieuwing van het wiskundeonderwijs binnen een opleiding is intensievere samenwerking nodig tussen wiskundedocenten en opleidingsdocenten. Hierbij wordt met name gedacht aan de stimulering van het gebruik van de nieuwe wiskunde-mogelijkheden door de docenten van andere disciplines. Ook de beroepsgerichte vakken zullen zich gaan vernieuwen m.b.t. computeralgebra en andere ICT. Daartoe dient een overgangstraject te worden uitgezet. Ondersteuning van het opleidingsmanagement is nodig, zowel mentaal als facilitair: er dient meer samenwerking gerealiseerd te worden. Bij deze veranderingen kunnen docenten een beroep doen op het hieronder aangeduide expertisecentrum.
- ◆ *Op hogeschoolniveau:* Bij de invoering van vernieuwd wiskundeonderwijs is steun van het management onontbeerlijk. Dat doet er goed aan om initiatieven te stimuleren en commitment te vragen van de betreffende opleidingen. Daarvoor zijn extra tijd en extra middelen noodzakelijk. Ondersteuning zal kunnen komen van het hieronder aangeduide expertisecentrum. Verwante opleidingen binnen één hogeschool zouden bovendien meer kunnen samenwerken om een 'standaardpakket' wiskunde gezamenlijk te ontwikkelen en aan te bieden; dat komt de kwaliteit van het initieel onderwijs ten goede, mede gelet op de grotere diversiteit van de instroom.
- ◆ *Op nationaal niveau:* De oprichting van een landelijk expertisecentrum voor het bieden van voorlichting, ondersteuning en cursussen op het gebied van de invoering van CAS en andere ICT in het opleidingscurriculum. De expertise hiervoor kan dan worden gebundeld onder meer voor:
  - het verder ontwikkelen van nieuwe didactiek;
  - het ontwikkelen of uitwisselen van nieuw les-, oefen- of toetsmateriaal waarmee de nieuwe functies kunnen worden gerealiseerd en in het bijzonder het ontwikkelen van een instrumentarium voor *het kritisch beoordelen van resultaten*;
  - het doen van aanbevelingen voor leerdoelen en onderwerpen voor elk type opleiding;
  - een onderzoek naar integratie van wiskundige leerdoelen met probleem-, case- dan wel projectgeoriënteerde onderwijs.
  - een onderzoek naar integratie van wiskundige leerdoelen met probleem-, case- dan wel projectgeoriënteerde onderwijs<sup>14</sup>.

### Literatuurverwijzing

- 
- [5] Klein en Bevers; Vernieuwde Wiskunde HTO; IOWO, Nijmegen, juni 1999

---

<sup>14</sup> Voorbeelden hiervan zijn respectievelijk Maastricht, Hogeschool Drenthe en de Hogeschool van Amsterdam.

Een voorbeeld van een Practicumopdracht  
plus een voorbeeld van een Onderzoeksoopdracht

**Practicumopdracht** (voor tijdens een practicum sessie)

**Gebruik de SPA-methode met de onderdelen  
Analyse, Planning, Uitvoering, Evaluatie en Conclusie**

Van alle 20 toestellen van een zelfde vliegtuigtype die een maatschappij exploiteert, is er op dag  $i$  een aantal  $b_i$  in bedrijf en wordt van dit aantal gemiddeld 5 % gedurende de dag daarna gecontroleerd in de hangaars C.

Van de in de hangaars C aanwezige toestellen ( $c_i$ ) wordt dagelijks gemiddeld 90 % weer in bedrijf genomen, terwijl 10 % ter reparatie naar hangaar R wordt gebracht.

In hangaar R wordt elke dag gemiddeld 60 % van de daar aanwezige toestellen ( $r_i$ ) weer in bedrijf genomen, terwijl van gemiddeld 40% de reparatie nog voortduurt.

Onderzoek of er een stationaire toestand voor dit onderhoudsproces bestaat en hoe die er dan uit ziet. (Controleer tussendoor eerst even je overgangsmatrix voor je verder gaat.)

**Onderzoeksoopdracht** (voor zelfstandig (groeps)werk buiten de lessen)

**Gebruik de volgende onderzoeksfasen  
Oriëntatie, Hypothese, Verificatie en Conclusie**

In alle voorbeelden en opgaven die totnogtoe gingen over overgangsmatrices bleek steeds dat er zich een van de twee situaties voordeed: er bestond een stationaire toestand of er was geen stationaire toestand.

1. Ga na of je overeenkomsten en verschillen kunt ontdekken tussen de overgangsmatrices voor die twee situaties.
2. Ga in de literatuur na of je criteria kunt vinden waaraan een overgangsmatrix moet voldoen opdat er een stationaire toestand bestaat. (Zijn dat noodzakelijke of voldoende voorwaarden?)  
Trefwoorden kunnen zijn:  
*difference equations (differentie-vergelijkingen)*  
*transition matrices (overgangsmatrices)*  
*Markov chains (Markov ketens)*  
*stochastic matrices (stochastische matrices)*

## Een voorbeeld van een uitwerking van de Practicumopdracht

Analyse	De gegevens in een graaf zetten:	Hieruit volgt de overgangsmatrix
		VAN B C R NAAR $  \begin{matrix}  B & \begin{pmatrix} 0 & 0.9 & 0.6 \\ 0.05 & 0 & 0 \\ 0 & 0.1 & 0.4 \end{pmatrix} \\  C & \\  R & \\  \end{matrix} = A  $
	Totaal in $B + C + R = 20$	Gevraagd: een stationaire verdeling
Controle:	Neem bijv. de verdeling $\begin{pmatrix} b_0 \\ c_0 \\ r_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 18 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$	
	$  A \cdot \begin{pmatrix} 18 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.5 \\ 0.9 \\ 0.5 \end{pmatrix}  $ Dit klopt niet, het moet samen 20 blijven In B zit veel te weinig! 95% blijft in bedrijf!	
	$  A = \begin{pmatrix} 0.95 & 0.9 & 0.6 \\ 0.05 & 0 & 0 \\ 0 & 0.1 & 0.4 \end{pmatrix}  $	$  A \cdot \begin{pmatrix} 18 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 18.6 \\ 0.9 \\ 0.4 \end{pmatrix}  $ $  \frac{18.6}{20} + \text{Dit klopt beter!}  $
Planning:	Bereken de eigenwaarden met EIGENVALUES	
	Als er een eigenwaarde = 1, bereken dan de eigenvector bij eigenwaarde 1; anders is er geen stationaire toestand.	
	Bepaal hiermee hoe de 20 vliegtuigen verdeeld zijn.	
Uitvoering:	EIGENVALUES(A) $\approx [1, 0.388, -0.0386]$	
	EXACT_EIGENVECTOR(A, 1) = $[20 \cdot x, x, \frac{x}{6}]$	
	$20 \cdot x + x + \frac{x}{6} = 20 \Rightarrow x \approx 0.945$	
	De stationaire verdeling wordt dus $\approx [18.9, 0.94, 0.16]$	
Evaluatie:	We controleren of deze verdeling 10 dagen zo blijft	
	m.b.v. VECTOR(A <sup>n</sup> * [18.9, 0.94, 0.16], n, 0, 10)	
	Uit deze berekening blijkt dat de verdeling ongeveer zo blijft!	
Conclusie:	De uitkomsten zijn statistische gemiddelden, dus deze stationaire verdeling houdt per dag in:	
	gemiddeld bijna 19 toestellen in bedrijf (bijv. soms 18)	
	gemiddeld bijna 1 toestel voor controle in hangaar C	
	0.16 per dag $\approx$ 1 toestel per week voor één dag voor reparatie in hangaar R	

## Bijdragen van wiskunde aan competenties van HBO-afgestudeerden

Eindtermen van HBO-opleidingen zullen in de nabije toekomst worden afgeleid van competenties die een HBO-afgestudeerde zou moeten hebben.<sup>1</sup> Hieronder zijn de bijdragen weergegeven van een vernieuwd wiskundeonderwijs aan die competenties. Dit betreft uiteraard alleen HBO-opleidingen waar wiskunde deel uitmaakt van het curriculum.

De hieronder genoemde bijdragen kunnen gerealiseerd worden dankzij het gebruik van ICT en in het bijzonder van *Computer Algebra Systemen*, mits dat gebruik geïntegreerd wordt in het gehele curriculum.

Componenten van brede vakbekwaamheid <sup>2</sup>	Bijdrage van vernieuwde wiskunde aan die componenten
1. Vakmatige competentie	<ul style="list-style-type: none"> <li>◆ goed begrip van wiskundige concepten en elementaire reken- en formulevaardigheden, ofwel de basiskennis en -vaardigheden</li> <li>◆ interpretatie van (computer)resultaten</li> <li>◆ inzicht in numerieke aspecten van rekenmethodes</li> <li>◆ onafhankelijkheid van een antwoordenboek</li> </ul>
2. Methodische competentie (waaronder onder meer vallen: analytisch denkvermogen, kritisch en logisch redeneervermogen, en abstractievermogen.)	<ul style="list-style-type: none"> <li>◆ werken met mathematisch modellen uit praktijksituaties</li> <li>◆ besef van geldigheidsgrenzen van modellen (mogelijkheden en beperkingen)</li> <li>◆ kritisch beoordelen van (computer)resultaten <sup>3</sup></li> <li>◆ systematische probleemaanpak</li> <li>◆ sluitend en logisch opgebouwde verslaggeving</li> </ul>
3. Bestuurlijk-organisatorische competentie	<ul style="list-style-type: none"> <li>◆ groepswerk bij omvangrijk modelonderzoek</li> </ul>
4. Strategische competentie	<ul style="list-style-type: none"> <li>◆ projectmatig plannen</li> </ul>
5. Sociaal-communicatieve competentie	<ul style="list-style-type: none"> <li>◆ werken aan groepsopdrachten</li> <li>◆ geven en ontvangen van feedback <sup>4</sup></li> </ul>
6. Normatief-culturele competentie en habitus	<ul style="list-style-type: none"> <li>◆ prestatiebereidheid door uitdagende (praktijk)-opdrachten met persoonlijke inbreng <sup>5</sup></li> <li>◆ kritische en onderzoekende werkhouding</li> </ul>
7. Leer- en vormgevingscompetentie van: <i>leren zelfstandig te werken, via: leren plannen van leertaken en reflectie op het leren</i> naar: <i>strategisch leren</i>	<ul style="list-style-type: none"> <li>◆ CAS en een digitale leeromgeving kunnen substantieel bijdragen aan een verzelfstandiging van de student in het leerproces</li> </ul>

<sup>1</sup> Zo is de werkgroep 'Competent HTNO' bezig de competenties voor het HTNO te formuleren.

<sup>2</sup> Uit: Jeroen Onstenk; *Leerend leren werken*; Eburon, Delft; 1998

<sup>3</sup> Er is vaak een te groot vertrouwen in computeruitkomsten. Daarom zullen Hbo-studenten veel meer dan voorheen moeten leren: 'het op meerdere manieren (met vereenvoudigde modellen of situaties) beoordelen van hun computerresultaten'.

<sup>4</sup> Zoals bij de nabesprekingen van de leerstof of de presentaties van onderzoeksopdrachten.

<sup>5</sup> Voorbeelden hiervan zijn op te vragen bij: M. Kamminga, Noordelijke Hogeschool Leeuwarden (e-mail-adres: kamminga@tech.nhl.nl)